Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 447-456

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Colorazioni semplici e generalizzate delle cliques private di cicli hamiltoniani e dei grafi regolari (**)

Introduzione

È ben noto (cfr. [**2**], th. 3 e corr., pag. 222) che il numero massimo di cicli hamiltoniani disgiunti di una clique di ordine n è $[(n-1)/2]$ e che, di conseguenza, una clique di ordine n può essere ricoperta da $(n-1)/2$ cicli hamiltoniani disgiunti, se n è dispari, mentre, se n è pari, essa può essere ricoperta da $(n-2)/2$ cicli hamiltoniani disgiunti e da un accoppiamento perfetto.

Per le colorazioni generalizzate rinviamo ai lavori di G. Chartrand, D. P. Geller e S. Hedetniemi [**3**] e di F. Speranza [**5**] che per primi le hanno introdotte (risp. 1968 e 1975), per vie indipendenti; per successive generalizzazioni rinviamo ai lavori di F. Speranza [**5**], di M. Gionfriddo [**4**] e dell'Autore [**1**].

In questo lavoro si è posto il problema della colorazione (semplice e generalizzata nel senso indicato) delle cliques private di alcuni dei loro cicli hamiltoniani; successivamente questo stesso problema può essere esteso ai grafi regolari, dopo che si è condotta un'indagine sul modo di passare da una clique ad un grafo regolare.

1 - Colorazioni semplici e generalizzate delle cliques private di cicli hamiltoniani

Cominciamo con l'esaminare il problema delle cliques private di un ciclo hamiltoniano; con $K_n(-p)$ indicheremo la clique K_n privata di p cicli hamiltoniani.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Ingegneria, Via Claudio 21, 80125 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 16-VI-1982.

Sia, allora, $K_n(-1)$ la clique K_n privata del ciclo hamiltoniano $(0, 1, 2, \ldots, n-1, 0)$, dove $0, 1, 2, \ldots, n-1$ sono i vertici di K_n; la colorazione di $K_n(-1)$ concepita associando ai vertici i e $i+1$, per $i = 0, 2, 4, \ldots$, il colore $A_{(i+2)/2}$, presenta il minimo numero di colori perchè due vertici con colore diverso sono sempre collegati e, inoltre, è tale che due vertici con lo stesso colore non sono mai collegati; quanto precede consente di affermare l'enunciato del seguente

Teorema 1. *Il numero cromatico di una clique di ordine n privata di un ciclo hamiltoniano è $\{n/2\}$.*

Poichè i vertici del grafo $K_n(-1)$ che possono essere colorati con lo stesso colore nella 1-colorazione sono sempre, come facilmente si vede, a distanza due tra loro, segue immediatamente il seguente

Teorema 2. *Il numero s-cromatico* [5]$_2$ *di una clique privata di un ciclo hamiltoniano è n, per ogni $s \geqslant 2$.*

Esaminiamo, ora, il problema di trovare il numero cromatico delle cliques private di un numero p qualunque, con $p \leqslant [(n-1)/2]$, di cicli hamiltoniani. Si ha, allora, il seguente

Teorema 3. *Per il numero cromatico $\gamma_1(K_n(-p))$ delle cliques private di p cicli hamiltoniani vale la seguente disuguaglianza*

$$\gamma_1(K_n(-p)) \geqslant \{(n-1)/2p\} + 1 , \tag{1}$$

dove, naturalmente, $p \leqslant [(n-1)/2]$. Tale disuguaglianza è la migliore possibile.

Difatti, sia $G_n(p)$ il grafo complementare di $K_n(-p)$; se in $G_n(p)$ vi sono delle cliques, si ha subito che i vertici di queste cliques possono essere colorate con lo stesso colore in $K_n(-p)$. Indaghiamo, pertanto, sull'ordine massimo delle cliques che possono esistere in $G_n(p)$ e sul loro massimo numero.

