Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 281-288

AURELIO CARBONI (*)

Categorie di frecce parziali (**)

Introduzione

In questo lavoro si affronta il seguente problema di caratterizzazione: è noto che se $\boldsymbol{C}$ è una categoria con equalizzatori ed immagini inverse (cioè prodotti fibrati di monomorfismi lungo frecce qualsiasi), è possibile definire la categoria Par $(\boldsymbol{C})$ delle frecce parziali di $\boldsymbol{C}$ come quella i cui morfismi $\alpha \xrightarrow{R} \beta$

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\alpha & & \beta
\end{tikzcd}$$

sono le (classi di equivalenza di) coppie $\langle i, f\rangle$ in cui i è un monomorfismo, la cui composizione è data dalla costruzione illustrata dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
& & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "pf"] & & \\
& \cdot \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "f"] & & \cdot \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\alpha & & \beta & & \gamma
\end{tikzcd}$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, Via Saldini 50, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 15-I-1982.

Par $(\boldsymbol{C})$ è una categoria 2-dimensionale (è definita un'operazione $R \wedge S$ sui morfismi che rende ogni om-insieme un semireticolo), che contiene $\boldsymbol{C}$ come la sottocategoria delle frecce parziali ovunque definite; si pone dunque il problema di caratterizzare le 2-categorie della forma Par $(\boldsymbol{C})$; la sua soluzione comporta quella del problema analogo per le categorie $\boldsymbol{C}$ esatte a sinistra. In vista dei rapporti tra teorie essenzialmente algebriche e categorie esatte a sinistra discussi in [**2**], è possibile usare la presente caratterizzazione per fornire una presentazione sintattica intrinseca delle teorie essenzialmente algebriche che eviti certe complicazioni formali presenti in quella contenuta in [**1**].

1 – Def. 1. Una $\mathscr{S}$-categoria è una categoria $\boldsymbol{A}$ (indicheremo con $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ i suoi oggetti e con $R, S, T, \ldots$ le sue frecce) tale che

($\mathbb{A}$) è definita un'operazione parziale Q sulle frecce che rende ogni om-insieme un semireticolo (non necessariamente dotato di elemento massimo), che soddisfa la condizione: se $R \subset S$, allora $TR \subset TS$ e $RT \subset ST$;

($\mathbb{S}$) è definita un'operazione $\mathscr{S}R$ sulle frecce (« supporto » di R), che soddisfa gli assiomi

$$(\mathbb{S}_1) \quad \mathscr{S}R \subseteq 1\,, \qquad\qquad (\mathbb{S}_2) \quad \mathscr{S}(R\mathscr{S}S) = \mathscr{S}(RS)\,,$$

$$(\mathbb{S}_3) \quad \mathscr{S}(R \wedge S)\cdot R = R \wedge S\,, \qquad\qquad (\mathbb{S}_4) \quad \mathscr{S}R(S \wedge T) = \mathscr{S}R\cdot S \wedge \mathscr{S}R \cdot T\,.$$

È facile verificare che, se C è una categoria con equalizzatori ed immagini inverse, Par $(\boldsymbol{C})$ soddisfa tutti gli assiomi enunciati, quando si definisca la struttura di $\mathscr{S}$-categoria su Par $(\boldsymbol{C})$ nel modo seguente: se $\langle i, f\rangle$ è un rappresentante della freccia R, allora $\langle i, i\rangle$ è un rappresentante di $\mathscr{S}R$ e, se $\langle j, g\rangle$ è un rappresentante di un'altra freccia S, allora $\langle ei'j,\ e\,j'f\rangle$ è un rappresentante di $R \wedge S$, essendo i' e j' i lati del prodotto fibrato di i lungo j ed e l'equalizzatore di $j'i$ e $i'g$.

Diremo *categoria di frecce parziali* ogni $\mathscr{S}$-categoria della forma Par $(\boldsymbol{C})$. Diremo *modello* di una $\mathscr{S}$-categoria $\boldsymbol{A}$ ogni funtore $\boldsymbol{A} \to$ Par $(\boldsymbol{C})$ da $\boldsymbol{A}$ verso una categoria di frecce parziali, che conservi la struttura addizionale. Nel seguito discuteremo l'esistenza di un modello universale per $\boldsymbol{A}$ e le condizioni perchè esso sia un'equivalenza.

