Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 327-331

RENATO BETTI (*)

Invarianza per traslazioni nelle categorie monoidali (**)

Introduzione

Questo articolo considera alcuni casi di V-categorie monoidali. L'invarianza per traslazioni è una condizione di compatibilità fra la struttura monoidale dell'insieme degli oggetti e la struttura di V-categoria. Per i casi che si considerano è sufficiente assumere che V sia un insieme ordinato.

Seguendo un suggerimento di Lawvere ([**7**], pag. 142) si ha in particolare che quando la V-categoria monoidale X è rigidamente chiusa, l'insieme degli oggetti costituisce un gruppo abeliano che, rispetto agli hom-set, è « invariante per traslazioni ». Ciò permette di dare in maniera categoriale la nozione di gruppo abeliano con una ulteriore struttura (essere gli oggetti di una V-categoria = V-gruppo) nel caso in cui non sia esprimibile come « oggetto gruppo in V-cat ». I casi più evidenti di una tale situazione sono quelli dei gruppi abeliani normati (la diagonale $\Delta: X \to X \times X$ non è un funtore di V-cat) e dei gruppi abeliani ordinati (in cui il passaggio all'inverso va considerato come un V-funtore $X^{op} \to X$).

Nel seguito si considerano le V-categorie chiuse. Si dimostra che, nel caso in cui il prodotto di V sia cartesiano, tali categorie comprendono le algebre di Heyting invarianti per traslazioni. Inoltre si dimostra che ogni V-categoria chiusa contiene una sottocategoria rigidamente chiusa (cioè un V-gruppo abeliano) massimale.

Le categorie rigidamente chiuse furono introdotte da Saavedra-Rivano [**8**]. Con altra terminologia sono note come « categorie compattamente chiuse », vale a dire categorie monoidali che, considerate come bicategorie con un solo

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Via Saldini 50, 20133 Milano, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-II-1982.

oggetto, ammettono aggiunto sinistro di ogni 1-cella (si veda Kelly [**4**]), o anche come una particolare classe di «categorie autonome» nel senso di Barr [**1**]. L'osservazione (Kelly-Laplaza [**5**], pag. 194) per cui le categorie compattamente chiuse che sono insiemi ordinati sono esattamente i gruppi abeliani ordinati diventa così un caso particolare ($V = 2$) della proprietà di rigidità dei V-gruppi.

1 - V-gruppi abeliani

La categoria di base V sia un preordine dotato di una struttura monoidale simmetrica. Se X è un monoide commutativo i cui elementi sono gli oggetti di una V-categoria, allora si ha che X è un oggetto monoide in V-cat esattamente quando, come V-categoria, è *monotona per traslazioni*, vale a dire per ogni terna ordinata di oggetti a, b, c vale $X(a, b) \leqslant X(a + c, b + c)$. Ciò motiva la seguente definizione.

Def. X sia una V-categoria tale che l'insieme dei suoi oggetti è un gruppo abeliano. Si dice che X è un *V-gruppo abeliano* se è invariante per traslazioni: $X(a, b) \simeq X(a + c, b + c)$, per ogni terna ordinata di oggetti.

La definizione di V-gruppo abeliano si generalizza in quella di V-algebra, la quale estende (da 2 a V) la nozione usuale di «algebra parzialmente ordinata» (si veda Kokorin e Kopytov [**6**], pag. 2): un insieme A è un'algebra parzialmente ordinata se è un'algebra con operazioni $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})$, un insieme parzialmente ordinato ed in più è tale che, quando a e b sono due elementi confrontabili, $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, \ldots, x_{n_\alpha})$ e $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, \ldots, x_{n_\alpha})$ sono confrontabili, per ogni $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in A$ e per ogni operazione f_α.

2 - V-categorie rigidamente chiuse

Def. (Saavedra-Rivano). La V categoria X si dice *rigidamente V-chiusa* se è una V-categoria monoidale $X \otimes X \xrightarrow{\oplus} X$, $1 \xrightarrow{0} X$, per la quale è assegnato un bifuntore (chiusura) $X^{op} \otimes X \xrightarrow{H} X$, tale che $-\oplus a$ sia V-aggiunto a sinistra a $H(a, -)$ per ogni oggetto a di X e che, posto $a' = H(a, 0)$, si abbia (condizioni di rigidità)

$$\text{(i)}\ a \simeq (a')', \qquad \text{(ii)}\ (a + b)' \simeq a' + b'.$$

Gli isomorfismi della definizione precedente vanno intesi «nel senso di V» e ciò, nel caso in cui V sia un preordine, significa $a \simeq b$ se e solo se $k \leqslant X(a, b)$ e $k \leqslant X(b, a)$, essendo k l'unità del prodotto di V.