A tale scopo, cominciamo con il far vedere che la cardinalità massima delle cliques che sono contenute in $G_n(p)$ è $2p$. Per questo, basta osservare che, se $0, 1, 2, \ldots, 2p$ sono i vertici di $G_n(p)$ che si susseguono su uno dei cicli hamiltoniani di $G_n(p)$, si ha subito che $G_n(p)$ non può contenere la clique di vertici $0, 1, 2, \ldots, 2p$; invero, in tal caso, $G_n(p)$ dovrebbe contenere gli spigoli $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$,..., $\{0, 2p\}$ (in numero di $2p-1$) che dovrebbero, due alla volta, appartenere agli altri $p-1$ cicli hamiltoniani di $G_n(p)$ e, pertanto, ciò risulta impossibile perchè gli altri $p-1$ cicli hamiltoniani di $G_n(p)$ contengono al massimo $2p-2$ di tali spigoli (ogni ciclo hamiltoniano potendone contenere solo due).

Facciamo, ora, vedere che esistono grafi $G_n(p)$ che contengono esattamente $\{(n-1)/2p\}$ cliques di ordine p. A tale scopo, ricordiamo (corollario 3 di pag. 223 di [**2**]) che *se n è pari, gli spigoli del grafo completo K_n possono essere ricoperti mediante $n/2$ catene hamiltoniane disgiunte.*

Se, in più, si ricorda come viene dimostrato questo corollario, si può aggiungere che *gli insiemi costituiti ognuno dagli estremi di queste $n/2$ catene hamiltoniane hanno a due a due intersezione vuota.*

Ciò premesso, posto $q=[(n-1)/2p]$, diciamo, per $i=1,2,\ldots,q$ e per $j=1,2,\ldots,p$, c_{ij} le catene, la cui esistenza è assicurata da quanto detto prima, che ricoprono la clique avente per estremi i vertici della catena stessa; per quanto già detto, tali catene sono a due a due disgiunte e gli insiemi costituiti dai loro estremi hanno a due a due intersezione vuota. Se il ciclo j-esimo di $G_n(p)$, per $j=1,2,\ldots,p$, contiene le catene c_{ij}, per $i=1,2,\ldots,q$, risulta in modo ovvio che $G_n(p)$ contiene le cliques (in numero di q) di vertici, rispettivamente $1,2,\ldots,2p$; $2p+1, 2p+2,\ldots,4p$; $2(q-1)p+1, 2(q-1)p+2,\ldots,2qp$; come già si è detto, gli insiemi costituiti dai vertici di queste cliques risultano essere *stabili* in $K_n(-p)$ per cui i vertici di questi insiemi possono essere colorati con lo stesso colore. Tenuto, allora, conto del colore associato al vertice 0, segue immediatamente la (1). Per completare la dimostrazione, facciamo vedere che la (1) è la migliore disuguaglianza possibile. A tale scopo, basta considerare il grafo $G_{13}(2)$ costituito dai cicli hamiltoniani: $0,1,2,\ldots,12,0$; $0,2,4,1,3,6,8,5,7,10,12,9,11,0$, che contiene le cliques di vertici, rispettivamente $1,\ldots,4$; $5,\ldots,8$; $9,\ldots,12$, e osservare che per il grafo $K_{13}(-2)$ sono sufficienti, per una 1-colorazione, 4 colori. Dall'esempio considerato, risulta pure, in modo ovvio, che *il limite inferiore della disuguaglianza* (1) *è realmente atteso quando $n-1$ è divisibile per $2p$ e quando i cicli hamiltoniani di $G_n(p)$ contengono il massimo numero di cliques di ordine massimo $2p$.*

Per quanto riguarda il numero s-cromatico delle cliques private di p cicli hamiltoniani, con $s\geqslant 2$, basta osservare che nel grafo $K_n(-p)$ da ogni vertice escono $2p$ spigoli, per cui, considerati due vertici A e B di $K_n(-p)$, esistono, per $n>4p$, $n-4p$ vertici di $K_n(-p)$ non collegati nè con A nè con B. Queste facilissime considerazioni consentono di enunciare il seguente teorema, che generalizza il Teorema 2 e che indichiamo per completezza anche se, per quanto detto, esso è banale.

