

MARIA ANTONIETTA BARATTA (\*)

## Funzioni olomorfe, antiolomorfe e trasformazioni puntuali nel piano (\*\*)

### 1 - Introduzione

Sia  $f$  un'applicazione olomorfa, antiolomorfa in  $\mathbf{C}$  ed  $F$  la corrispondente applicazione nel piano di Gauss  $\mathbf{R}^2$ . Se  $f$  ha derivata, antiderivata diversa da zero in  $z$ ,  $F$  è una trasformazione puntuale relativa al punto corrispondente  $x$ .

In questo lavoro, dopo aver precisato che in  $x$  due delle rette caratteristiche della trasformazione  $F$  coincidono con le rette isotrope (Teorema 1), viene segnalata una proprietà della terza retta caratteristica in relazione ad una coppia di curve per  $x$  intrinsecamente associata all'applicazione  $f$  (Teorema 2).

### 2 - Premesse

Sia  $\mathbf{C}$  l'insieme dei numeri complessi,  $\mathbf{R}^2$  il piano reale e  $\beta$  l'applicazione canonica di  $\mathbf{C}$  su  $\mathbf{R}^2$  che associa all'elemento  $z = x^1 + ix^2$  ( $x^j \in \mathbf{R}$ ) l'elemento  $x = (x^1, x^2)$  di  $\mathbf{R}^2$ .

Siano poi  $A$  un aperto di  $\mathbf{C}$  <sup>(1)</sup> ed  $f$  un'applicazione di  $A$  in  $\mathbf{C}$ .

Ad  $f$  è associata biunivocamente l'applicazione  $F = \beta \circ f \circ \beta^{-1}$  dell'aperto  $\beta(A)$  di  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}^2$ . In altri termini, se  $w = f(z)$  è una funzione complessa della variabile complessa  $z$  definita in  $A$ , l'applicazione  $F$ , definita in  $\beta(A)$  è rappresentata da

$$(1) \quad y^j = y^j(x^1, x^2) \quad (j = 1, 2).$$

(\*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito del progetto « Geometria delle varietà differenziabili » finanziato dal Ministero Pubblica Istruzione. — Ricevuto: 15-XII-1982.

(1) La topologia di  $\mathbf{C}$  è l'immagine della topologia euclidea di  $\mathbf{R}^2$  mediante l'applicazione  $\beta^{-1}$ .

Sia ora  $f$  di classe reale  $C^2$  in  $A$  <sup>(2)</sup> e sia  $\overset{\circ}{x}$  un punto di  $A$ . Allora in un intorno di  $\overset{\circ}{x} = \beta(\overset{\circ}{z})$  l'applicazione  $F$  è rappresentata da

$$(2) \quad y^j = a_0^j + a_h^j(x^h - \overset{\circ}{x}^h) + a_{hk}^j(x^h - \overset{\circ}{x}^h)(x^k - \overset{\circ}{x}^k) + R^j \text{ (3)},$$

dove le derivate

$$(3) \quad a_h^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^h}, \quad a_{hk}^j = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^h \partial x^k},$$

si intendono calcolate in  $\overset{\circ}{x}$  ed  $R^j$  è un infinitesimo di ordine superiore a 2 rispetto alla distanza euclidea di  $x$  da  $\overset{\circ}{x}$ .

In particolare, se il determinante della matrice jacobiana  $J = (a_h^j)$  della  $F$  è diverso da zero in  $\overset{\circ}{x}$ , l'applicazione  $F$  è una *trasformazione puntuale regolare* negli intorni dei punti corrispondenti  $\overset{\circ}{x} = (\overset{\circ}{x}^1, \overset{\circ}{x}^2)$ ,  $F(\overset{\circ}{x}) = (a_0^1, a_0^2)$  <sup>(4)</sup>.

È ben noto che si dicono *rette caratteristiche* di  $F$  relative alla coppia  $(\overset{\circ}{x}, F(\overset{\circ}{x}))$  le rette per  $\overset{\circ}{x}$  che sono mutate da  $F$  in curve aventi in  $F(\overset{\circ}{x})$  un flesso.

