Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 465-471

Enzo Maria Li Marzi (*)

Sul rango del modulo delle derivazioni in caratteristica positiva (**)

Introduzione

Nel presente lavoro si generalizza un risultato, ottenuto da H. Matsumura $[\mathbf{4}]_3$, relativo al rango del modulo delle derivazioni di un dominio locale noetheriano A contenente un campo k di caratteristica $p > 0$.

Si dimostra che, sotto certe condizioni, è possibile immergere $\mathrm{Der}_{k_\lambda}(A)$ in un A-modulo libero, con A non necessariamente integro e k_λ opportunamente scelto in una famiglia di sottocampi cofiniti di k.

Utilizzando, quindi, una opportuna definizione di rango, $\varrho(M)$, di un modulo M su un anello A non necessariamente integro, ma immergibile in un A-modulo libero, [**5**], si estende il risultato di Matsumura al caso A non integro.

Precisamente, proviamo che, se $(A, \mathfrak{m}, k_A)$ è un anello locale contenente un campo k di caratteristica $p > 0$, tale che $\hat{A} = \mathfrak{m}$-adico completamento di A sia ridotto, $\mathrm{rank}_{k_A}\Omega_{k_A/k} < \infty$ e $\mathrm{rank}_{k_A}\gamma_{k_A/k} < \infty$, dove $\gamma_{k_A/k}$ è il modulo di imperfezione di k_A su k, allora vale la seguente limitazione

$$\varrho(\mathrm{Der}_{k_\lambda}(A)) \leqslant \dim(A) + \mathrm{rank}\,\mathrm{Der}_{k_\lambda}(k_A)\,.$$

Tutti gli anelli considerati sono commutativi con identità e noetheriani.

1 - Siano A un anello integro, $\Phi(A)$ il suo corpo delle frazioni ed M un A-modulo. È noto che si definisce rango di M la dimensione del $\Phi(A)$-spazio vettoriale $M \otimes_A \Phi(A)$ (cfr. $[\mathbf{4}]_1$).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Via C. Battisti 90, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 26-X-1982.

Nel caso in cui A non è necessariamente integro e tuttavia M è immergibile in un A-modulo libero, esiste una definizione di rango di M (denotato con $\varrho(M)$) che coincide con la definizione nota nel caso A integro e che richiamiamo.

Def. Si dice *rango* di M (e si denota con $\varrho(M)$) il massimo numero di elementi di M linearmente indipendenti.

Se $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, a_s = (a_{s1}, \ldots, a_{sm})$ sono elementi di un A-modulo libero A^m, chiamiamo *matrice associata* ad $a_1, \ldots, a_s$ la matrice seguente

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{sm} \end{pmatrix}.$$

Sia ora B una matrice del tipo $m \times s$ a elementi in A. Indichiamo con I_r l'ideale di A generato da tutti i minori di ordine r di B.

Prop. ([**3**], lemma pag. 889) *Siano A un anello e $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, a_s = (a_{s1}, \ldots, a_{sm})$ elementi dell'A-modulo libero A^m, $s \leqslant m$. Se B è la matrice associata ad $a_1, \ldots, a_s$ ed I_s è l'ideale di A generato da tutti i minori di ordine s di B, sono condizioni equivalenti*: (1) *$a_1, \ldots, a_s$ sono linearmente indipendenti su A*; (2) *Ann* $(I_s) = (0)$.

Un sottocampo k' di k è detto *cofinito* se $[k : k'] < \infty$. Siano k un campo e $F = \{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di sottocampi di k. F è detta *diretta verso sotto* se $\forall \alpha, \beta \in I$, esiste $\gamma \in I$ tale che $k_\gamma \subset k_\alpha \cap k_\beta$.

Sia ora $(A, \mathfrak{m}, k_A)$ un anello locale contenente un corpo k di caratteristica $p > 0$. Sia $\{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di sottocampi cofiniti di k contenenti k^p, diretta verso sotto, e tali che $\cap k_\alpha = k^p$.

