Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 1-5

GIORDANO GALLINA (*)

Su certe relazioni di equivalenza nei quasi-anelli (**)

Introduzione

In tutto il lavoro, N indicherà un quasi-anello (sinistro, in cui cioè il prodotto è distributivo a sinistra rispetto alla somma). Per $a \in N$, indichiamo con S_a la relazione di equivalenza su N definita da xS_ay se e solo se $xa = ya$. Migliorini e Szep, in un semigruppo moltiplicativo [2], hanno studiato quando la S_a (definita ponendo xS_ay se e solo se $ax = ay$) è una congruenza.

Noi iniziamo uno studio analogo relativo ai quasi-anelli.

Per $x \in N$, indichiamo con φ_x la funzione di N a N definita dalla $\varphi_x\colon y \to xy$. Chiamiamo inoltre con $[x]_a$ la classe rappresentata da x in S_a.

Per $a, b \in N$, diciamo che S_a è più fine di $S_b (S_a \subseteq S_b)$ se, per ogni $x \in N$, $[x]_a \subseteq [x]_b$.

1 – È facile inquadrare la situazione per mezzo del

Teorema 1. *La S_a è una congruenza di N se e solo se $[0]_a$ è un ideale di N e le classi rispetto a S_a sono i suoi laterali.*

Teorema 2. *Per $a, b \in N$, sia $S_{a+b} \subseteq S_b$. Se S_a e S_b sono congruenze, anche S_{a+b} lo è.*

Per ogni $x \in N$, se $y \in [x]_{a+b}$, $x(a + b) = y(a + b)$. Tenuto conto che $S_{a+b} \subseteq S_b$, e dalla distributività, $xa + xb = ya + xb$; di qui, $xa = ya$, e $y \in [x]_a$. Pertanto, $S_{a+b} \subseteq S_a$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 23-II-1981.

Siano $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_3, x_4\rangle \in S_{a+b}$. Per l'ipotesi e per quanto visto prima, è $x_1x_3a = x_2x_4a$, $x_1x_3b = x_2x_4b$. Di qui, $x_1x_3(a+b) = x_1x_3a + x_1x_3b = x_2x_4a + x_2x_4b = x_2x_4(a+b)$, e S_{a+b} è una congruenza moltiplicativa.

Inoltre, poichè S_a e S_b sono congruenze additive, $(x_1 + x_3)a = (x_2 + x_4)a$, $(x_1 + x_3)b = (x_2 + x_4)b$; quindi, $(x_1 + x_3)(a+b) = (x_2 + x_4)(a+b)$, e S_{a+b} è una congruenza di $[N; +]$.

2 – Passiamo al caso dei quasi-anelli zero-simmetrici fortemente monogèni, i quali possano essere costruiti con il Teorema 10 di [**1**]$_2$.

Nel seguito, N sarà sempre un tale quasi-anello e Φ il gruppo delle φ_x diverse dall'endomorfismo nullo.

Teorema 3. *Se S_a è una congruenza di N, per $a \neq 0$,*

(1) *lo stabilizzante Φ_a di a in Φ è un sottogruppo normale di Φ,*

(2) *l'insieme dei divisori dello zero a sinistra di N coincide con $[0]_a$.*

(1) Per $\varphi_y \in \Phi$ esiste uno $z \in N$ tale che $\varphi_z = \varphi_y^{-1}$.

Per $\varphi_x \in \Phi_a$, è $yxa = ya$; poichè S_a è una congruenza, si ha di qui $yxza = yza$ e, per la precedente posizione, $yza = a$. Pertanto, $\varphi_y^{-1}\varphi_x\varphi_y \in \Phi_a$; di qui la (1).

La (2) discende dal fatto che N è fortemente monogeno.

Teorema 4. *Per $a \neq 0$, $a \in N$, se*

(1) *lo stabilizzante di a in Φ è un sottogruppo normale di Φ,*

(2) *la classe $[0]_a$ è un sottogruppo normale di N, coincidente con l'insieme dei divisori dello zero a sinistra di N,*

(3) *le classi di S_a sono i laterali di $[0]_a$ di N,*
allora S_a è una congruenza.