Teorema 4. *Il numero s-cromatico di una clique di ordine n privata di p cicli hamiltoniani è n, per $s\geqslant 2$ e per $n>4p$, dove, naturalmente, $p\leqslant[(n-1)/2]$.*

Risultando, per quanto detto

$$p\leqslant[(n-1)/2]\,, \tag{3}$$

e cioè

(4) $\qquad n \geqslant 2p + 2$ se n è pari $\quad$ e $\quad n \geqslant 2p + 1$ se n è dispari ,

rimangono da esaminare i casi per i quali si ha

$$2p + 1 \leqslant n \leqslant 4p \,, \tag{5}$$

qualunque sia n (pari o dispari). Non avendo trattato questa questione in modo approfondito, ci limiteremo a presentare qui un risultato parziale, dedotto dalle considerazioni che seguono, relativo al numero 2-cromatico delle cliques private di p cicli hamiltoniani, di ordine n soddisfacente alla (5).

Sia, allora, $G_n(p)$ un grafo di ordine n soddisfacente alla (5) e siano $0, 1, 2, \dots, n-1$ i vertici di $G_n(p)$ che si susseguono su uno dei p cicli hamiltoniani di cui è costituito $G_n(p)$. Evidentemente, considerate le coppie

(6) $\qquad (0, 1),\ (2, 3),\ (4, 5), \dots, (n-2, n-1)$ nel caso n pari ,

(7) $\qquad (0, 1),\ (2, 3),\ (4, 5), \dots, (n-3, n-2)$ nel caso n dispari ,

risulta che gli estremi di queste coppie, non essendo ovviamente a distanza 1 su $K_n(-p)$, sono a distanza 2 su $K_n(-p)$ sse esiste un vertice di $G_n(p)$ che non è collegato con nessuno degli estremi della coppia in $G_n(p)$. Se, allora, per ognuna delle coppie (6) o (7), ogni altro vertice fosse collegato con uno almeno degli estremi della coppia considerata, si avrebbe, come ora faremo vedere, che il grafo $G_n(p)$ dovrebbe avere un numero di spigoli maggiore o uguale a

(8) $\qquad n + n(n-4)/4$ se n è pari , $\qquad n + (n-5)(n+1)/4$ se n è dispari;

difatti, intanto n è il numero degli spigoli del ciclo hamiltoniano considerato; in secondo luogo, nel caso n pari, risultano $n/2$ le coppie (6); poichè un estremo almeno di ognuna delle coppie (non sempre lo stesso, beninteso) deve essere collegato con uno almeno dei rimanenti $n-4$ vertici del ciclo (esclusi cioè i due vertici adiacenti ai due estremi del ciclo), si hanno complessivamente altri $n(n-4)/2$ spigoli; poichè questo numero va diviso per due, tenuto conto che con questo conteggio ogni spigolo, di quelli in ultimo considerati, viene contato due volte, si ha subito la prima delle (8).

Il caso n dispari si riconduce al caso n pari «riducendo», cioè, nel grafo $G_n(p)$ la catena $(n-2, n-1, 0)$ allo spigolo $\{n-2, 0\}$; in tal caso, allora, basta aggiungere al numero che si ottiene dalla prima delle (8), ponendo, in essa, al posto di n (tranne che al posto del primo n), $n-1$, il numero degli spigoli che hanno un estremo in $n-1$ e un altro estremo in uno degli estremi degli spigoli, in numero di $(n-5)/2$, non adiacenti a $n-1$ sul ciclo.

Dai ragionamenti fatti risulta che, nel caso n pari, gli estremi di ognuna delle coppie (6) sono a distanza maggiore di due tra loro se il numero degli spigoli di $G_n(p)$ è maggiore di $n+n(n-4)/4$, mentre, nel caso n dispari, il numero degli spigoli di $G_n(p)$ deve risultare maggiore di $n+(n-5)(n+1)/4$; poichè, evidentemente, il numero degli spigoli di $G_n(p)$ è np, deve essere

$$n+n(n-4)/4 \leqslant np \qquad \text{nel caso } n \text{ pari}, \tag{9}$$

$$n+(n-5)(n+1)/4 \leqslant np \qquad \text{nel caso } n \text{ dispari}; \tag{10}$$

dunque, se valgono la (9) e la (5) nel caso n pari, e la (10) e la (5) nel caso n dispari, gli elementi di ognuna delle coppie (6) e rispettivamente (7) possono essere colorati con lo stesso colore in una 2-colorazione di $K_n(-p)$. Si vede, allora, che la seconda disuguaglianza delle (5) implica la (9) e che la (10) è equivalente alle disuguaglianze

$$2p-\sqrt{4p^2+5} \leqslant n \leqslant 2p+\sqrt{4p^2+5}\,, \tag{11}$$

che sono anch'esse, in modo ovvio, implicate dalle (5).

