Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 339-349

A. MURACCHINI e L. COLAFRANCESCHI (*)

Esistenza ed unicità di soluzioni periodiche per sistemi quasi lineari dotati di simmetria (I) (**)

Molte tecniche sono state sviluppate nello studio della esistenza di soluzioni periodiche per sistemi non lineari o quasi lineari [**2**], [**5**], [**6**], [**7**]. In particolare ci interessa ricordare alcuni risultati che sfruttano certe simmetrie del sistema [**1**], [**3**], [**4**], [**8**].

Nella presente nota, ed in una successiva, stabiliremo l'esistenza e l'unicità di soluzioni periodiche della equazione

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x, \dot{x}, t; \alpha) \,, \tag{1}$$

e successivamente del sistema

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + a_1 x = e_1(t) + f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) \qquad [f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; 0, 0) \equiv 0] \,, \\ &\ddot{y} + a_2 y = e_2(t) + f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) \qquad [f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; 0, 0) \equiv 0] \,, \end{aligned} \tag{2}$$

quando le funzioni di perturbazione f, f_1, f_2, le funzioni (non costanti) $e(t)$, $e_1(t)$, $e_2(t)$ e i parametri α, β soddisfino ad opportune condizioni che saranno specificate.

1 – Precisiamo anzitutto le ipotesi comuni a tutti i casi che tratteremo. Supporremo: (I) $a \neq 0$; (II) $e(t)$ funzione τ-periodica, non costante; (III) $f(x, \dot{x},$

(*) Indirizzo degli AA.: A. MURACCHINI, Istituto di Matematica Applicata, Facoltà d'Ingegneria, Università, Via Vallescura 2, 40136 Bologna, Italy; L. COLAFRANCESCHI, Istituto di Fisica, Università, Via Irnerio 46, 40126 Bologna, Italy.

(**) Ricevuto: 24-II-1982.

$t; \alpha)$ funzione di perturbazione τ-periodica in t, quando lo contiene, con $f(x, \dot{x}, t; 0) \equiv 0$; (IV) le funzioni $e(t)$, $f(x, \dot{x}, t; \alpha)$ siano inoltre tali da garantire l'applicabilità del teorema di Cauchy. Nel seguito non ripeteremo le ipotesi di questo numero ammettendone tacitamente la validità.

2 – Sia data l'equazione

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x, \dot{x}, t; \alpha) . \tag{3}$$

La funzione di perturbazione abbia la seguente proprietà di simmetria [1]

$$f(x, \dot{x}, t; \alpha) = f(x, -\dot{x}, -t; \alpha) , \tag{4}$$

ed inoltre $e(t)$ sia pari con $e(0) \neq 0$.

Supponiamo poi, soltanto nel caso $a > 0$, che per il periodo $2\pi/\sqrt{a}$ (periodo delle soluzioni della equazione $\ddot{x} + ax = 0$) non si abbia $\tau = n(2\pi/\sqrt{a})$ $(n \in N)$. In tale ipotesi l'equazione ottenuta da (3) per $\alpha = 0$ ha una ed una sola soluzione τ-periodica che indicheremo con $F(t)$. Risulta da quanto supposto che $F(t)$ è pari e che si può sempre avere $F(0) = A \neq 0$, $\dot{F}(0) = 0$. Tutto questo occorre per l'applicabilità del metodo che useremo.

Ciò premesso, vale il seguente

Lemma 1. *Sia $x^*(t)$ la soluzione di* (3) *con le condizioni iniziali* $x^*(0) = x_0$, $\dot{x}^*(0) = 0$. *Allora $x^*(t)$ è una funzione pari.*

Inoltre, se $x^*(t)$ soddisfa a $\dot{x}^*(\tau/2) = 0$, allora $x^*(t)$ è anche τ-periodica. Inversamente, se la soluzione $x^*(t)$ della (3) *con le condizioni iniziali indicate è τ-periodica risulta $\dot{x}^*(\tau/2) = 0$.*

Dim. Consideriamo la funzione $w(t) = x^*(-t)$. Per le ipotesi fatte

$$w(0) = x^*(0) = x_0 , \qquad \dot{w}(0) = -\dot{x}^*(0) = 0 = \dot{x}^*(0) . \tag{5}$$