Nel seguito supporremo che le V-categorie che si considerano siano scheletrali, vale a dire prive di isomorfismi non identici. Si ha allora

Teorema. *I V-gruppi abeliani sono esattamente le V-categorie rigidamente V-chiuse.*

Dim. Se X è una V-categoria rigidamente V-chiusa, l'insieme degli oggetti è un monoide monotono per traslazioni. Inoltre si ha $a + a' \simeq 0$ per ogni oggetto a. Infatti la funtorialità di $H(—, 0)$ garantisce che vale $X(a, b) \simeq X(b', a')$ e le condizioni di rigidità forniscono $(a + a')' \simeq a + a'$. Dunque $k \leqslant X(a', a') \simeq X(a + a', 0) \simeq X(0, a + a')$. Ne segue che l'insieme degli oggetti di X è un gruppo abeliano, invariante per traslazioni con opposto a'.

Viceversa, supponiamo che sia dato un V-gruppo abeliano X. Si pone $H(a, b) = b - a$ e si verifica che H definisce un V-funtore $X^{op} \otimes X \to X$. Infatti,

$$(X^{op} \otimes X)\big((a, b), (c, d)\big) = X^{op}(a, c) \otimes X(b, d) \simeq X(c, a) \otimes X(b, d)$$
$$\simeq X(b - a, b - c) \otimes X(b - c, d - c) \leqslant X(b - a, d - c) \simeq X\big(H(a, b), H(c, d)\big) .$$

Inoltre $a' = H(a, 0) = -a$ e dunque le condizioni di rigidità sono soddisfatte. La V-aggiunzione fra $- \oplus a$ e $H(a, —)$ si riduce all'osservazione che $a + b \leqslant c$ se e solo se $b \leqslant c - a$.

Per i V-gruppi abeliani si dimostrano facilmente le seguenti proprietà.

(1) Se $F: V \to V'$ è un funtore monoidale e X è un V-gruppo abeliano, allora FX è in maniera naturale un V'-gruppo abeliano.

(2) I V-gruppi abeliani sono esattamente i gruppi normati in V.

(3) Il completamento secondo Cauchy di un V-gruppo abeliano X è in maniera naturale un V-gruppo abeliano.

Le dimostrazioni sono dirette pur di utilizzare l'invarianza per traslazioni. Vale tuttavia la pena di ricordare le nozioni coinvolte.

Una categoria X si dice *normata* in V (si veda Betti, Galuzzi [3]) se per ogni coppia di oggetti a, b di X è data una funzione $X(a, b) \xrightarrow{|\ |_{ab}} obV$, tale che $|1|_{aa} = 0$ e $|f|_{ab} \cdot |g|_{bc} \leqslant |fg|_{ac}$.

Per dimostrare la (2) basta allora considerare il gruppo abeliano X come una categoria con un solo oggetto, e la sua norma assegnata da $|f| = X(0, f)$.

Il completamento secondo Cauchy di una categoria fu introdotto da Lawvere ([7], pag. 163). Gli oggetti del completamento sono le coppie di bimoduli aggiunti $1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\overset{\nrightarrow}{\nleftarrow}}} X$ $(\alpha \dashv \beta)$ e l'oggetto delle frecce è definito mediante $X(\langle\alpha, \beta\rangle, \langle\alpha', \beta'\rangle) = \beta \circ \alpha'$ (si ricordi che i bimoduli $1 \nrightarrow 1$ sono in corrispondenza biunivoca con gli oggetti di V). Per i dettagli della costruzione di X si veda Betti [**2**]. Nella dimostrazione della proprietà (3), la struttura di gruppo in X si definisce punto a punto.

3 - *V*-algebre di Heyting

Si considera ora il caso in cui la chiusura della V-categoria X non sia necessariamente rigida. Quando il prodotto di V è cartesiano si perviene così alla nozione di V-algebra di Heyting.

Def. Sia V un preordine cartesianamente chiuso. Una *V-algebra di Heyting* è un'algebra di Heyting i cui elementi sono gli oggetti di una V-categoria invariante per traslazioni, cioè tale che $X(a, b) \simeq X(a \wedge c, b \wedge c)$ per ogni terna ordinata di oggetti.

Teorema. *Le V-algebre di Heyting sono V-categorie V-chiuse.*

Dim. Se X è una V-algebra di Heyting, si dimostra che $\wedge$ è un funtore $X \otimes X \to X$. Infatti $(X \otimes X)\big((x, y), (z, w)\big) = X(x, w) \otimes X(y, z) \simeq X(x \wedge y, w \wedge y) \otimes X(w \wedge y, w \wedge z) \leqslant X(x \wedge y, w \wedge z)$. Inoltre vale $X(x \wedge y, z) \simeq X(x \wedge x \wedge y, x \wedge z) \simeq X\big(x \wedge y, x \wedge (x \Rightarrow z)\big) \simeq X(y, x \Rightarrow z)$ utilizzando l'identità $x \wedge (x \Rightarrow z) = x \wedge z$, valida nelle algebre di Heyting.