L'equazione complessiva delle rette caratteristiche è <sup>(5)</sup>

$$(4) \quad (a_{hk}^1 a_r^2 - a_{hk}^2 a_r^1)(x^h - \overset{\circ}{x}^h)(x^k - \overset{\circ}{x}^k)(x^r - \overset{\circ}{x}^r) = 0.$$

Posto

$$(5) \quad A_{hkr} = a_{hk}^1 a_r^2 - a_{hk}^2 a_r^1, \quad X^j = x^j - \overset{\circ}{x}^j,$$

la (4) diviene

$$(6) \quad A_{hkr} X^h X^k X^r = 0,$$

con  $A_{hkr} = A_{khr}$ . Sia ora  $y(x^1, x^2)$  una funzione di classe  $C^2$  definita in un aperto  $\beta(A)$  di  $\mathbf{R}^2$  ed  $\overset{\circ}{x}$  un punto di  $\beta(A)$ . Si consideri la *curva di livello*  $L$  di equazione

$$(7) \quad y(x^1, x^2) = y(\overset{\circ}{x}^1, \overset{\circ}{x}^2),$$

e sia  $L$  regolare in  $\overset{\circ}{x}$ .

<sup>(2)</sup> Si dice che  $f$  è di classe reale  $C^r$  in  $A$  ( $r = 0, 1, \dots, \infty, \omega$ ), se e solo se le  $y^j$  sono di classe  $C^r$  in  $\beta(A)$ .

<sup>(3)</sup> Nel lavoro si fa uso della convenzione di Einstein e gli indici assumono i valori 1, 2.

<sup>(4)</sup> Ved. p. es. M. Villa [3], p. 55.

<sup>(5)</sup> Ved. p. es. M. Villa [3], p. 57, 58.

È utile nel seguito la *formula*

$$(8) \quad c = \left| \frac{a_1 a_1 a_{22} + a_2 a_2 a_{11} - 2a_1 a_2 a_{12}}{(a_1 a_1 + a_2 a_2)^{3/2}} \right|,$$

che esprime la *curvatura*  $c$  di  $L$  nel punto  $x$  <sup>(6)</sup>, (7).

Introdotta la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

risulta

$$(9) \quad c = \left| \frac{\det H}{(\det JJ^T)^{3/2}} \right|,$$

dove  $J$  è la matrice jacobiana della funzione  $y(x^1, x^2)$  in  $x$  e  $T$  indica trasposizione.

In particolare, intervengono nel seguito le curve  $L_j$  di equazioni

$$(10) \quad y^j = y^j(x^1, x^2),$$

che si possono chiamare *curve di livello associate alla funzione complessa*  $f$ , passanti per  $x$ .

Convieni notare che, utilizzando il coniugio, le curve  $L_1, L_2$  possono anche essere definite in modo intrinseco, indipendente cioè dalle coordinate introdotte nel piano.

### 3 - Funzioni oloomorfe, funzioni antioloomorfe

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbf{C}$ ,  $z_0$  un punto di  $A$ . Sia poi  $w = f(z)$  una *funzione oloomorfa, antioloomorfa* in  $A$  con derivata  $f'(z)$ , antiderivata  $'f(z)$ , diversa da zero in  $z_0$ , rispettivamente.

<sup>(6)</sup> Come nella (3), le  $a_h$  e le  $a_{hk}$  indicano derivate prime e seconde della funzione  $y(x^1, x^2)$  valutata in  $x$ .

<sup>(7)</sup> Alla (8) si perviene derivando due volte l'equazione (7) di  $L$  rispetto all'ascissa curvilinea  $s$ . È allora possibile esprimere le derivate  $dx^j/ds$ ,  $d^2x^j/ds^2$  in  $x$  in funzione delle  $a_h, a_{hk}$ , ciò che consente di utilizzare la nota espressione della curvatura.