---

(1) È questo, ad esempio, il caso della funzione $f(x, \dot{x}, t; \alpha) = \alpha x \dot{x} \operatorname{sen} \gamma t$ ed anche della $f(x, \dot{x}, t; \alpha) = \alpha \dot{x}^3 \operatorname{sen} \gamma t$. Si noti comunque che la condizione di simmetria (4) implica che, quando non sono presenti le variabili $\dot{x}$, t, la funzione f non è soggetta ad alcuna limitazione. In tal caso, si rimanda il lettore, interessato alle applicazioni fisiche, al volume [**5**] della Bibliografia in cui si trova un grande numero di esempi che rientrano nella trattazione.

Ma $x^*(t)$ è soluzione di (3) e si ha pertanto

$$\ddot{x}^*(t) + ax^*(t) = e(t) + f[x^*(t), \dot{x}^*(t), t; \alpha] . \tag{6}$$

Con la trasformazione $t \to -t$ l'eguaglianza (6) diventa

$$\ddot{x}^*(-t) + ax^*(-t) = e(-t) + f[x^*(-t), \dot{x}^*(-t), -t; \alpha] , \tag{7}$$

ossia, poichè $\dot{w}(t) = -\dot{x}^*(-t)$, $\ddot{w}(t) = \ddot{x}^*(-t)$,

$$\ddot{w}(t) + aw(t) = e(-t) + f[w(t), -\dot{w}(t), -t; \alpha] . \tag{8}$$

Poichè $e(t)$ è pari, ed in base a (4), la (8) diventa

$$\ddot{w}(t) + aw(t) = e(t) + f[w(t), \dot{w}(t), t; \alpha] . \tag{9}$$

Dunque $w(t)$ è soluzione della (3) come $x^*(t)$; ma dato che le due soluzioni soddisfano alle medesime condizioni iniziali (5), esse coincidono. Si conclude che $x^*(t) = w(t) = x^*(-t)$, cioè che $x^*(t)$ è pari.

Consideriamo ora la funzione

$$z(t) = x^*(t - \tau) . \tag{10}$$

Si ha, per le ipotesi fatte ed essendo $x^*(t)$ pari, che

$$z(\tau/2) = x^*(\tau/2) , \quad \dot{z}(\tau/2) = -\dot{x}^*(\tau/2) = 0 = \dot{x}^*(\tau/2) . \tag{11}$$

Poichè la funzione f e la $e(t)$ sono τ-periodiche segue che $z(t)$ è soluzione di (3). Ma le (11) mostrano che per $t = \tau/2$ la $x^*(t)$ e $z(t)$ soddisfano alle medesime condizioni iniziali e pertanto

$$z(t) = x^*(t - \tau) = x^*(t) . \tag{12}$$

La $x^*(t)$ è cioè τ-periodica.

Inversamente, supponiamo che la funzione τ-periodica $x^*(t)$ soddisfacente a $x^*(0)=x_0$, $\dot{x}^*(0)=0$ sia soluzione di (3). Vale allora, poichè $\dot{x}^*(t)$ è anch'essa τ-periodica,

$$\dot{x}^*(\tau/2) = \dot{x}^*(-\tau/2) . \tag{13}$$

Come abbiamo dimostrato $x^*(t)$ è pari e quindi $\dot{x}^*(t)$ è dispari. Pertanto

$$\dot{x}^*(\tau/2) = -\dot{x}^*(-\tau/2)\,, \tag{14}$$

ossia da (13) si conclude che è necessariamente $\dot{x}^*(\tau/2) = 0$.

Osservazione. Il lemma precedente si interpreta come segue: le curve integrali della (3) nel piano $Ox\dot{x}$, uscenti da punti dell'asse Ox sono simmetriche rispetto all'asse Ox stesso, punti simmetrici corrispondendo a valori opposti di t. Se una delle curve integrali considerate taglia nuovamente l'asse Ox per $t = \tau/2$ essa deve chiudersi e rappresenta pertanto una soluzione τ-periodica.