Dato un campo k, si può sempre costruire una tale famiglia fissando una p-base B e aggiungendo complementari di sottoinsiemi finiti di B a k^p. A noi interessa immergere $\mathrm{Der}_{k_\alpha}(A)$, con α opportuno, in un A-modulo libero, nell'ipotesi k_A non necessariamente separabile algebrico su k, nel qual caso la immersione si prova facilmente (cfr. $[\mathbf{4}]_2$, osservazione pag. 7), con $k_\alpha = k_A$. Se indichiamo con Ω_k e Ω_{k_A} i moduli dei differenziali assoluti di k e k_A rispettivamente, si ricorda che il nucleo dell'applicazione naturale $\Omega_k \otimes_k k_A \to \Omega_{k_A}$ è denotato con $\gamma_{k_A/k}$ ed è detto il *modulo di imperfezione* di k_A su k ([**2**], $\mathrm{O_{IV}}$, (20.6.1.)). Se (e solo se) k_A è separabile su k risulta $\gamma_{k_A/k} = 0$ e se k_A è finitamente generato su k allora $\mathrm{rank}_{k_A} \gamma_{k_A/k} < \infty$ ([**2**], $\mathrm{O_{IV}}$, (21.7.1)).

Premettiamo il seguente

Lemma 1. *Sia $(A, \mathfrak{m}, k_A)$ un anello locale contenente un corpo k di carat-*

teristica $p > 0$ *tale che*

$$(1)\quad \operatorname{rank}_{k_A} \Omega_{k_A/k} < \infty, \qquad (2)\quad \operatorname{rank}_{k_A} \gamma_{k_A/k} < \infty .$$

Sia $\{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una famiglia di sottocampi cofiniti di* k, *diretta verso sotto e tale che* $\cap\, k_\alpha = k^p$. *Allora esistono un campo* K *dei coefficienti di* $\hat{A}$, *un sottoinsieme* Λ *di* I *ed una famiglia* $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *di sottocampi cofiniti di* K, *diretta verso sotto, e con* $\cap\, K_\lambda = K^p$, *tali che* $\operatorname{Der}_{k_\lambda}(A) = \operatorname{Der}_{K_\lambda}(A)$, *per ogni* $\lambda \in \Lambda$, *dove con* $\operatorname{Der}_{K_\lambda}(A)$ *si indica il sottomodulo su* A *delle derivazioni di* A *che estese ad* $\hat{A}$, *si annullano su* K_λ.

Dim. Consideriamo l'applicazione canonica

$$\varphi \colon \Omega_k \otimes k_A \to \Omega_{k_A} .$$

Sia $\Sigma = \{u_i\}_{i \in J}$ una p-base di k (su k^p). Risulta allora che $d(\Sigma) = \{du_i\}_{i \in J}$ è una base del modulo dei differenziali assoluti Ω_k. Consideriamo il modulo di imperfezione di k_A su k, $\gamma_{k_A/k} = \operatorname{Ker} \varphi$. Poichè $\operatorname{rank}_{k_A} \gamma_{k_A/k}$ è finito, si vede facilmente che esiste un sottoinsieme finito Σ_0 di Σ tale che, posto $\Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_0$, $k' = k_0(\Sigma_1)$, k_0 campo primo in k, risulti $\gamma_{k_A/k'} = 0$, cioè k_A separabile su k'. Ne segue che il completamento $\hat{A}$ di A contiene un corpo dei coefficienti $K \simeq k_A$ e contenente k' ([**4**]$_4$, Theorem 60).

Dalla successione esatta ([**4**]$_4$, Theorem 57)

$$0 \to \Omega_{k'} \otimes K \to \Omega_K \to \Omega_{K/k'} \to 0$$

si ha che gli elementi du_i, $u_i \in \Sigma_1$, che sono linearmente indipendenti in $\Omega_{k'}$, sono ancora linearmente indipendenti in Ω_K. Ne segue che Σ_1, che è un insieme p-indipendente in k', è pure p-indipendente in K. Infine, poichè $\operatorname{rank}_{k_A} \Omega_{k_A/k}$ è finito, si ha $[K : kK^p] < \infty$, ma essendo $kK^p = K^p(\Sigma)$ finito su $K^p(\Sigma_1)$ segue $[K : K^p(\Sigma_1)] < \infty$.