Occorre ora dimostrare la funtorialità di $\Rightarrow$. Infatti

$$
\begin{aligned}
(X^{op} \otimes X)\big((x, z), (y, w)\big) &= X^{op}(x, y) \otimes X(z, w) \simeq X(z, w) \otimes X(y, x) \\
&\simeq X(x \Rightarrow z, x \Rightarrow z) \otimes X(z, w) \otimes X(y, x) \otimes X(x \Rightarrow w, x \Rightarrow w) \\
&\simeq X\big(x \wedge (x \Rightarrow z), z\big) \otimes X(z, w) \otimes X(y, x) \otimes X\big(x, (x \Rightarrow w) \Rightarrow w\big) \\
&\simeq X\big(x \wedge (x \Rightarrow z), w\big) \otimes X\big(y, (x \Rightarrow w) \Rightarrow w\big) \\
&\simeq X(x \Rightarrow z, x \Rightarrow w) \otimes X(x \Rightarrow w, y \Rightarrow w) \leqslant X(x \Rightarrow z, y \Rightarrow w)
\end{aligned}
$$

per ogni quaterna ordinata x, y, z, w.

Inoltre la chiusura è cartesiana; infatti si ha $X(x, y) \otimes X(x, z) \simeq X(x \wedge z, y \wedge z) \otimes X(x, z) \simeq X\big(x, z \Rightarrow (y \wedge z)\big) \otimes X(x, z) \leqslant X(x, z \Rightarrow y) \otimes X(z \Rightarrow y, z \Rightarrow x) \simeq X(x, x \Rightarrow y) = X(x, y)$. Analogamente $X(x, y) \otimes X(x, z) \leqslant X(x, z)$. Ma d'altra parte $X(x, y \wedge z) \simeq X(x \wedge y, y \wedge z) \simeq X(x, z)$ e analogamente $X(x, y \wedge z) \simeq X(x, y)$.

Dunque complessivamente si ha $X(x, y \wedge z) \simeq X(x, y) \otimes X(x, z)$ perchè il prodotto nella base è cartesiano.

Teorema. *Se X è una V-categoria chiusa e scheletrale, la sottocategoria piena costituita dagli oggetti x tali che la valutazione $x + H(x, 0) \to 0$ sia un isomorfismo è una V-categoria rigidamente V-chiusa.*

Dim. Si ha $X(a, b) \leqslant X(a + c, b + c)$ perchè $- \oplus c$ è un V-funtore, inoltre la condizione che per ogni oggetto della sottocategoria valga $x + H(x, 0) = 0$ garantisce che l'insieme degli oggetti è un gruppo abeliano con inverso $-x = H(x, 0)$. L'invarianza per traslazioni è una conseguenza, nel caso dei gruppi abeliani, della monotonia.

Vale la pena di osservare che ogni sottocategoria piena di X che sia rigidamente V-chiusa è contenuta nella sottocategoria definita nel teorema precedente, in quanto deve necessariamente valere la condizione $x + H(x, 0) = 0$. Inoltre, nel caso in cui il prodotto di V sia cartesiano, l'unica sottocategoria rigidamente chiusa di X è quella banale. Infatti in questo caso X è una V-algebra di Heyting e 0 è il massimo. Allora la condizione del teorema precedente significa $x = 0$.

Bibliografia

[1] M. Barr, *$*$-autonomous categories*, Lecture Notes in Math. **752** (1979).

[2] R. Betti, *Applicazioni delle categorie chiuse alla logica quantitativa*, Quaderno n. 44/S dell'Istituto Matematico, Milano 1980.

[3] R. Betti e M. Galuzzi, *Categorie normate*, Boll. Un. Mat. Ital. **4** (1975), 66-75.

[4] G. M. Kelly, *Many-variable functorial calculus I*, Lecture Notes in Math. **281** (1972), 66-105.

[5] G. M. Kelly and M. L. Laplaza, *Coherence for compact closed categories*, J. Pure Appl. Algebra **19** (1980), 193-213.

[6] A. I. Kokorin and V. M. Kopytov, *Fully ordered groups*, Wiley, N. Y. 1974.

[7] F. W. Lawvere, *Metric spaces, generalized logic, and closed categories*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **43** (1973), 135-166.

[8] N. Saavedra-Rivano, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Math. **265** (1970).

Summary

In this paper, monoidal categories enriched over V are considered. Translation-invariant ones are abelian groups normed in V, and can be also described as rigidly V-closed V-categories. So a categorical description of abelian groups with a further structure is provided in the case that they cannot be described as group-objects in the appropriate category. Other properties are studied.

* * *