Teorema 1. *Sia* $\lambda > 0$ *e* (3) *abbia una soluzione unica di punto iniziale* $\mathscr{P}_0(x_0, 0)$, *per ogni* x_0 *con* $|x_0 - A| < \lambda$. *Esiste* $\bar{\alpha} > 0$ *tale che* (3) *abbia per ogni valore di* α *con* $|\alpha| < \bar{\alpha}$ *una ed una sola soluzione* τ*-periodica* $x^*(t;\alpha)$ *con* $|x^*(0;\alpha) - A| < \lambda$, $\dot{x}^*(0;\alpha) = 0$. *Inoltre* $\lim\limits_{\alpha\to 0} x^*(t;\alpha) = F(t)$.

Dim. Per $\alpha = 0$ l'equazione (3) diventa

$$\ddot{x} + ax = e(t)\,. \tag{15}$$

La (15) ha una ed una sola soluzione τ-periodica che abbiamo indicato sopra con $F(t)$ e posto $A = F(0) \neq 0$. La soluzione della (15) di punto iniziale $\mathscr{P}(A + u, 0)$ è

$$x(t, u) = \begin{cases} u\cos\sqrt{a}\,t + F(t) & \text{per } a > 0 \\ u\cosh\sqrt{-a}\;t + F(t) & \text{per } a < 0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Segue che

$$\dot{x}\left(\frac{\tau}{2}, u\right) = \begin{cases} -u\sqrt{a}\,\operatorname{sen}\dfrac{\tau\sqrt{a}}{2} = C'u & \text{per } a > 0 \\ u\sqrt{-a}\,\operatorname{senh}\dfrac{\tau\sqrt{-a}}{2} = C''u & \text{per } a < 0\,, \end{cases} \tag{17}$$

con $C' \neq 0$, $C'' \neq 0$ in entrambi i casi poichè, per ipotesi, $\tau\sqrt{a}/2 \neq n\pi$ $(n \in N)$.

Ciò premesso, sia $x(t, u; \alpha)$ la soluzione (unica per $|u| < \lambda$ secondo l'ipotesi) di (3) col punto iniziale $\mathscr{P}(A + u, 0)$ e poniamo $\dot{x}(\tau/2, u; \alpha) = \varphi(u; \alpha)$; quindi $\dot{x}(\tau/2, u) = \varphi(u; 0)$. È noto che [2], in base alle ipotesi di continuità e deriva-

[2] Ciò risulta dal teorema sulla dipendenza delle soluzioni di equazioni differenziali dalle condizioni iniziali e dai parametri. Si veda: E. A. CODDINGTON - N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York 1955, Cap. I, § 7.

bilità fatte sulle funzioni $e(t)$ e $f(x, \dot{x}, t; \alpha)$, per $|u| < \lambda$, $|\alpha| < \bar{\alpha}$, la funzione $\varphi(u; \alpha)$ è derivabile sia rispetto ad u che rispetto ad α con derivate continue. Pertanto

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi(u; \alpha) = \varphi(u; 0) = C'u(C''u) . \tag{18}$$

Segue anche

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\partial \varphi(u; \alpha)}{\partial u} = \frac{d\varphi(u; 0)}{du} = C'(C'') . \tag{19}$$

La $\varphi(u; 0)$ si annulla per $u = 0$ cambiando di segno con u. La (18) mostra allora che, per motivi di continuità, esiste $\bar{\alpha}$ tale che, se $|\alpha| < \bar{\alpha}$, anche $\varphi(u; \alpha)$ cambia segno al variare di u nell'intervallo $(-\lambda, +\lambda)$.