Sulla base di tutto quanto premesso, tenuto conto che è $[n/2]$ il numero delle coppie (6) come quello delle coppie (7), si può enunciare il seguente teorema, che fornisce una risposta parziale ai problemi connessi ai valori di n per i quali vale la (5).

Teorema 5. *Il numero 2-cromatico di una clique $K_n(-p)$ privata di p cicli hamiltoniani soddisfa alla disuguaglianza*

$$\gamma_2(K_n(-p)) \geqslant [n/2]\,, \tag{12}$$

se n soddisfa alla (5) *e se il numero degli spigoli di $G_n(p)$ è maggiore o uguale del numero*

$$n+n(n-4)/4 \quad \textit{se } n \textit{ è pari}, \qquad n+(n-5)(n+1)/4 \quad \textit{se } n \textit{ è dispari}.$$

Tale disuguaglianza è la migliore possibile.

2 - Pluricolorazioni delle cliques private di cicli hamiltoniani e delle cliques

In questo paragrafo ci occuperemo delle pluricolorazioni, definite in [**1**]$_2$, per le cliques private di cicli hamiltoniani. Il discorso che si farà per queste ultime permetterà di riprendere in esame il discorso delle pluricolorazioni delle cliques, affrontato in [**1**]$_2$, gettando nuova luce su di esso; si potrà, infatti, ridimostrare, in modo più semplice, il Teorema 2 di [**1**]$_2$ e prendere, successivamente, in considerazione pluricolorazioni diverse da quelle di prima e di seconda specie, già definite in [**1**]$_2$.

Cominciamo con il prendere in considerazione delle cliques di ordine pari, private di un certo numero di cicli hamiltoniani e di un accoppiamento perfetto; ricordiamo, in proposito, che in virtù del cor. 2, pag. 223, di [**2**], *gli spigoli della clique K_n di ordine n pari possono essere ricoperti da* $[(n-1)/2]$ *cicli hamiltoniani e da un accoppiamento perfetto*; pertanto, il grafo che si ottiene sottraendo dalla clique suddetta q cicli hamiltoniani e un accoppiamento perfetto è, posto $[(n-1)/2]-q=p$, un grafo $G_n(p)$, cioè un grafo di ordine n costituito esattamente da p cicli hamiltoniani.

Cominciamo, allora, ad occuparci del problema delle pluricolorazioni per grafi $G_n(p)$ di ordine n pari. Ricordiamo, per comodità del lettore, il concetto di pluricolorazione, definito in [**1**]$_2$: assegnata all'insieme dei colori $0, 1, 2, \ldots, n$ la struttura di gruppo ciclico di ordine $n+1$, per mezzo dell'operazione $i \dot{+} j = r$, dove r è il resto della divisione di $i+j$ per $n+1$, associamo ad ogni vertice del grafo considerato, per ciascuno degli spigoli che hanno un estremo nel vertice, un colore (beninteso, colori distinti essendo associati a spigoli distinti); se V e V' sono due vertici congiunti dallo spigolo s e se i colori associati a V e a V', relativamente a s, sono a e b, si richiede che a e b abbiano per somma lo zero del gruppo (*pluricolorazione di prima specie*) oppure l'elemento n del gruppo (*pluricolorazione di seconda specie*).

Più in generale, diremo *pluricolorazione di specie i*, alla possibilità della quale si è solo accennato in [**1**]$_2$, una pluricolorazione del tipo suddetto per la quale si richiede che a e b abbiano per somma l'elemento i del gruppo; secondo questa definizione le pluricolorazioni di prima e di seconda specie sono *pluricolorazioni di specie* 0 *e di specie n*.

