Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 57-70

ANTONELLA FIACCA e CARLA LODOVICI (*)

Comportamento dei vari concetti di quasi additività rispetto a un operatore non lineare (**)

1 - Introduzione

In [**4**]$_6$ L. Cesari ha provato che se φ è una funzione (vettoriale) di insieme *quasi additiva*, rispetto alla famiglia $\mathscr{D} = \{D\}$ di sistemi finiti D e alla *mesh* δ, e a *variazione limitata*, l'integrale $\mathscr{I}(f, T, \varphi)$ di una funzione $f\colon H \times \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}$, $H \subset \boldsymbol{R}^m$, *non* necessariamente lineare, su una applicazione parametrica continua T, rispetto a φ, che può essere definito con un procedimento di passaggio al limite sulla funzione $\Phi(I) = f[p(\tau), \ \varphi(I)]$, $\tau \in I$, esiste in $\boldsymbol{R}$ poiché la Φ stessa risulta *quasi additiva* rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ (cfr. [**4**]$_6$, Teoremi (6.i) e (2.v)). La proprietà di *quasi additività* è dunque conservata dall'operatore f anche nel caso in cui quest'ultimo *non* è lineare; ciò consente di inquadrare l'integrale parametrico $\mathscr{I}(f, T, \varphi)$ nella teoria assiomatica introdotta nella prima parte di [**4**]$_6$.

L'integrale $\mathscr{I}(f, T, \varphi)$, tra l'altro, contiene, come caso particolare, il classico integrale di Weierstrass su una curva di lunghezza (di Jordan) finita e l'integrale su una superficie continua di area finita come definito da L. Cesari in [**4**]$_{1,5}$ e utilizzato nella teoria dell'area delle superfici del Calcolo delle Variazioni da vari Autori, tra cui lo stesso Cesari [**4**]$_{2,3,4}$, A. G. Sigalov [**7**]$_{1,2}$, J. M. Danskin [**5**], V. E. Bononcini [**2**]$_{1,2}$, J. Cecconi [3]$_{1,2,3}$, L. H. Turner [**8**].

Successivamente in [**1**]$_1$ A. Averna e C. Lodovici, mantenendosi nella generalità di L. Cesari, hanno introdotto per una funzione $\varphi\colon \{I\} \to \boldsymbol{R}^k$ il concetto di *quasi additività in senso debole* rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ, che contiene stretta-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Via Pascoli, 06100 Perugia, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 26-VII-1982.

mente il concetto di *quasi additività* rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ (cfr. Osservazione I di **2** di [**1**]$_1$) e che, come la *quasi additività*, assicura la esistenza in $\boldsymbol{R}^k$ dell'integrale di Burkill-Cesari della φ.

Gli stessi Autori in [**1**]$_2$ hanno poi introdotto il concetto di funzione di insieme *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$, più debole del concetto di *quasi additività* di L. Cesari, ma più stringente di quello di *quasi additività in senso debole*.

Noi qui ci siamo essenzialmente proposti di indagare se i citati concetti di *quasi additività in senso debole* e di *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ godono, come il concetto di *quasi additività* di L. Cesari, della proprietà di essere conservati quando si passa dalla funzione $\varphi\colon \{I\} \to \boldsymbol{R}^k$ alla funzione $\Phi(I) = f[p(\tau), \varphi(I)]$ attraverso l'operatore $f\colon H \times \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}$ non (necessariamente) lineare.