Dalla (19) segue poi analogamente che $\partial\varphi(u; \alpha)/\partial u$ mantiene segno costante al variare di u in $(-\lambda, +\lambda)$ e per $\bar{\alpha}$ opportuno. Ciò implica che vi è uno ed un solo $u_0 \in (-\lambda, +\lambda)$ per cui $\varphi(u_0; \alpha) = 0$. Di conseguenza vi è uno ed un solo u_0 per cui la soluzione $x(t, u_0; \alpha)$ della (3) con le condizioni iniziali $x(0, u_0, \alpha) = A + u_0$, $\dot{x}(0, u_0; \alpha) = 0$ soddisfa alla condizione

$$\dot{x}(\tau/2, u_0; \alpha) = \varphi(u_0; \alpha) = 0 . \tag{20}$$

Il Lemma 1 permette così di concludere che la soluzione $x^*(t; \alpha) = x(t, u_0; \alpha)$ è τ-periodica. D'altra parte nell'intervallo $(-\lambda, +\lambda)$ vi è uno ed un solo u_0 per cui la (20) è valida e quindi si conclude conformemente all'enunciato. Per $\alpha \to 0$ $\varphi(u_0; \alpha) \to \varphi(u_0; 0)$ e si conclude che, facendo anche $u_0 \to 0$,

$$\lim_{\alpha_0, u_0 \to 0,0} x(t, u_0; \alpha) = F(t) .$$

3 – Esaminiamo ancora l'equazione (3), ma ora la funzione di perturbazione abbia la seguente proprietà di simmetria ([3])

$$f(x, \dot{x}, t; \alpha) = -f(-x, \dot{x}, -t; \alpha) \tag{21}$$

ed $e(t)$ sia dispari con $\dot{e}(0) \neq 0$.

Supponiamo sempre che, nel caso $a > 0$, il periodo $2\pi/\sqrt{a}$ non sia un sottomultiplo intero di τ. Ora l'equazione ottenuta da (3) per $\alpha = 0$ ha una ed

---

([3]) È questo, ad esempio, il caso della funzione $f(x, \dot{x}, t; \alpha) = \alpha x \dot{x} \cos \gamma t$.

una sola soluzione τ-periodica $F(t)$ che è dispari e si può sempre avere $F(0) = 0$, $\dot{F}(0) = B \neq 0$. Sussiste ora il seguente

Lemma 2. *Sia $x^*(t)$ la soluzione di* (3) *con le condizioni iniziali $x^*(0) = 0$, $\dot{x}^*(0) = \dot{x}_0$. Allora $x^*(t)$ è una funzione dispari.*

Inoltre, se $x^*(t)$ soddisfa a $x^*(\tau/2) = 0$, allora $x^*(t)$ è anche τ-periodica.

Inversamente, se la soluzione $x^*(t)$ della (3) (*che con le condizioni iniziali indicate è dispari*) *è τ-periodica vale $x^*(\tau/2) = 0$.*

La dimostrazione procede in forma analoga a quella svolta per il Lemma 1. Si considererà ora la funzione $w(t) = -x^*(-t)$ mostrando poi che è anch'essa soluzione di (3) e che coincide con $x^*(t)$ provando così che $x^*(t)$ è dispari. Considerando successivamente la funzione $z(t) = x^*(t-\tau)$ si prova che $x^*(t)$ è anche τ-periodica.

Osservazione. Il lemma esposto ha la seguente interpretazione: le curve integrali della (3) nel piano $Ox\dot{x}$, uscenti da punti dell'asse $O\dot{x}$, sono simmetriche rispetto all'asse $O\dot{x}$ stesso, punti simmetrici corrispondendo a valori opposti di t. Se una delle curve integrali considerate taglia nuovamente l'asse $O\dot{x}$ per $t = \tau/2$ essa deve chiudersi e rappresenta pertanto una soluzione τ-periodica.

Teorema 2. *Sia $\lambda > 0$ e* (3) *abbia una soluzione unica di punto iniziale $\mathscr{P}_0(0, \dot{x}_0)$, per ogni $\dot{x}_0$ con $|\dot{x}_0 - B| < \lambda$. Esiste $\bar{\alpha} > 0$ tale che* (3) *abbia per ogni valore di α con $|\alpha| < \bar{\alpha}$ una ed una sola soluzione τ-periodica $x^*(t; \alpha)$ con $|\dot{x}^*(0; \alpha) - B| < \lambda$, $x^*(0; \alpha) = 0$. Inoltre $\lim\limits_{\alpha \to 0} x^*(t; \alpha) = F(t)$.*