Se $\boldsymbol{A}$ è una $\mathscr{S}$-categoria, è possibile definire la sottocategoria Fun $(\boldsymbol{A})$ come quella dei morfismi R ovunque definiti o « interi », tali cioè che $\mathscr{S}R = 1$; si ha infatti che se R e S sono interi, allora $\mathscr{S}(RS) = \mathscr{S}(R\mathscr{S}S) = \mathscr{S}R = 1$, cioè anche RS è intero; inoltre, per ogni oggetto α si ha $\mathscr{S}1_\alpha = 1_\alpha$, in virtù di $(\mathbb{S}_3)$.

Lemma 1. (a) *Se* $R \subseteq S$ *e* $\mathscr{S}R = \mathscr{S}S$, *allora* $R = S$.

(b) $\mathscr{S}(\mathscr{S}R) = \mathscr{S}R$.

(c) $R \subseteq 1$ *se e solo se* $\mathscr{S}R = R$.

(d) *Se* $A \subset 1$ *e* $B \subset 1$, *allora* $AB = A \wedge B$.

(e) *Se* $R \subset S$, *allora* $\mathscr{S}R \subset \mathscr{S}S$.

(f) *Se* RS *è intero, allora* R *è intero.*

Dim. (a) Si osservi che per (S_2) si ha $R = \mathscr{S}R \cdot R$ e $\mathscr{S}(R \wedge S) \cdot R = \mathscr{S}(R \wedge S) \cdot S$; dunque $S = \mathscr{S}SS = \mathscr{S}R \cdot S = \mathscr{S}(R \wedge S) \cdot S = \mathscr{S}(R \wedge S) \cdot R = \mathscr{S}R \cdot R = R$.

(b) $\mathscr{S}(\mathscr{S}R) = \mathscr{S}(1 \cdot \mathscr{S}R) = \mathscr{S}(1R) = \mathscr{S}R$.

(c) Se $R \subset 1$, allora $R = \mathscr{S}R \cdot R \subset \mathscr{S}R$; l'asserto segue allora da (1), a causa di (b).

(d) Chiaramete si ha $AB \subset A \wedge B$; inoltre, poichè se $X \subset 1$ allora $X^2 = X (X^2 = X \cdot X = \mathscr{S}X \cdot X = X)$, si ha che $A \wedge B \subseteq B$ implica $A \wedge B = (A \wedge B) \cdot (A \wedge B) \subseteq (A \wedge B) \cdot B \subseteq AB$.

(e) Da $\mathscr{S}(R \wedge S) \cdot S = R \wedge S$ segue $\mathscr{S}\big(\mathscr{S}(R \wedge S) \cdot \mathscr{S}S\big) = \mathscr{S}(R \wedge S)$, cioè $\mathscr{S}(R \wedge S) \cdot \mathscr{S}S = \mathscr{S}(R \wedge S)$; ma $\mathscr{S}(R \wedge S) \cdot \mathscr{S}S = \mathscr{S}(R \wedge S) \wedge \mathscr{S}S$; perciò, se $R \wedge S = R$, si ha $\mathscr{S}R \wedge \mathscr{S}S = \mathscr{S}R$, cioè $\mathscr{S}R \subseteq \mathscr{S}S$.

(f) Se $1 = \mathscr{S}(RS)$, allora $1 = \mathscr{S}(RS) = \mathscr{S}(R\mathscr{S}S) \subset \mathscr{S}R$, cioè $\mathscr{S}R = 1$.

Def. 2. Una $\mathscr{S}$-categoria è *tabulare* se per ogni morfismo corifiessivo A (cioè $A \subseteq 1$) esistono due morfismi A^* e A_* tali che $A_* A^* = A$ e $A^* A_* = 1$.