Riprendiamo, allora, in considerazione il grafo $G_n(p)$, con n pari.

Si realizza una pluricolorazione di prima specie tenendo innanzitutto conto che ai colori

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 2p-1 \tag{13}$$

devono essere associati, su uno stesso spigolo, i colori, rispettivamente, $0, 2p-1, 2p-2, \ldots, 1$; allora ordinati i cicli in un modo qualsiasi, sul primo ciclo, si associano alternativamente le coppie $0, 0$ e p, p; sul secondo ciclo, la coppia $1, 2p-1$; sul terzo ciclo, la coppia $2, 2p-2$; infine, sull'ultimo ciclo, la coppia $p-1$, $p+1$, nell'ordine che ovviamente si intuisce.

Per quanto concerne le pluricolorazioni di seconda specie si vede che esse possono essere realizzate allo stesso modo, tenendo conto che, in tal caso, ai colori (13), su uno stesso spigolo, devono essere associati i colori $2p-1$, $2p-2, \dots, 0$; allora, sul primo ciclo, si associa, per ogni spigolo, la coppia $0, 2p-1$ (sempre nello stesso ordine, come intuitivamente si comprende), sul secondo ciclo, la coppia $1, 2p-2$ e così via; infine, sull'ultimo ciclo, la coppia $p-1, p+1$.

Più in generale, passiamo a trattare le pluricolorazioni di specie i, ancora per il grafo $G_n(p)$, con n pari. Si può, allora, notare che una pluricolorazione di specie i, con i pari, non differisce, nella sostanza, da una pluricolorazione di prima specie, essendovi, nell'una e nell'altra, due colori che devono essere associati a se stessi, circostanza, questa, che risulta essenziale nelle nostre considerazioni; se, invece, i è dispari, non esistono colori che devono essere associati a se stessi, per cui la pluricolorazione può ritenersi dello stesso tipo di una pluricolorazione di seconda specie; diremo, allora, e sarà sufficiente questa distinzione, *pluricolorazione di specie pari* (risp. *dispari*) una pluricolorazione di specie i pari (risp. dispari), talchè, le pluricolorazioni di prima e di seconda specie potranno ritenersi particolari pluricolorazioni pari e dispari, rispettivamente. Poniamoci in un caso particolare per chiarire quanto si è detto.

Siano i colori quelli indicati

$$0, 1, 2, 3, \dots, 7; \tag{14}$$

allora, i colori che devono essere associati ai colori (14), su uno stesso spigolo, sono, rispettivamente per le colorazioni di specie $0, 1, 2, \dots, 7$, i colori $c_{i,j}$, per $i = 0, 1, \dots, 7$, con $j = 0, 1, \dots, 7$, dove $c_{h,0} = h$, e, per $j > 0$, $c_{0,j} = 8 - j$ e $c_{i+1,j} = c_{i,j-1}$; si ottiene, quindi, una pluricolorazione di specie pari, per esempio di specie 4, associando, sul primo ciclo, con le modalità già considerate le coppie di colori $(2, 2)$ e $(6, 6)$; sul secondo ciclo la coppia $(0, 4)$; sul terzo la coppia $(1, 3)$ e così via.

Quanto premesso, oltre a fornire le modalità di una pluricolorazione di specie qualsiasi (e, quindi, la sua possibilità) per il grafo $G_n(p)$, consente, come ora faremo vedere, di indicare una nuova dimostrazione per la prima parte del Teorema 2 di $[\mathbf{1}]_2$ e di generalizzare il risultato lì ottenuto al caso di una pluricolorazione di specie qualsiasi.

Consideriamo, a tale scopo, il grafo K_n^0 (n pari) ottenuto dalla clique K_n privata del suo accoppiamento perfetto; ai colori $0, 1, 2, 3, \dots, n-2$ vengono associati, su uno stesso spigolo, in una pluricolorazione di specie i, i colori, rispettivamente $i, i-1, i-2, i-3, \ldots, i+1$; risulta, allora, che solo il colore $i/2$ è associato a se stesso, se i è pari e che solo il colore $(i+n-1)/2$ è associato a se stesso, se i è dispari, dovendo risultare, per un colore x che sia associato a se stesso, $x + x = i$.