Dim. La soluzione della $\ddot{x} + ax = e(t)$ di punto iniziale $\mathscr{P}(0, B + u)$ è

$$x(t, u) = \begin{cases} \dfrac{u}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} \sqrt{a}\, t + F(t) & \text{per } a > 0 \\[2ex] \dfrac{u}{\sqrt{-a}} \operatorname{senh} \sqrt{-a}\, t + F(t) & \text{per } a < 0\,. \end{cases} \tag{22}$$

Sia $x(t, u; \alpha)$ la soluzione di (3) col punto iniziale $\mathscr{P}(0, B + u)$, e poniamo $x(\tau/2, u; \alpha) = \varphi(u; \alpha)$; quindi $x(\tau/2, u) = \varphi(u; 0)$. Si ha in base alle (22), ragionando come nel Teorema 1, che

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi(u; \alpha) = \varphi(u; 0) = \begin{cases} \dfrac{u}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} \dfrac{\tau\sqrt{a}}{2} = C'u & \text{per } a > 0 \\[2ex] \dfrac{u}{\sqrt{-a}} \operatorname{senh} \dfrac{\tau\sqrt{-a}}{2} = C''u & \text{per } a < 0 \end{cases} \tag{23}$$

ove $C' \neq 0$, $C'' \neq 0$. Procedendo poi come per il Teorema 1 si giunge alla conclusione voluta.

4 – Passiamo ad esaminare il sistema

$$(24) \qquad \begin{aligned} \ddot{x} + a_1 x &= e_1(t) + f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) \\ \ddot{y} + a_2 y &= e_2(t) + f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) . \end{aligned}$$

Le ipotesi comuni a tutti i casi di simmetria che tratteremo sono: (I) $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. (II) $e_1(t)$, $e_2(t)$ funzioni τ-periodiche, non costanti. (III) $f_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta)$ con $i = 1, 2$, funzioni di perturbazione τ-periodiche in t, quando lo contengono, con $f_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; 0, 0) \equiv 0$. (IV) Le funzioni $e_1(t)$, $e_2(t)$, $f_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta)$ siano inoltre tali da garantire l'applicabilità del teorema di Cauchy.

5 – Supponiamo in primo luogo che le due funzioni di perturbazione abbiano le seguenti proprietà di simmetria ([4]):

$$(25) \qquad f_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) = f_i(x, y, -\dot{x}, -\dot{y}, -t; \alpha, \beta) \qquad \forall \alpha, \beta ,$$

ed inoltre $e_1(t)$, $e_2(t)$ siano pari con $e_1(0) \neq 0$, $e_2(0) \neq 0$.

Supporremo poi, nel caso che una delle a_i sia positiva (o anche entrambe), che non si abbia $\tau = n 2\pi/\sqrt{a_i}$ $(n \in N)$.

Vale il seguente

Lemma 3. *Sia* $\{x^*(t), y^*(t)\}$ *la soluzione del sistema* (24) *con le condizioni iniziali* $x^*(0) = x_0$, $y^*(0) = y_0$, $\dot{x}^*(0) = \dot{y}^*(0) = 0$. *Allora* $x^*(t)$, $y^*(t)$ *sono funzioni pari.*

([4]) Tale condizione è soddisfatta, ad esempio, nel seguente sistema meccanico. Siano $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, versori di un sistema cartesiano ortogonale ed $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, siano solidali con una piattaforma mobile, oscillante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \alpha \operatorname{sen} \gamma t \boldsymbol{k}$ (α piccolo), intorno ad un asse passante per un suo punto fisso O. Il moto *sulla piattaforma* di un punto P che sia soggetto a due forze non lineari $\boldsymbol{F}_1 = -K_1 x \boldsymbol{i} - K_1' x^3 \boldsymbol{i} + e_1(t) \boldsymbol{i}$ ed $\boldsymbol{F}_2 = -K_2 y \boldsymbol{j} - K_2' y^3 \boldsymbol{j} + e_2(t) \boldsymbol{j}$ con $e_1(t) = A_1 \cos \gamma t$, $e_2(t) = A_2 \cos \gamma t$, è dato dal sistema di equazioni