Le condizioni di Cauchy-Riemann nel punto  $x$  di  $\beta(A)$  si scrivono

$$(11) \quad a_1^1 = \varepsilon a_2^2, \quad a_2^1 = -\varepsilon a_1^2,$$

con  $\varepsilon = +1$  nel primo caso,  $\varepsilon = -1$  nel secondo.

Poichè, rispettivamente risulta

$$|f'(z)|^2 = \det J, \quad |f'(z)|^2 = -\det J \quad (8),$$

l'ipotesi sulla derivata, antiderivata di  $f$  assicura che il determinante della matrice jacobiana  $J = (a_h^j)$  è diverso da zero.

Derivando le condizioni di Cauchy-Riemann e valutando le derivate in  $x$ , si perviene poi alle

$$(12) \quad a_{11}^1 = \varepsilon a_{12}^2 = -a_{22}^1, \quad a_{11}^2 = -\varepsilon a_{12}^1 = -a_{22}^2.$$

#### 4 - Teoremi sulle rette caratteristiche

Le premesse di 2, 3 consentono ora di enunciare alcuni risultati.

**Teorema 1.** *Se  $f$  è olomorfa, antiolomorfa in  $A$ ,  $z$  è un punto di  $A$ ,  $f'(z) \neq 0$ ,  $'f(z) \neq 0$  allora le rette caratteristiche dell'applicazione  $F$ , pensata come trasformazione puntuale relativa ai punti  $x = \beta(z)$ ,  $F(x)$ , sono le rette isotrope uscenti da  $x$  e la retta  $k$  di equazione*

$$(13) \quad A_{111}X^1 + A_{222}X^2 = 0.$$

**Teorema 2.** *Nelle ipotesi precedenti, indicate con  $t_1, t_2$  le tangenti in  $x$  alle curve di livello  $L_1, L_2$  associate ad  $f$ , con  $b$  una qualunque delle bisettrici della coppia  $(t_1, t_2)$ , con  $r_1, r_2$  i raggi di curvatura di  $L_1, L_2$  in  $x$ , per la retta caratteristica  $k$  risulta*

$$(14) \quad (t_1 t_2 b k)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Prima di passare alle dimostrazioni (n. 5), conviene osservare che, nel Teorema 1, la proprietà relativa alle rette isotrope può anche essere dedotta tenendo presente il classico risultato, che lega le funzioni olomorfe, antiolomorfe

---

(8) Cfr. p. es. G. Fichera e L. De Vito [2], p. 564.

e le trasformazioni conformi nel piano, ed una nota proprietà di queste trasformazioni <sup>(9)</sup>.

Il Teorema 2 riguarda invece la terza retta caratteristica e mostra come essa sia legata alla curvatura delle linee  $L_1$ ,  $L_2$  intrinsecamente associate alla funzione  $f$ .

Convienne infine osservare che le ipotesi del Teorema 1 non escludono che sia  $A_{111} = A_{222} = 0$ . In questo caso la retta  $k$  risulta indeterminata e nel Teorema 2 i membri della (14) riescono entrambi indeterminati. Questa circostanza si presenta se e solo se la derivata, l'antiderivata seconda di  $f$  si annulla in  $z$  rispettivamente.

## 5 - Dimostrazioni

Per stabilire il Teorema 1, basta notare che dalle (11), (12) segue

$$(15) \quad A_{111} - A_{221} - 2A_{122} = 0, \quad A_{222} - A_{112} - 2A_{121} = 0,$$

onde la (6) diviene

$$(16) \quad (A_{111}X^1 + A_{222}X^2)(X^1X^1 + X^2X^2) = 0,$$

da cui deriva immediatamente la tesi.

Per dimostrare il Teorema 2, conviene osservare che, in virtù delle (11), le rette  $t_1$ ,  $t_2$  tangenti in  $x$  alle linee  $L_1$ ,  $L_2$  hanno equazioni

$$(17) \quad a_1^1 X^1 + a_2^1 X^2 = 0, \quad a_2^1 X^1 - a_1^1 X^2 = 0,$$

onde le curve di livello associate ad  $f$  passanti per  $x$  risultano ortogonali. Le bisettrici  $b_1$ ,  $b_2$  della coppia  $(t_1, t_2)$  sono

$$(18) \quad (a_1^1 \mp a_2^1)x^1 + (a_2^1 \pm a_1^1)x^2 = 0,$$

dove vanno scelti rispettivamente i segni superiori o gli inferiori.