Allora, escluso il colore x che è associato a se stesso, con le rimanenti coppie di colori $(0, i)$, $(1, i-1), \ldots$ si realizza, con le modalità già esposte, una pluricolorazione del grafo K_n^0 (che ha esattamente $(n-2)/2$ cicli hamiltoniani e ogni vertice, quindi, di grado $n-2$); da questa pluricolorazione si ottiene una pluricolorazione della clique K_n (n pari) associando agli estremi degli spigoli dello accoppiamento perfetto (relativamente a questi spigoli) la coppia (x, x).

Tutto quello che precede permette di enunciare il seguente teorema, che consiste, per quanto detto, in una generalizzazione del Teorema 2 di [**1**]$_2$ e fornisce di quest'ultimo una dimostrazione che, dal punto di vista operativo (cioè, nel senso di ottenere effettivamente la pluricolorazione), risulta più efficiente.

Teorema 6. *Ogni clique di ordine n pari ed ogni grafo $G_n(p)$ di ordine n pari ammette una pluricolorazione di specie qualsiasi.*

Prendiamo, ora in considerazione le cliques di ordine dispari e ricordiamo (cor. 1, pag. 222 di [**2**]) che una clique di ordine n dispari ammette esattamente $(n-1)/2$ cicli hamiltoniani disgiunti e può essere ricoperta da questi.

Lo stesso ragionamento fatto per la dimostrazione del Teorema 2 di [**1**]$_2$ permette di concludere che nessuna clique di ordine dispari nè un grafo $G_n(p)$ di ordine n dispari può ammettere una pluricolorazione di prima specie nè, in generale, una pluricolorazione di specie pari, perchè, in una pluricolorazione di questo tipo, accade, come subito si verifica, che uno stesso colore (anzi due) venga associato a se stesso. Realizzabile, invece, risulta una pluricolorazione di specie dispari, perchè, in tal caso, nessun colore è associato a se stesso; indichiamo come questo si possa realizzare in un caso particolare, con le solite avvertenze sulla possibilità di estendere tutto quanto diremo al caso generale.

Consideriamo, all'uopo, il grafo $G_{11}(3)$, di ordine 11 e costituito esattamente da tre cicli hamiltoniani. Una pluricolorazione di specie dispari, per esempio di specie tre, si realizza immediatamente tenendo conto che ai colori 0, 1, 2, 3, 4, 5 sono associati, su uno stesso spigolo, i colori 3, 2, 1, 0, 5, 4, dove, come si può notare, nessun colore è associato a se stesso; infatti, in tal caso, sul primo ciclo, per ogni spigolo, si associano i colori 0, 3, sul secondo i colori 1, 2 e sul terzo, infine, i colori 4, 5 (sempre nello stesso ordine, come intuitivamente si intende). Questa stessa procedura può esserere alizzata per la clique K_{11} tenendo conto, in tal caso, che ai colori $0, 1, 2, \ldots, 9$ vengono associati i colori 3, 2, 1, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4.

Quanto precede fornisce una seconda dimostrazione della seconda parte del Teorema 2 di $[1]_2$ e ne generalizza, nel contempo, il contenuto nel seguente

Teorema 7. *Ogni clique di ordine n dispari ed ogni clique di ordine n dispari privata di un certo numero di cicli hamiltoniani disgiunti ammette sempre una pluricolorazione di specie dispari (in particolare, di seconda specie), mentre non ammette alcuna pluricolorazione di specie pari (in particolare, di prima specie).*

3 - Colorazioni dei grafi regolari

Da quanto precedentemente detto, risulta in modo ovvio che, privando di un certo numero di cicli hamiltoniani o di un accoppiamento perfetto una clique, si ottiene un grafo regolare $R_{n,p}$ di ordine n e di valenza p (1), se n era l'ordine della clique, dove p dipende, come è ovvio, dal numero dei cicli hamiltoniani sottratti e/o dall'accoppiamento perfetto sottratto. Sorge, allora, naturale il problema di vedere come un grafo regolare possa essere ottenuto da una clique, per tentare di applicare le considerazioni già fatte ai grafi regolari.