$$(24) \qquad \begin{aligned} \ddot{x} + a_1 x &= -h_1 \beta x^3 + \alpha \gamma y \cos \gamma t + 2 \alpha \dot{y} \operatorname{sen} \gamma t + \alpha^2 x \operatorname{sen}^2 \gamma t + A_1 \cos \gamma t , \\ \ddot{y} + a_2 y &= -h_2 \beta y^3 - \alpha \gamma x \cos \gamma t - 2 \alpha \dot{x} \operatorname{sen} \gamma t + \alpha^2 y \operatorname{sen}^2 \gamma t + A_2 \cos \gamma t , \end{aligned}$$

ove $a_1 = K_1/m$, $a_2 = K_2/m$, $b_1 = K_1'/m = h_1 \beta$, $b_2 = K_2'/m = h_2 \beta$ (β piccolo).

Le funzioni di perturbazione $f_1 = -h_1 \beta x^3 + \alpha \gamma y \cos \gamma t + 2 \alpha \dot{y} \operatorname{sen} \gamma t + \alpha^2 x \operatorname{sen}^2 \gamma t$, $f_2 = -h_2 \beta y^3 - \alpha \gamma x \cos \gamma t - 2 \alpha \dot{x} \operatorname{sen} \gamma t + \alpha^2 y \operatorname{sen}^2 \gamma t$ soddisfano allora, come si verifica immediatamente, alle condizioni (25).

Inoltre, se $x^*(t)$ e $y^*(t)$ soddisfano a $\dot{x}^*(\tau/2) = \dot{y}^*(\tau/2) = 0$, allora le funzioni $x^*(t)$, $y^*(t)$ sono anche τ-periodiche. Inversamente se la soluzione $\{x^*(t), y^*(t)\}$ di (24) con le condizioni iniziali indicate è τ-periodica, risulta $\dot{x}^*(\tau/2) = \dot{y}^*(\tau/2) = 0$.

La dimostrazione procede, con le opportune modifiche, in modo completamente analogo a quello già visto nel caso della singola equazione.

Il teorema che vogliamo ora enunciare richiede di specificare alcune notazioni.

La unica soluzione τ-periodica della equazione $\ddot{x} + a_1 x = e_1(t)$ verrà indicata con $F_1(t)$. Tale funzione è pari e si può supporre che $F_1(0) = A_1 \neq 0$, $\dot{F}_1(0) = 0$. Analogamente per l'equazione $\ddot{y} + a_2\ddot{y} = e_2(t)$ l'unica soluzione τ-periodica sia $F_2(t)$, pari e con $F_2(0) = A_2 \neq 0$, $\dot{F}_2(0) = 0$.

Teorema 3. *Siano $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e (24) abbia una soluzione unica di punti iniziali $\mathscr{P}_1(x_0, 0)$, $\mathscr{P}_2(y_0, 0)$ nei piani $Ox\dot{x}$, $Oy\dot{y}$ rispettivamente, per ogni x_0, y_0 con $|x_0 - A_1| < \lambda_1$, $|y_0 - A_2| < \lambda_2$. Esistono $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\beta} > 0$ tali che il sistema (24) ha per ogni coppia di valori di α, β con $|\alpha| < \bar{\alpha}$, $|\beta| < \bar{\beta}$ una ed una sola soluzione τ-periodica $\{x^*(t; \alpha, \beta), y^*(t; \alpha, \beta)\}$ con $|x^*(0; \alpha, \beta) - A_1| < \lambda_1$, $|y^*(0; \alpha, \beta) - A_2| < \lambda_2$, $\dot{x}^*(0; \alpha, \beta) = \dot{y}^*(0; \alpha, \beta) = 0$. Inoltre $\lim\limits_{\alpha,\beta \to 0,0} \{x^*(t; \alpha, \beta)$ $y^*(t; \alpha, \beta)\} = \{F_1(t), F_2(t)\}$.*