Abbiamo provato che, mentre la *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ della funzione φ implica la *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ della funzione Φ (anche qui supponiamo φ a *variazione limitata*, f limitata e uniformemente continua in $H \times \sigma$, $\sigma = \{q \in \boldsymbol{R}^k\colon \|q\| = 1\}$, e inoltre positivamente omogenea di grado uno rispetto a q (cfr. **3**, Teorema)), di questa stessa proprietà *non* gode la *quasi additività in senso debole* (cfr. qui Esempio I). Ciò non deve stupire ove si pensi che il concetto di *quasi additività in senso debole* è più ampio del concetto di *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$. Inoltre va tenuto presente che, sebbene i vari concetti di quasi additività qui richiamati (*quasi additività*, *quasi additività in senso debole*, *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$) assicurano tutti l'esistenza in $\boldsymbol{R}^k$ dell'integrale $(\mathscr{D})$-$\int\varphi$, il concetto di *quasi additività in senso debole* si discosta essenzialmente dagli altri (cfr. [**1**]$_1$, Introduzione e Osservazione II). A questo proposito vogliamo qui osservare che la *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$, $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$ con la condizione che la restrizione della funzione $\delta\colon D \mapsto \delta(D)$, $D \in \mathscr{D}$, alla famiglia $\mathscr{D}'$, sia ancora una *mesh*, fornisce, al variare di $\mathscr{D}'$, uno *spettro* di quasi additività, nel quale è contenuta la *quasi additività* rispetto a $\mathscr{D}$ (basta assumere $\mathscr{D}' \equiv \mathscr{D}$) ma *non* la *quasi additività in senso debole*.

Osserviamo intanto che il nostro Teorema contiene, come caso particolare, il Teorema (6.i) di [**4**]$_6$ (cfr. qui Oss. I); abbiamo provato peraltro che, senza l'ipotesi che φ sia a *variazione limitata*, la tesi in generale *non* sussiste, cosa che del resto accade per l'analogo Teorema (6.i) di L. Cesari (cfr. qui Osservazione II).

In **4** abbiamo inoltre conseguito una proposizione (cfr. Corollario) che rappresenta un criterio di integrabilità per la funzione $\Phi(I) = f[p(\tau), \varphi(I)]$, $\tau \in I$, più stringente del Teorema (6.ii) di [**4**]$_6$ (cfr. qui Osservazione III), nel senso che giungiamo all'esistenza in $\boldsymbol{R}$ dell'integrale $(\mathscr{D})$-$\int\Phi$ in ipotesi più deboli di quelle richieste da L. Cesari.

Vogliamo osservare infine, a questo proposito, che l'ipotesi (i)$'$ del nostro

Corollario *non* può essere sostituita con l'ipotesi meno stringente di *quasi additività in senso debole,* come pure la tesi del Corollario *non* sussiste in generale ove si sostituiscano le ipotesi (i)′, (ii) con quelle più deboli che φ sia integrabile rispetto a $\mathscr{D}$ e $\|\varphi\|$ *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ (cfr. qui Osservazione IV).

2 – Siano $\tilde{I}$ un insieme o uno spazio topologico, $\{I\}$ una collezione di sottoinsiemi di $\tilde{I}$, $\mathscr{D}$ una famiglia di sistemi finiti $D = [I]$, $I \in \{I\}$, soddisfacenti agli assiomi (b)′, (b)″ (cfr. [**4**]$_6$, **1**), e sia infine $\delta\colon D \mapsto \delta(D)$, $D \in \mathscr{D}$, una funzione reale che verifica agli assiomi $(\mathrm{d})_1$, $(\mathrm{d})_2$ (cfr. [**4**]$_6$, **1**).

Considerata una funzione $\varphi\colon I \mapsto \varphi(I) = \big(\varphi_1(I), \dots, \varphi_k(I)\big)$, $I \in \{I\}$, diremo che essa è *integrabile alla Burkill-Cesari* in $\tilde{I}$ rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ se esiste in $\boldsymbol{R}^k$ il limite (cfr. [**4**]$_6$, **1**) $\lim\limits_{\delta(D)\to 0} \sum\limits_{\substack{I\in D\\ D\in\mathscr{D}}} \varphi(I)$. Indicheremo con $(\mathscr{D})$-$\int\varphi$ l'integrale della φ cioè poniamo: $(\mathscr{D})\text{-}\int\varphi = \lim\limits_{\delta(D)\to 0} \sum\limits_{\substack{I\in D\\ D\in\mathscr{D}}} \varphi(I)$.

Riportiamo alcune definizioni che utilizzeremo nel seguito. La funzione φ è detta *quasi additiva* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ (cfr. [**4**]$_6$, **2**) se

(Φ) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare un altro numero* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *tale che, per ogni* $D_0 = [I] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D_0) < \eta$, *esiste un numero* $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$ *in modo che risulti*

$$(\Phi_1) \quad \sum_{I\in D_0} \Big\| \sum\nolimits^{(I)} \varphi(J) - \varphi(I) \Big\| < \varepsilon\,, \qquad\qquad (\Phi_2) \quad \sum\nolimits' \|\varphi(J)\| < \varepsilon\,,$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \lambda$, *ove* $\sum^{(I)}$ *rappresenta la somma fatta rispetto a tutti gli insiemi* $J \in D$, $J \subset I$, *mentre* $\sum'$ *rappresenta la somma fatta rispetto a tutti gli insiemi* $J \in D$, $J \not\subset I$, $I \in D_0$.