Si osservi che per il Lemma 1 (f), il morfismo A^* è intero; inoltre è un monomorfismo perchè ha un inverso destro in $\boldsymbol{A}$.

Lemma 2. *Se* $A_* A^* = A$, $A^* A_* = 1$ *e* $A'_* A'^* = A'^* = A$, $A'^* A'^* = 1$ *sono due tabulazioni di un morfismo coriflessivo* A, *allora esiste un unico isomorfismo* h *tale che* $A^* = hA'^*$.

Dim. Poichè $A^* = A^* A_* A^* = A^* A'_* A'^*$ è intero, si ha che $h = A^* A'_*$ è intero e che $A^* = hA'^*$; poichè $A'^* = A'^* A' A'^* = A'^* A_* A$ e A'^* è intero, si ha che $k = A'^* A_*$ è intero e che $A'^* = kA_*$; infine, $hk = A^* A'_* A'^* A_* = A^* A_* A^* A_* = 1$ e analogamente $kh = 1$. L'unicità è ovvia.

Lemma 3. *Se* $\boldsymbol{A}$ è *una* $\mathscr{S}$*-categoria tabulare, allora* Fun $(\boldsymbol{A})$ *ha equalizzatori.*

Dim. Siano f e g due frecce parallele di Fun $(\boldsymbol{A})$; poniamo $E = \mathscr{S}(f \wedge g)$ e sia $E_* E^* = E$, $E^* E_* = 1$ una tabulazione di E. E^* è l'equalizzatore di f

e g in Fun $(\boldsymbol{A})$; $Ef = Eg$ e $E^*E = E^*$ implicano $E^*f = E^*g$; se x è un morfismo intero per cui $xf = xg$, posto $h = xE_*$, si ha $hE^* = x$, poichè $xE_*E^* \subseteq x$ e $\mathscr{S}(xE_*E^*) = \mathscr{S}(xE) = \mathscr{S}(x\mathscr{S}(f\wedge g)) = \mathscr{S}(x(f\wedge g)) = \mathscr{S}(xf\wedge xg) = \mathscr{S}(xf) = \mathscr{S}x$ (Lemma 1 (a)); sempre per il Lemma 1 (f), dal fatto che hE_* è intero, segue che h è intero; infine, l'unicità di h segue dal fatto che E^* ha inverso destro in $\boldsymbol{A}$.

Se $\boldsymbol{A}$ è una $\mathscr{S}$-categoria tabulare, l'assioma di tabularità definisce canonicamente, per ogni oggetto α di $\boldsymbol{A}$, una corrispondenza

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{Cor}\,(\alpha) \to \mathrm{Sub}\,(\alpha)$$

mediante $A \mapsto A^*$, dall'insieme Cor (α) dei morfismi coriflessivi $\alpha \xrightarrow{A} \alpha$ in $\boldsymbol{A}$ all'insieme Sub (α) dei sotto-oggetti di α in Fun $(\boldsymbol{A})$ (Lemma 2). Il nostro ultimo assioma è la richiesta della biunivocità della corrispondenza (I); per ottenerla è sufficiente richiedere che per ogni monomorfismo $\xrightarrow{i} \alpha$ di Fun $(\boldsymbol{A})$ esista $A_i \in \mathrm{Cor}\,(\alpha)$ tale che $A_i^* = i$; si ha infatti che se per due morfismi $A, B \in \mathrm{Cor}\,(\alpha)$ vale $A^* = B^*$, allora $A = B$, poichè $A = A_*B^*B_*A^* = A_*A^*B_*B^* = AB = BA = B_*B^*A_*A^* = B_*A^*A_*B^* = B$.

Chiameremo per brevità «assioma I» l'assioma che esprime la biunivocità della corrispondenza (I).

Teorema 1. *Se $\boldsymbol{A}$ è una $\mathscr{S}$-categoria tabulare soddisfacente l'assioma* I, *allora* Fun $(\boldsymbol{A})$ *è una categoria con equalizzatori ed immagini inverse.*

Dim. Già sappiamo (Lemma 3) che Fun $(\boldsymbol{A})$ ha equalizzatori.