Dimostrazione. La soluzione del sistema (24) con $\alpha = \beta = 0$ di punti iniziali $\mathscr{P}_1(A_1 + u, 0)$. $\mathscr{P}_2(A_2 + v, 0)$ è

$$x(t, u) = \begin{cases} u \cos \sqrt{a_1}\, t + F_1(t) & \text{per } a_1 > 0 \\ u \cosh \sqrt{-a_1}\, t + F_1(t) & \text{per } a_1 < 0 \end{cases} \tag{26}$$

$$y(t, v) = \begin{cases} v \cos \sqrt{a_2}\, t + F_2(t) & \text{per } a_2 > 0 \\ v \cosh \sqrt{-a_2}\, t + F_2(t) & \text{per } a_2 < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Segue che

$$\dot{x}(\tau/2, u) = \begin{cases} -u\sqrt{a_1}\, \text{sen}\left(\tau\sqrt{a_1}/2\right) & \text{per } a_1 > 0 \\ u\sqrt{-a_1}\, \text{senh}\left(\tau\sqrt{-a_1}/2\right) & \text{per } a_1 < 0 \end{cases} \tag{28}$$

$$\dot{y}(\tau/2, v) = \begin{cases} -v\sqrt{a_2}\, \text{sen}\left(\tau\sqrt{a_2}/2\right) & \text{per } a_2 > 0 \\ v\sqrt{-a_2}\, \text{senh}\left(\tau\sqrt{-a_2}/2\right) & \text{per } a_2 < 0\,. \end{cases} \tag{29}$$

Poniamo $\dot{x}(\tau/2, u) = \varphi_0(u)$, $\dot{y}(\tau/2, v) = \psi_0(v)$. Sia poi $\{x(t, u, v; \alpha, \beta), y(t, u, v; \alpha. \beta)\}$ la soluzione (unica per $|u| < \lambda_1$, $|v| < \lambda_2$ secondo l'ipotesi) di (24) con punti iniziali $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ e poniamo $\dot{x}(\tau/2, u, v; \alpha, \beta) = \varphi(u, v; \alpha, \beta)$ e $\dot{y}(\tau/2, u, v;$

$\alpha, \beta) = \psi(u, v; \alpha, \beta)$. Dalle ipotesi fatte risulta [5] che le funzioni $\varphi(u, v, \alpha; \beta)$, $\psi(u, v; \alpha, \beta)$ sono derivabili rispetto a tutte le variabili con derivate continue e si ha

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0,0} \varphi(u, v; \alpha, \beta) = \varphi_0(u)\,, \qquad \lim_{\alpha,\beta\to 0,0} \psi(u, v; \alpha, \beta) = \psi_0(v)\,. \tag{30}$$

Inoltre

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0,0} \frac{\partial\varphi(u, v; \alpha, \beta)}{\partial u} = \frac{d\varphi_0}{du} = \begin{cases} -\sqrt{a_1}\,\mathrm{sen}\,(\tau\sqrt{a_1}/2) = C_1'(\neq 0) & \text{per } a_1>0 \\ \sqrt{-a_1}\,\mathrm{senh}\,(\tau\sqrt{-a_1}/2) = C_1''(\neq 0) & \text{per } a_1<0, \end{cases} \tag{31}$$

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0,0} \frac{\partial\psi(u, v; \alpha, \beta)}{v} = \frac{d\psi_0}{dv} = \begin{cases} -\sqrt{a_2}\,\mathrm{sen}\,(\tau\sqrt{a_2}/2) = C_2'(\neq 0) & \text{per } a_2>0 \\ \sqrt{-a_2}\,\mathrm{senh}\,(\tau\sqrt{-a_2}/2) = C_2''(\neq 0) & \text{per } a_2<0. \end{cases} \tag{32}$$

Se α, β sono tali che $|\alpha| < \bar{\alpha}$, $|\beta| < \bar{\beta}$ per opportuni $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ dalle (30), (31), (32) si trae che le equazioni

$$\varphi(u, v; \alpha, \beta) = 0, \qquad \psi(u, v; \alpha, \beta) = 0 \tag{33}$$

rappresentano nel piano Ouv, due archi di curve semplici contenuti nel dominio D: $\{|u| < \lambda_1,\ |v| < \lambda_2\}$. Dalle (30) poichè $\varphi_0(u)$ e $\psi_0(v)$ cambiano di segno con u e v, i valori che le due funzioni φ, ψ assumono nel dominio D hanno tutte quattro le combinazioni di segno possibili.