Ciò premesso, assunta come coordinata proiettiva nel fascio di centro  $x$  la

---

<sup>(9)</sup> Ved. E. Bompiani [I], p. 141.

coordinata tangente cambiata di segno, risulta

$$(19) \quad (t_1, t_2, b, k)^2 = \left( \frac{a_1^1}{a_2^1}, -\frac{a_2^1}{a_1^1}, \frac{a_1^1 \mp a_2^1}{a_2^1 \pm a_1^1}, \frac{A_{111}}{A_{222}} \right)^2,$$

con la consueta avvertenza riguardo ai segni <sup>(10)</sup>.

Ora si prova facilmente che

$$\left( \frac{a_1^1}{a_2^1}, -\frac{a_2^1}{a_1^1}, \frac{a_1^1 \mp a_2^1}{a_2^1 \pm a_1^1} \right) = \left( \frac{a_1^1}{a_2^1} \right)^2,$$

e che

$$\left( \frac{a_1^1}{a_2^1}, -\frac{a_2^1}{a_1^1}, \frac{A_{111}}{A_{222}} \right)^2 = \left( \frac{a_2^1 A_{111} - a_1^1 A_{222}}{a_1^1 A_{111} + a_2^1 A_{222}} \right)^2 \left( \frac{a_1^1}{a_2^1} \right)^2,$$

onde

$$(20) \quad (t_1, t_2, b, k)^2 = \left( \frac{a_1^1 A_{111} + a_2^1 A_{222}}{a_2^1 A_{111} - a_1^1 A_{222}} \right)^2.$$

D'altra parte in virtù della (8), (11), (12) si può scrivere

$$(21) \quad \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{(a_2^1 a_2^1 a_{12}^1 - a_1^1 a_1^1 a_{12}^1 + a_1^1 a_2^1 a_{11}^1 - a_1^1 a_2^1 a_{22}^1)^2}{(a_1^1 a_1^1 a_{22}^1 + a_2^1 a_2^1 a_{11}^1 - a_1^1 a_2^1 a_{12}^1 - a_1^1 a_2^1 a_{12}^1)^2}.$$

Dalla (5)<sub>1</sub>, tenendo presenti le (11), (12), risulta poi

$$A_{111} = \varepsilon(a_1^1 a_{12}^1 - a_2^1 a_{11}^1), \quad A_{222} = \varepsilon(a_1^1 a_{22}^1 - a_2^1 a_{12}^1).$$

È facile ora riconoscere che i secondi membri delle (20), (21) sono uguali e quindi il Teorema 2 è dimostrato.

### Bibliografia

- [1] E. BOMPIANI, *Caratteri differenziali della trasformazione conforme*, Rend. Mat. Roma **3** (1942), 141.

---

<sup>(10)</sup> L'ipotesi sulla derivata, sulla antiderivata assicura che i primi tre rapporti a secondo membro non sono indeterminati e risultano distinti.

- [2] G. FICHERA e L. DE VITO, *Funzioni analitiche di una varietà complessa*, Veschi, Roma.
- [3] M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari; nota I, Intorno del secondo ordine*, Rend. Acc. Naz. Lincei 4 (1948), 57-58.

### Summary

Let  $f$  be a holomorphic, anti-holomorphic function at point  $z_0$  of  $\mathbf{C}$  and  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ . Then the corresponding map  $F$  in the Gauss plane  $\mathbf{R}^2$  can be regarded as a point transformation at point  $x_0$ . We give a geometric property of the characteristic real line of  $F$  at  $x_0$ , involving the curvatures of a pair of curves through  $x_0$  intrinsically associated to  $f$ .

\*\*\*