Sia $\langle x_1, x_2\rangle \in S_a$, $\langle x_3, x_4\rangle \in S_a$, e gli x_i non siano divisori dello zero a sinistra. Vuol dire che $\varphi_{x_1}\varphi_{x_2}^{-1} \in \Phi_a$, $\varphi_{x_3}\varphi_{x_4}^{-1} \in \Phi_a$. Per la normalità di Φ_a, si ha anche $\varphi_{x_2}^{-1}\varphi_{x_4}^{-1}\varphi_{x_3}\varphi_{x_1} \in \varphi_{x_2}^{-1}\Phi_a\varphi_{x_1} = \Phi_a\varphi_{x_2}^{-1}\varphi_{x_1} = \Phi_a$. Di qui, $\varphi_{x_3}\varphi_{x_1}(a) = \varphi_{x_4}\varphi_{x_2}(a)$, $\langle x_1x_3, x_2x_4\rangle \in S_a$, e S_a è una congruenza moltiplicativa. Il resto è ovvio.

Lemma 5. *Per $a \neq 0$, sia S_a una congruenza additiva. Se $N/[0]_a$ è finito, allora è abeliano elementare.*

Mostriamo anzitutto che Φ agisce sugli elementi non nulli di $N/[0]_a$ in modo transitivo. Sia infatti T una traiettoria di Φ su $N/[0]_a$, e g appartenga a un elemento T. Poichè (Teorema 3) g risulta essere un non divisore dello zero a sinistra, g appartiene a una traiettoria principale T' dell'azione di Φ su N.

Siano, per assurdo, T_1, T_2, due traiettorie dell'azione di Φ su $N/[0]_a$ e T'_1 e T'_2 due traiettorie dell'azione di Φ su N contenute rispettivamente nell'unione degli elementi di T_1, e di T_2. Essendo T'_1 e T'_2 principali, esistono elementi x_1, x_2 rispettivamente in T'_1 e T'_2, tali che $x_1 a = x_2 a$. Pertanto, $\langle x_1, x_2\rangle \in S_a$, ma x_1 e x_2 non appartengono a uno stesso laterale di $[0]_a$, il che è assurdo.

Ora il nostro enunciato è conseguenza del Teorema 11.1 di [**6**].

Teorema 6. *Una congruenza additiva S_a è una congruenza di N se e solo se l'azione di Φ su $N/[0]_a$ è priva di coincidenze non nulle.*

Sia S_a una congruenza, e siano ε e ε' le unità sinistre appartenenti rispettivamente a $\Phi(y)$, $\Phi(z)$.

Per ogni $\varphi \in \Phi$, sia $\bar{\varphi}$ l'azione indotta da φ su $N/[0]_a$. È immediato che $\bar{\varphi}_y([0]_a + \varepsilon) = [0]_a + \varphi_y(\varepsilon) = [0]_a + y$, e inoltre $\bar{\varphi}_z([0]_a + \varepsilon) = [0]_a + z$.

Se $[0]_a + y = [0]_a + z$, allora $\langle y - z, 0\rangle \in S_a$. Poichè S_a è una congruenza additiva, $\langle y, z\rangle \in S_a$. Di conseguenza, essendo S_a una congruenza, $[0]_a + yx = [0]_a + zx$ e $\bar{\varphi}_y([0]_a + x) = \bar{\varphi}_z([0]_a + x)$. Di qui, $\bar{\varphi}_y = \bar{\varphi}_z$. Questo basta per dimostrare che l'azione di Φ su $N/[0]_a$ è priva di coincidenze non nulle.

Sia viceversa l'azione di Φ su $N/[0]_a$ priva di coincidenze non nulle. Mostriamo che $[0]_a$ è un ideale di N. Proviamo innanzitutto che per ogni $x \in N$, e $i \in [0]_a$, $xi \in [0]_a$. Se x è un divisore dello zero a sinistra, $xi = 0$, mentre, se x non è un divisore dello zero a sinistra, $xi \in \Phi(i)$. Ora, l'elemento i è un divisore dello zero a sinistra (Teorema 3, punto (2)), e quindi $\Phi(i) \subseteq [0]_a$. Di qui, $xi \in [0]_a$.

Per $x, y \in N$, $i \in [0]_a$, se $x \in [0]_a$, anche $x + i \in [0]_a$, e $(x + i)y = 0 = xy$, in quanto $x + i$ e x dividono lo zero a sinistra. Di qui, $(x + i)y - xy = 0 \in [0]_a$.

Sia ora $x \notin [0]_a$. Possiamo scrivere (con le notazioni precedenti) $\bar{\varphi}_x([0]_a + \varepsilon) = [0]_a + x$, $\bar{\varphi}_{x+i}([0]_a + \varepsilon') = [0]_a + x + i = [0]_a + x$, e di qui, poichè per l'ipotesi l'azione di Φ su $N/[0]_a$ è priva di coincidenze non nulle, $\bar{\varphi}_x = \bar{\varphi}_{x+i}$. Allora $\bar{\varphi}_x([0]_a + y) = [0]_a + xy = \bar{\varphi}_{x+i}([0]_a + y) = [0]_a + (x + i)y$, e $(x + i)y - xy$ appartiene a $[0]_a$.