Per quanto riguarda le immagini inverse, siano f ed i due morfismi di Fun $(\boldsymbol{A})$ aventi comune codominio e con i mono. Sia C_*, C^* una tabulazione di $\mathscr{S}(fA_i)$; mostriamo che il quadrato

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "C^*fAi_*"] \arrow[d, tail, "C^*"'] & \cdot \arrow[d, tail, "i"] \\ \alpha \arrow[r, "f"] & \beta \end{tikzcd}$$

è un prodotto fibrato in Fun $(\boldsymbol{A})$. Poichè $C^*fA_i \subseteq C^*f$ e $\mathscr{S}(C^*fA_i) = \mathscr{S}(C^*\mathscr{S}(fA_i$ $= \mathscr{S}(C^*C_*C^*) = \mathscr{S}C^* = 1$, si ha $C^*fA_{i*}i = C^*f$. Se x ed y sono due morfismi interi tali che $xf = yi$, allora, posto $h = xC_*$, si ha $hC^* = xC_*C^* \subseteq x$ e $\mathscr{S}(hC^*) = \mathscr{S}(xC_*C^*) = \mathscr{S}(x\mathscr{S}(fA_i)) = \mathscr{S}(yiA_i) = \mathscr{S}(yi) = 1$; dunque $hC^* = x$ e h è intero. Infine $hC^*fA_{i*} = xC_*C^*fA_{i*} = xfA_{i*} = yiA_{i*} = y$. L'unicità di h segue dal fatto che C^* è mono.

Se $\boldsymbol{A}$ è una $\mathscr{S}$-categoria tabulare soddisfacente l'assioma I, è possibile definire una corrispondenza $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Par}\,(\mathrm{Fun}\,(A))$ mediante $\varphi(R) = \langle R^*, R^*R\rangle$, dove si è posto per semplicità di scrittura che R_*, R^* sia una tabulazione di $\mathscr{S}R$. Tale corrispondenza è ben definita perchè R^* è un monomorfismo e perchè $\mathscr{S}(R^*R) = \mathscr{S}(R^*\mathscr{S}R) = \mathscr{S}(R^*R, R^*) = \mathscr{S}R^* = 1$.

Teorema 2. *La corrispondenza* $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Par}\,(\mathrm{Fun}\,(\boldsymbol{A}))$ *definita da* $R \mapsto \varphi(R) = \langle R^*, R^*R\rangle$ *si estende ad un funtore che conserva la struttura di* $\mathscr{S}$*-categorie. Tale funtore è una equivalenza.*

Dim. Sia $\varphi(S) = \langle S^*, S^*S\rangle$ e consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dl, "T^*"'] \arrow[dr, "T^*R^*RS_*"] & & \\
 & \cdot \arrow[dl, "R^*"'] \arrow[dr, "R^*R"] & & \cdot \arrow[dl, "S^*"'] \arrow[dr, "S^*S"] & \\
\alpha & & \beta & & \gamma
\end{tikzcd}$$

dove T^*, T_* è una tabulazione di $\mathscr{S}(R^*R\mathscr{S}(S)) = \mathscr{S}(R^*RS)$. Poichè per il precedente teorema il quadrato è un prodotto fibrato in $\mathrm{Fun}\,(\boldsymbol{A})$, si ha che $\langle T^*R^*, T^*R^*RS_*S^*S\rangle = \langle T^*R^*, T^*R^*RS\rangle$ è un rappresentante di $\varphi(R)\cdot\varphi(S)$. Si ha pure

$$\mathscr{S}(RS) = \mathscr{S}(R, R^*RS) = \mathscr{S}(R_*\mathscr{S}(R^*RS))$$
$$= \mathscr{S}(R_*T_*T^*) = \mathscr{S}(R_*T_*T^*R^*) = R_*T_*T^*R_*\,,$$

poichè $R_*T_*T^*R^* \subseteq 1$. Poichè $T^*R^*R_*T_* = 1$, si ha che T^*R^*, R_*T_* è una tabulazione di $\mathscr{S}(RS)$; dunque $\varphi(RS) = \varphi(R)\cdot\varphi(S)$. In modo analogo si prova che φ conserva la struttura di $\mathscr{S}$-categoria.