Limitiamoci a prendere in esame i casi di un grafo regolare $R_{n,n-2}$, n pari (2), e di un grafo regolare $R_{n,n-3}$, con n qualsiasi, rinviando ad un lavoro successivo un esame più approfondito della questione.

Poichè, in modo ovvio, $R_{n,n-2}$ si ottiene dalla clique K_n (n pari) mediante sottrazione di un accoppiamento perfetto, si ha subito che, in una 1-colorazione, gli estremi degli spigoli che appartengono all'accoppiamento perfetto possono essere colorati con lo stesso colore e, quindi, sono sufficienti $n/2$ colori per una colorazione di $R_{n,n-2}$. Per quanto concerne $R_{n,n-3}$, osserviamo pure che facilmente $R_{n,n-3}$ si ottiene da K_n mediante sottrazione di un fattore F; allora, detti $c_1, c_2, \ldots, c_q$ i cicli elementari disgiunti da cui è costituito F, risulta che ogni ciclo ha lunghezza almeno tre e, quindi, $q \leqslant [n/3]$; inoltre, se la lunghezza p_i del ciclo c_i è 3, è sufficiente un solo colore per colorare i vertici di c_i su $R_{n,n-3}$ mentre ne occorrono $[(p_i+1)/2]$ se la lunghezza è maggiore di 3. Risulta, perciò, che il numero 1-cromatico di $R_{n,n-3}$ è dato dalla somma

$$\sum_{i=1}^{q} [(p_i+1)/2]^{t_i}, \tag{15}$$

dove t_i vale 0 se $p_i = 3$ e vale 1 se $p_i > 3$. Maggiorando, allora, il secondo

(1) Diremo *valenza* di un grafo regolare il grado di ogni suo vertice.

(2) Si osservi che non esiste un grafo regolare $R_{n,n-2}$, con n dispari, perchè il prodotto $n(n-2)$ è il doppio del numero degli spigoli e perciò deve essere pari.

membro della (15) si ottiene in definitiva il seguente

Teorema 8. *Il numero 1-cromatico di un grafo regolare $R_{n,n-2}$ (n pari) è $n/2$ ed il numero 1-cromatico di un grafo regolare $R_{n,n-3}$ soddisfa alla disuguaglianza*

$$\gamma_1(R_{n,n-3}) \leqslant (n + [n/3])/2 . \tag{16}$$

Bibliografia

[1] S. ANTONUCCI: $[\bullet]_1$ *Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo,* Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 20-31; $[\bullet]_2$ *Sur les colorations généralisées des hyperarbres et sur les multicolorations des graphes,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 235-242

[2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes,* Dunod, Paris 1970.

[3] G. CHARTRAND, D. P. GELLER and S. HEDETNIEMI, *A generalization of the chromatic number,* Proc. Camb. Phill. Soc. **64** (1968), 265-271.

[4] M. GIONFRIDDO: $[\bullet]_1$ *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **15**-A (1978), 444-454; $[\bullet]_2$ *Automorfismi colorati e colorazioni $L(r, s)$ in un grafo,* Boll. Un. Mat. Ital. (5) **17**-B (1980) 1338-1349.

[5] F. SPERANZA: $[\bullet]_1$ *Sur les sections des hypergraphes et sur leurs automorphismes,* Collect. Math. **27** (1973), 269-274; $[\bullet]_2$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12**, Suppl. fasc. 3 (1975), 53-62; $[\bullet]_3$ *Numero cromatico, omomorfismi e colorazioni d'un grafo,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367; $[\bullet]_4$ *Sur les colorations des graphes orientés,* Boll. Un. Mat. Ital. (5) **16**-1 (1979), 517-522.

Sommario

Viene studiato il problema delle colorazioni semplici e generalizzate e delle pluricolorazioni per le cliques private di un certo numero di cicli hamiltoniani. Successivamente viene studiato il problema delle colorazioni semplici e generalizzate di alcuni grafi regolari.

* * *