Ciò posto, possiamo ricordare il Teorema 1, per affermare che S_a è una congruenza.

Teorema 7. *Se S_a, per un $a \neq 0$, è una congruenza, l'insieme dei divisori dello zero a sinistra di N è il ν-radicale J_ν di N* (per $\nu = 0, 1, 2$) (1) *e N/J_ν è un quasi-corpo.*

---

(1) Secondo la terminologia di [**4**].

Tenuto conto di quanto dimostrato nel Lemma 5, $N/[0]_a$ è un quasi-corpo, per cui $J'_\nu(N/[0]_a) = [0]_a$. È $[0]_a \subseteq J_\nu$ perchè $[0]_a$ è nil. Se π è l'epimorfismo canonico di N su $N/[0]_a$, risulta $\pi(J_\nu) \subseteq J'_\nu(N/[0]_a) = [0]_a$ (Prop. 5.15 di [4]), da cui segue $J_\nu \subseteq [0]_a$, $\nu \in \{0, 1, 2\}$. Pertanto, $J_\nu = [0]_a$.

Teorema 8. *Se N è finito, e S_x è una congruenza per ogni $x \in N$, allora è planare. Se inoltre N ha ordine dispari, il suo gruppo additivo è abeliano.*

Per il Lemma 5, l'ordine di $N/[0]_a$ è della forma p^n (p primo). Pertanto, il numero delle classi di congruenza di S_a, diverse da $[0]_a$, per $a \neq 0$, è $p^n - 1$. Di conseguenza, $|\Phi(a)| = p^n - 1$. Tutte le traiettorie non nulle di Φ hanno dunque $p^n - 1$ elementi. Poichè N è fortemente monogeno, il gruppo Φ ha qualche traiettoria principale; ne segue che tutte le traiettorie di Φ sono principali. Per il Teorema 3 di $[\mathbf{1}]_3$ sussiste la prima parte dell'enunciato.

Se N ha ordine dispari, Φ, per quanto osservato, contiene un automorfismo di ordine due privo di coincidenze non nulle.

Ne segue la seconda parte dell'enunciato (Neumann [**3**]).

3 – Vediamo ora di esemplificare alcune situazioni prospettate da talune osservazioni precedenti.

Nelle ipotesi del Teorema 8, il gruppo additivo di N non è necessariamente un p-gruppo ([2]), come prova il

Teorema 10. *Se $p \neq q$ sono due numeri primi dispari, e se $p - 1 \mid q - 1$, allora esiste un quasi-anello fortemente monogeno N di ordine pq, in cui ogni S_x è una congruenza.*

Sia P un gruppo ciclico di ordine p e Q un gruppo ciclico di ordine q. Sia f_1 un generatore di $A(P)$ ([3]). Per le ipotesi, esiste un automorfismo f_2 di Q di ordine $p - 1$.

Nel prodotto diretto N di P per Q sia f l'automorfismo definito ponendo, per ogni $x \in P$, $y \in Q$, $f(x + y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Sia $[N; +, \cdot]$ il quasi-anello fortemente monogeno costruito con il metodo del Teorema 10 di $[\mathbf{1}]_2$, in cui (1) $\Phi = \langle f \rangle$, (2) l'insieme delle unità sinistre è un laterale non nullo di Q.

Il quasi-anello costruito ha le proprietà richieste.

([2]) Per il significato di questo risultato, si veda $[\mathbf{1}]_3$.

([3]) Se G è un gruppo, indichiamo con $A(G)$ l'automorfo di G,

Bibliografia

[1] G. Ferrero: $[\bullet]_1$ *Struttura degli stems p-singolari*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **7** (1966), 243-254; $[\bullet]_2$ *Classificazione e costruzione degli stems p-singolari*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. (A) **102** (1968), 597-613; $[\bullet]_3$ *Stems planari e Bib-disegni*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 79-96.

[2] F. Migliorini and J. Szép, *Equivalences, congruences and decompositions in semigroups*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 745-752.

[3] B. Neumann, *On the commutativity of the addition*, J. London Math. Soc. **15** (1940), 203-208.

[4] G. Pliz, *Near-rings*, North-Holland, Amsterdam 1977.

[5] J. J. Rotman, *The theory of groups, an introduction*, Allyn and Bacon Inc., Boston 1973.

[6] H. Wielandt, *Finite permutations groups*, Academic Press, New York and London 1964.

Summary

We determine some conditions under which certains equivalence relations on a near-ring are congruences.

* * *