Infine, il fatto che φ sia una equivalenza di $\mathscr{S}$-categorie è una diretta conseguenza dell'assioma I; se infatti $\langle i, f\rangle$ è un morfismo di $\mathrm{Par}\,(\mathrm{Fun}\,(\boldsymbol{A}))$, in base a tale assioma si può considerare il morfismo $R = A_{i*}f$, per il quale è subito visto che $\varphi(R) = \langle i, f\rangle$; d'altra parte, il fatto che si può pure provare facilmente che il funtore φ è fedele, assicura il risultato voluto.

Poichè ogni $\mathscr{S}$-categoria della forma $\mathrm{Par}\,(\boldsymbol{C})$, per $\boldsymbol{C}$ categoria con equalizzatore ed immagini inverse, chiaramente è tabulare e soddisfa l'assioma I, non è difficile vedere che le corrispondenze $\boldsymbol{A} \mapsto \mathrm{Fun}\,(\boldsymbol{A})$ e $\boldsymbol{C} \mapsto \mathrm{Par}\,(\boldsymbol{C})$ si estendono a funtori che stabiliscono una biequivalenza tra la (2-) categoria delle $\mathscr{S}$-categorie tabulari soddisfacenti l'assioma I e quella delle categorie con equalizzatori ed immagini inverse.

2 – Consideriamo ora il caso di una categoria $\boldsymbol{C}$ esatta a sinistra (= con limiti finiti = con equalizzatori e prodotti finiti = con prodotti fibrati e oggetto terminale). In tal caso la $\mathscr{S}$-categoria Par $(\boldsymbol{C})$ eredita una struttura di « prodotti finiti » che può essere intesa nel modo seguente:

($\mathbb{P}$) un'operazione $\langle\alpha, \beta\rangle \mapsto \langle\pi_\alpha, \pi_\beta\rangle$ dalle coppie di oggetti alle coppie di morfismi, tale che π_α, π_β hanno comune dominio e codominio rispettivamente α e β e sono interi; un'operazione $\langle R, S\rangle \mapsto R \times S$ dalle coppie di morfismi ai morfismi, tale che $R \times S$ ha per dominio e codominio rispettivamente i prodotti dei domini e dei codomini di R e S (i prodotti di oggetti sono definiti come il dominio comune della coppia $\langle\pi_\alpha, \pi_\beta\rangle$); un'operazione $\alpha \mapsto \Delta_\alpha$ dagli oggetti ai morfismi tale che il dominio di Δ_α è α ed il suo codominio è $\alpha \times \alpha$ e che sia intero; queste operazioni devono soddisfare le equazioni

$$\mathscr{S}(R \times S) = \mathscr{S}R \times \mathscr{S}S\,, \qquad (R \times S)\pi = \mathscr{S}(R \times S)\,\pi \cdot R\,,$$

$$\Delta_\alpha \cdot \pi_\alpha = 1\,, \qquad \Delta \cdot (R\pi \times R\pi) = R\,.$$

($\mathbb{V}$) un oggetto costante $\boldsymbol{V}$ ed una operazione parziale sui morfismi $R \mapsto \boldsymbol{V}(R)$ definita se e solo se $R \subseteq 1$, tale che il dominio di $\boldsymbol{V}(R)$ è quello di R ed il codominio è $\boldsymbol{V}$ e che soddisfi le equazioni

$$\mathscr{S}\boldsymbol{V}(R) = \mathscr{S}R\,, \qquad \mathscr{S}(\mathscr{S}R) = R\,.$$

Tale struttura, che si vede facilmente essere presente nelle $\mathscr{S}$-categorie della forma Par $(\boldsymbol{C})$ dove $\boldsymbol{C}$ è una categoria esatta a sinistra, è anche sufficiente ad assicurare che Fun $(\boldsymbol{A})$ sia esatta a sinistra, se $\boldsymbol{A}$ è una $\mathscr{S}$-categoria tabulare. Si ha infatti il