Sia ora $\{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la famiglia di sottocampi cofiniti di k, diretta verso sotto, costruita a partire da Σ aggiungendo complementari di sottoinsiemi finiti di Σ a k^p.

Se Λ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di Σ_1 e se noi poniamo per ogni $\lambda \in \Lambda$: $K_\lambda = K^p(\Sigma_1 - \lambda)$, $k_\lambda = k^p(\Sigma_1 - \lambda)$, si ha

$$\cap\, K_\lambda = K^p, \qquad \cap\, k_\lambda = k^p, \ \operatorname{Der}_{k_\lambda}(A) = \operatorname{Der}_{K_\lambda}(A) .$$

Siamo adesso in grado di provare il seguente

Teorema 1. *Sia* $(A, \mathfrak{m}, k_A)$ *un anello locale contenente un corpo* k *di caratteristica* $p > 0$. *Supponiamo che*

$$(1) \quad \operatorname{rank}_{k_A} \Omega_{k_A/k} < \infty, \qquad (2) \quad \operatorname{rank}_{k_A} \gamma_{k_A/k} < \infty .$$

Sia $\{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una famiglia di sottocampi cofiniti di* k, *diretta verso sotto e tale che* $\cap\, k_\alpha = k^p$. *Allora esiste un sottoinsieme* Λ *di* I *tale che per ogni* $\lambda \in \Lambda$ *si abbia* $\operatorname{Der}_{k_\lambda}(A)$ *si immerge in un* A*-modulo libero di rango* $n = \operatorname{Dim}(A) + \operatorname{rank}_{k_A} \Omega_{k_A/k}$, *dove* $\operatorname{Dim}(A)$ *è la dimensione di immersione di* A.

Dim. Sia $(y_1, \ldots, y_m)$ una base minimale di $\mathfrak{m}$, cioè $m = \operatorname{Dim}(A)$. Sia K il campo dei coefficienti di cui al Lemma 1 e sia $\lambda \in \Lambda$ un indice tale che $\operatorname{Der}_{k_\lambda}(A) = \operatorname{Der}_{K_\lambda}(A)$.

Supponiamo $[K : K_\lambda] = p^s$ e sia $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s$ una *p-base* di K su K_λ. Consideriamo delle controimmagini $u_1, \ldots, u_s$ di $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s$ in A. Sia Ψ la seguente applicazione

$$\Psi : D \in \operatorname{Der}_{k_\lambda}(A) \to (Du_1, \ldots, Du_s, Dy_1, \ldots, Dy_m) \in A^{s+m} .$$

Supponiamo $Du_1 = \ldots = Du_s = Dy_1 = \ldots = Dy_m = 0$. L'ideale $\mathfrak{m}$ è differenziabile rispetto a D, ossia D è una derivata di $A/\mathfrak{m}$. Inoltre $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s \in A/\mathfrak{m}$ e quindi $D(\bar{u}_i) = \overline{D(u_i)} = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Si osserva, inoltre, che $\hat{A} = K[[y_1, \ldots, y_m]]$ e quindi ogni $a \in \hat{A}$ è della forma $a = \Sigma a_{j_1 \ldots j_m} y^{j_1} \ldots y^{j_m}$, $a_{j_1 \ldots j_m} \in K$. Poichè $K = K_\lambda(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s)$, estendendo D ad $\hat{A}$ risulta $D(a) = 0$. L'applicazione Ψ è iniettiva e pertanto $\operatorname{Der}_{k_\lambda}(A)$ è immergibile in un A-modulo libero di dimensione $\operatorname{Dim}(A) + s$.

2 – Nel presente paragrafo ci proponiamo di trovare una limitazione del rango del modulo delle derivazioni di un anello locale A contenente un campo k di caratteristica $p > 0$, nel caso in cui A non è necessariamente integro, in connessione con la dimensione di Krull dell'anello denotata con $\dim(A)$.

Ricordiamo che, nel caso in cui A è un dominio, si ha il seguente risultato.