In base alle (31), (32) la $\varphi(u, v; \alpha, \beta) = 0$ definisce in D una funzione $u = u(v; \alpha, \beta)$.

Quando il punto (u, v) percorre l'arco $\varphi(u, v; \alpha, \beta) = 0$ si ha $\psi = \psi(u(v; \alpha, \beta), v; \alpha, \beta) = \psi(v)$ [6]. Ne segue

$$\frac{d\psi(v)}{dv} = \begin{vmatrix} \partial\psi/\partial v & \partial\psi/\partial u \\ \partial\varphi/\partial v & \partial\varphi/\partial u \end{vmatrix} \frac{1}{\partial\varphi/\partial u} \tag{34}$$

e quindi

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0,0} \frac{d\psi(v)}{dv} = \frac{1}{C_1'} \begin{vmatrix} C_2' & 0 \\ 0 & C_1' \end{vmatrix} = C_2'\ (\neq 0) \qquad (\text{oppure risp. } C_1'',\ C_2'')\,. \tag{35}$$

Dunque la funzione $\psi(u, v; \alpha, \beta)$ si annulla una ed una sola volta quando il punto (u, v) si muove sull'arco $\varphi(u, v; \alpha, \beta) = 0$ e pertanto vi è uno ed un

---

(5) Si veda la nota (2) precedente.

(6) Ovviamente in quanto precede si può ragionare scambiando φ con ψ.

solo punto $(u_0, v_0) \in D$ con

$$\varphi(u_0, v_0; \alpha, \beta) = \psi(u_0, v_0; \alpha, \beta) = 0 . \tag{36}$$

In base al Lemma 3 si conclude che il sistema (24) ha una ed una sola soluzione τ-periodica conforme all'enunciato.

Per $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ ed anche $v_0 \to 0$, $u_0 \to 0$ risulta infine

$$\lim_{\alpha,\beta \to 0,0} \{x^*(t; \alpha, \beta), y^*(t; \alpha, \beta)\} = \{F_1(t), F_2(t)\} .$$

6 – Risultati analoghi ai precedenti si hanno, sia per l'equazione (1) sia per il sistema (2), in altri casi di simmetria a cui soddisfino le funzioni di perturbazione f, f_1 ed f_2. Di ciò ci interesseremo però nella seconda parte della nostra nota.

Bibliografia

]1] V. E. BONONCINI, *Soluzioni periodiche di equazioni differenziali del secondo ordine,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 391-399.

[2] J. CRONIN, *Branching of periodic solutions of nonautonomous systems*; in: *Non linear analysis,* a cura di L. Cesari, R. Kannan, H. F. Weinberger, Academic Press, New York 1978.

[3] G. R. MORRIS, *A differential equation for undamped forced nonlinear oscillations* (I), Proc. Camb. Phil. Soc. **51** (1955), 297-312.

[4] A. MURACCHINI, *Sull'esistenza di oscillazioni periodiche in certi sistemi non lineari a due gradi di libertà,* Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, in corso di stampa.

[5] A. H. NAYFEH and D. T. MOOK, *Non linear oscillations,* Wiley and Sons, New York 1979.

[6] N. ROUCHE and J. MAWHIN, *Ordinary differential equations,* Pitman, London 1980.

[7] G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari,* Edizioni Cremonese, Roma 1956.

[8] B. V. SCHMITT and S. MAZZANTI, *Solutions périodiques symetriques de l'équation de Duffing sans dissipation,* J. Differential Equations **42** (1981), 199-214.

Summary

We prove existence and uniqueness of periodic solutions of the equation

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x, \dot{x}, t; \alpha) ,$$

and afterwards of the system

$$\ddot{x} + a_1 x = e_1(t) + f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) ,$$
$$\ddot{y} + a_2 y = e_2(t) + f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) ,$$

when the parameters α, β *are sufficiently small and the functions* f, f_1, f_2 *satisfy proper conditions of symmetry.*

* * *