Teorema 1. *Sia A una $\mathscr{S}$-categoria tabulare munita della struttura* ($\mathbb{P}$) *e* ($\boldsymbol{V}$). *Allora*

(a) Fun $(\boldsymbol{A})$ *ha limiti finiti,*

(b) *esiste un modello* $\boldsymbol{A} \mapsto \mathrm{Par}\,(\mathrm{Fun}\,(\boldsymbol{A}))$ *universale per* $\boldsymbol{A}$, *che è* una equivalenza *se e solo se* $\boldsymbol{A}$ *soddisfa l'assioma* I.

Dim. (a) Il Lemma 3.1 assicura che Fun $(\boldsymbol{A})$ ha equalizzatori. Per quanto riguarda i prodotti binari, basta porre $\langle f, g\rangle = \Delta_\alpha \cdot f \times g$; si ha $\mathscr{S}\langle f, g\rangle = \mathscr{S}(\Delta_\alpha \cdot f \times g) = \mathscr{S}(\Delta_\alpha \mathscr{S} f \times g) = \mathscr{S}(\Delta_\alpha \mathscr{S} f \times \mathscr{S} g) = \mathscr{S}(\Delta_\alpha \cdot 1 \times 1) = \mathscr{S}\Delta_\alpha = 1$; si vede facilmente che $\langle f, g\rangle$ ha la proprietà universale richiesta. L'oggetto terminale è $\boldsymbol{V}$; se α è un oggetto di $\boldsymbol{A}$, allora $\boldsymbol{V}(1_\alpha)$ è l'unico morfismo intero $\alpha \to \boldsymbol{V}$, poichè, se x è un altro morfismo intero $\alpha \to \boldsymbol{V}$, allora $x = \boldsymbol{V}(\mathscr{S}x) = \boldsymbol{V}(1_\alpha)$.

(b) Si osservi che, anche in assenza dell'assioma I, la definizione $R \mapsto \langle R^*, R^* R\rangle$ del Teorema 2.1 si estende ad un funtore di $\mathscr{S}$-categorie (fedele) $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \text{Par}\,(\text{Fun}\,(\boldsymbol{A}))$, che conserva inoltre le strutture ($\mathbb{P}$) e ($\mathbb{V}$). Resta da provare che tale modello è universale, cioè che per ogni altro modello $\boldsymbol{A} \xrightarrow{M} \text{Par}\,(\boldsymbol{C})$, dove $\boldsymbol{C}$ è una categoria esatta a sinistra e M conserva le strutture ($\mathbb{P}$) e ($\mathbb{V}$), esiste un unico funtore di $\mathscr{S}$-categorie $\text{Par}\,(\text{Fun}\,(\boldsymbol{A})) \xrightarrow{M'} \text{Par}\,(\boldsymbol{C})$ tale che $\varphi M' \to M$. Allo scopo, si ponga $M'(\langle h, f\rangle) = \langle M(h), M(f)\rangle$; M' è ben definito, poichè, dato che il fatto che h è un monomorfismo è esprimibile con prodotti ed equalizzatori e che questi sono definiti per mezzo della struttura di $\boldsymbol{A}$ conservata da M, si ha che $M(h)$ è un monomorfismo; in modo analogo si prova che M' è un funtore di $\mathscr{S}$-categorie e che conserva le strutture ($\mathbb{P}$) e ($\mathbb{V}$). L'uguaglianza $\varphi M' = M$ è un'immediata conseguenza dei fatti precedenti e del fatto che $\text{Par}\,(\boldsymbol{C})$ è una $\mathscr{S}$-categoria tabulare soddisfacente l'assioma I. Infine, la unicità di M' è conseguenza del fatto che il funtore Par (—), dalla (2-) categoria delle categorie esatte a sinistra a quella delle $\mathscr{S}$-categorie tabulari munite delle strutture ($\mathbb{P}$) e ($\mathbb{V}$), è pieno e fedele. Tutto ciò può essere riassunto dicendo che il funtore Par (—) esibisce la categoria delle categorie esatte a sinistra come sottocategoria riflessiva di quella delle $\mathscr{S}$-categorie con le proprietà menzionate.