Teorema 2. ([4]$_3$, Theorem 13) *Sia* $(A, \mathfrak{m}, k_A)$ *un dominio locale noetheriano contenente un campo* k *di caratteristica* p *tale che il campo residuo* k_A *sia separabile su* k *e* $\operatorname{rank} \operatorname{Der}_k(k_A) < \infty$. *Supponiamo che il completamento* $\hat{A}$ *di* A *sia ridotto. Allora esiste un sottocampo cofinito* k' *di* k, *contenente* k^p, *tale che,* *per ogni sottocampo cofinito* k'' *di* k', *si abbia* $\operatorname{rank} \operatorname{Der}_{k''}(A) \leqslant \dim(A) + \operatorname{rank} \operatorname{Der}_{k''}(k_A)$.

Allo scopo di valutare tale rango noi ci avvarremo del seguente risultato, deducibile dal criterio Jacobiano di Nagata.

Teorema 3. ([4]$_3$, Theorem 12) *Sia* k *un campo di caratteristica* $p > 0$. $R = k[[X_1, \ldots, X_n]]$, *e sia* P *un ideale primo di* R. *Sia* $\{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una famiglia di sottocampi cofiniti di* k, *diretta verso sotto, tale che* $\cap\, k_\alpha = k^p$. *Allora esiste un indice* α *tale che, per ogni sottocampo cofinito* k' *di* k_α *contenente* k^p, *si abbia* $\operatorname{rank} \operatorname{Der}_{k'}(R/P) = \dim(R/P) + \operatorname{rank} \operatorname{Der}_{k'}(k)$.

Teorema 4. *Sia* $(A, \mathfrak{m}, k_A)$ *un anello locale contenente un campo* k *di caratteristica* $p > 0$. *Supponiamo che*

(1) $\operatorname{rank}_{k_A} \Omega_{k_A/k} < \infty$, (2) $\operatorname{rank}_{k_A} \gamma_{K_A/k} < \infty$, (3) $\hat{A}$ *sia ridotto*.

Sia $\{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una famiglia di sottocampi cofiniti di* k, *diretta verso sotto e tale che* $\cap\, k_\alpha = k^p$. *Allora esiste un sottoinsieme* Λ *di* I *tale che per ogni* $\lambda \in \Lambda$ *si abbia* $\varrho(\operatorname{Der}_{k_\lambda}(A)) \leqslant \operatorname{rank} \operatorname{Der}_{K_\lambda}(\hat{A}/P^*)$, *dove* P^* *è un qualunque primo minimale di* $\hat{A}$.

Dim. Sia λ un indice tale che $\operatorname{Der}_{k_\lambda}(A)$ si possa immergere in un A-modulo libero (Teorema 1). Sia P^* un qualunque primo minimale di $\hat{A}$, poichè P^* è differenziabile ([4]$_3$, Lemma 5) ogni derivazione $D \in \operatorname{Der}_{k_\lambda}(A)$ estesa ad $\hat{A}$ induce una derivazione $D^* \in \operatorname{Der}_{K_\lambda}(\hat{A}/P^*)$.

Sia $\psi\colon \operatorname{Der}_{k_\lambda}(A) \hookrightarrow A^{s+m}$ l'omomorfismo iniettivo così definito

$$\psi(D) = (Du_1, \ldots, Du_s, Dy_1, \ldots, Dy_m) \in A^{s+m},$$

dove $u_1, \ldots, u_s$ e $y_1, \ldots, y_m$ sono quelli del Teorema 1.

Consideriamo l'omomorfismo $\psi^*\colon \operatorname{Der}_{K_\lambda}(\hat{A}/P^*) \to (\hat{A}/P^*)^{s+m}$ così definito

$$\psi^*(D^*) = (D^*u_1^*, \ldots, D^*u_s^*, D^*y_1^*, \ldots, D^*y_m^*) \in (\hat{A}/P^*)^{s+m},$$

dove $u_1^*, \ldots, u_s^*, y_1^*, \ldots, y_m^*$ sono le immagini di $u_1, \ldots, u_s, y_1, \ldots, y_m$ in $\hat{A}/P^*$. È facile verificare, con ragionamenti analoghi a quelli del Teorema 1, che l'omomorfismo ψ^* è iniettivo e che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Der}_{k_\lambda}(A) & \hookrightarrow & A^{s+m} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \operatorname{Der}_{K_\lambda}(\hat{A}/P^*) & \hookrightarrow & (\hat{A}/P^*)^{s+m}. \end{array}$$