Per quanto riguarda l'ultima asserzione del teorema, peraltro ovvia, si osserva che in presenza della struttura ($\mathbb{P}$), l'assioma I equivale alla richiesta di una operazione parziale il cui dominio è equazionalmente definibile come la classe dei morfismi di $\boldsymbol{A}$ che sono monomorfismi in Fun $(\boldsymbol{A})$ e dunque la teoria stessa delle $\mathscr{S}$-categorie tabulari munite delle strutture ($\mathbb{P}$) e ($\mathbb{V}$) e soddisfacenti l'assiome I è una teoria essenzialmente algebrica, nel senso precisato nell'Introduzione.

L'ultima questione che vogliamo trattare è l'esistenza del completamento tabulare libero di una $\mathscr{S}$-categoria, questione che può occorrere nelle sue applicazioni. Ricordiamo che un morfismo coriflessivo è anche idempotente, e che la condizione che esso sia tabulare equivale a quella che, considerato come idempotente, possieda uno spezzamento. Così, se la $\mathscr{S}$-categoria $\boldsymbol{A}$ è tale che il metodo generale per rendere spezzanti gli idempotenti di $\boldsymbol{A}$ conduce ancora ad una $\mathscr{S}$-categoria, allora $\boldsymbol{A}$ possiede completamento tabulare libero.

Teorema 2. *Se una $\mathscr{S}$-categoria $\boldsymbol{A}$ soddisfa la distributività destra $(R\wedge S)B = RB\wedge SB$,, limitatamente ai morfismi coriflessivi B, allora $\boldsymbol{A}$ possiede un completamento tabulare libero $\boldsymbol{A} \to \hat{\boldsymbol{A}}$.*

Dim. Ricordiamo che la costruzione del completamento $\hat{\boldsymbol{A}}$ consiste nel definire come oggetti di $\hat{\boldsymbol{A}}$ i morfismi corriflessivi e come morfismi $A \xrightarrow{R} B$ in $\hat{\boldsymbol{A}}$ i morfismi R di $\boldsymbol{A}$ tali che $AR = R = RB$. Si verifica immediatamente che definendo $\mathscr{S}(A \xrightarrow{R} B) = A \xrightarrow{\mathscr{S}R} A$ e $(A \xrightarrow{R} B) \wedge (A \xrightarrow{S} B) = A \xrightarrow{R\wedge S} B$ tutti gli assiomi di $\mathscr{S}$-categoria sono soddisfatti. Semplice è anche la verifica della proprietà universale di $\hat{\boldsymbol{A}}$.

Se $\boldsymbol{A}$ possiede le strutture $(\mathbb{P})$ e $(\mathbb{V})$, si vede senza difficoltà che esse sono « ereditate » da $\hat{\boldsymbol{A}}$. Invece, per quanto riguarda l'assioma I, esso non è « ereditato » da $\hat{\boldsymbol{A}}$, poichè fa riferimento ai monomorfismi di Fun $(\boldsymbol{A})$. Tuttavia, se $\boldsymbol{A}$ possiede la struttura $(\mathbb{P})$, non è difficile esprimere per $\boldsymbol{A}$ la condizione affinchè un suo morfismo sia un monomorfismo in Fun $(\hat{\boldsymbol{A}})$; l'assioma I esteso a tale classe di morfismi è allora quello che garantisce che il modello canonico $\hat{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\varphi}$ Par $(\text{Fun}\,(\hat{\boldsymbol{A}}))$ sia un isomorfismo.

Bibliografia

[1] M. Coste, *Une approche logique des théories definissables par limites projectives finies*, Seminaire de Théorie des catégories dirigé par Jean Benabou, marzo 1976.

[2] F. W. Lawvere, Introduzione a « Model Theory and Topoi », Lecture Notes in Mathematics **445**.

Summary

In view of an intrinsic syntactic presentation of essentially algebraic theories, we give a characterization of the 2-categories of partial maps of left exact categories.

* * *