Se $D_1, \ldots, D_r$ sono linearmente indipendenti in $\mathrm{Der}_{k_\lambda}(A)$, allora $\mathrm{Ann}(I_r) = 0$. Pertanto esiste $x \in I_r$ non zero divisore in A e quindi non zero divisore in $\hat{A}$. Sia x^* l'immagine di x in $\hat{A}/P^*$, $x^* \in I_r^*$ è non zero divisore in $\hat{A}/P^*$; ne segue $\mathrm{Ann}(I_r^*) = 0$ e cioè $D_1^*, \ldots, D_r^*$ sono linearmente indipendenti in $\mathrm{Der}_{K_\lambda}(\hat{A}/P^*)$.

Teorema 5. *Sia $(A, \mathfrak{m}, k_A)$ un anello locale contenente un corpo k di caratteristica $p > 0$. Supponiamo che*

(1) $\mathrm{rank}_{k_A} \Omega_{k_A/k} < \infty$, (2) $\mathrm{rank}_{k_A} \gamma_{k_A/k} < \infty$; (3) *$\hat{A}$ sia ridotto*.

Sia $\{k_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di sottocampi cofiniti di k, diretta verso sotto e tale che $\cap\, k_\alpha = k^p$. Allora esiste un sottoinsieme Λ di I tale che per ogni $\lambda \in \Lambda$ si abbia

$$\varrho(\mathrm{Der}_{k_\lambda}(A)) \leqslant \dim(A) + \mathrm{rank}\, \mathrm{Der}_{k_\lambda}(k_A) .$$

Dim. Consideriamo un primo minimale P di $\hat{A}$. Dal Teorema 4 per ogni $\lambda \in \Lambda$ si ha

$$\varrho(\mathrm{Der}_{k_\lambda}(A)) \leqslant \mathrm{rank}\, \mathrm{Der}_{K_\lambda}(\hat{A}/P) .$$

D'altra parte si ha $\dim(\hat{A}/P) \leqslant \dim(\hat{A}) = \dim(A)$, perciò noi possiamo rimpiazzare A con $\hat{A}/P$ ed assumere che A sia un dominio locale completo. Allora se K è il corpo dei coefficienti di $\hat{A}$, di cui al Lemma 1, A è della forma $A = K[[X_1, \ldots, X_n]]/I$, dove I è un ideale primo.

Quindi, per $\lambda \in \Lambda$, grazie al Teorema 3, si ha $\mathrm{rank}\, \mathrm{Der}_{K_\lambda}(A) = \dim(A) + \mathrm{rank}\, \mathrm{Der}_{K_\lambda}(K)$, da cui segue l'asserto.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, ch. 2, Hermann, Paris 1955.

[2] A. Grothendieck et J. A. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique*, ch. IV, Publ. Math., Institut Hautes Études Sc., Paris, n. 20-24 (1964-65).

[3] J. Lipman, *Free derivation modules on algebraic varieties*, Amer. J. Math. **87** (1965), 874-898.

[4] H. Matsumura: [•]$_1$ *Formal power series rings over polinomial rings* (I). *Number theory algebraic geometry and commutative algebra in honour of Y. Aizuki*, Tokio 1973; [•]$_2$ *Criteri jacobiani*, Quaderni del CNR (1975); [•]$_3$ *Noetherian rings with many derivations*, Contributions to Algebra dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press, Inc., New York (1977), 279-294; [•]$_4$ *Commutative Algebra*, Benjamin, New York 1970.

[5] S. MOLINELLI, *Sul rango del modulo delle derivazioni di un anello non integro*, Rend. Circ. Mat. Palermo **25** (1976), 31-42.

[6] G. RESTUCCIA, *Sul rango del modulo delle derivazioni di un anello in caratteristica diseguale*, Rend. Sem. Mat. Fis. Univ. Pol. Torino **36** (1977-78), 449-462.

Summary

In this paper we present an extension, to the case A reduced, of a result, obtained by Matsumura [**4**]$_3$, *on the rank of the module of derivations from A to A, where A is a noetherian local domain, containing a field k of characteristic $p > 0$.*

* * *