Diremo inoltre che la φ è *quasi additiva in senso debole* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ (cfr. [**1**]$_1$, **2**) se

($\tilde{\Phi}$) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare in corrispondenza un sistema finito* $D_0 = [\mathrm{I}] \in \mathscr{D}$ *e un numero* $\lambda > 0$ *in modo che risulti*

$$(\tilde{\Phi}_1) \quad \sum_{I\in D_0} \Big\| \sum\nolimits^{(I)} \varphi(J) - \varphi(I) \Big\| < \varepsilon\,, \qquad\qquad (\tilde{\Phi}_2) \quad \sum\nolimits' \|\varphi(J)\| < \varepsilon\,,$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \lambda$.

Indicata con $\mathscr{D}'$ una qualunque sottofamiglia di sistemi finiti $D \in \mathscr{D}$, soggetta alla condizione che la restrizione della funzione $\delta\colon D \mapsto \delta(D)$, $D \in \mathscr{D}$, alla famiglia $\mathscr{D}'$, risulti ancora una *mesh*, diremo che la funzione φ è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ (cfr. [**1**]$_2$, **5**) se

($\tilde{\tilde{\Phi}}$) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare un numero* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *tale che, per ogni* $D_0' = [I] \in \mathscr{D}'$ *con* $\delta(D_0') < \eta$, *esiste un altro numero* $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0') > 0$ *in modo che risulti*

$$(\tilde{\tilde{\Phi}}_1) \quad \sum_{I \in D_0'} \left\| \sum\nolimits^{(I)} \varphi(J) - \varphi(I) \right\| < \varepsilon\,, \qquad\qquad (\tilde{\tilde{\Phi}}_2) \quad \sum\nolimits' \|\varphi(J)\| < \varepsilon\,,$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \lambda$.

Data ora la varietà

$$T\colon p = p(w)\,, \qquad w \in \tilde{I}\,, \quad p = (x_1, \dots, x_m)\,, \tag{2.1}$$

definita in $\tilde{I}$ e a valori in un insieme $H \subset \boldsymbol{R}^m$, e posto

$$\omega(I) = \sup_{u,v \in I} \|p(u) - p(v)\|\,, \qquad I \in \{I\}\,, \tag{2.2}$$

$$\omega(D) = \max_{I \in D} \omega(I)\,, \qquad D \in \mathscr{D}\,, \tag{2.3}$$

supponiamo che la funzione *mesh* verifichi la seguente ipotesi

(ω) $\omega(D) \leqslant \delta(D)$ $\forall D \in \mathscr{D}$ (1).

Denotata con σ la sfera unitaria in $\boldsymbol{R}^k$, $\sigma = \{q \in \boldsymbol{R}^k\colon \|q\| = 1\}$, sia inoltre $f\colon (p, q) \mapsto f(p, q)$, $p \in H$, $q \in \boldsymbol{R}^k$, una funzione a valori reali con le proprietà

(f_1) *f è limitata e uniformemente continua in* $H \times \sigma$,
(f_2) $f(p, tq) = t f(p, q)\, \forall t \geqslant 0$, $p \in H$, $q \in \boldsymbol{R}^k$.

Fissato (arbitrariamente) un punto $\tau \in I$, $I \in \{I\}$, andiamo infine a definire la funzione di insieme

$$\Phi(I) = f[p(\tau), \varphi(I)]\,, \qquad I \in \{I\}\,. \tag{2.4}$$

L'integrale di Burkill-Cesari della funzione Φ, se esiste in $\boldsymbol{R}$, viene denotato con la scrittura $\mathscr{I}(f, T, \varphi)$ ed è detto (cfr. [4]$_6$, **6**) integrale della funzione f sulla varietà T rispetto alla funzione di insieme φ.

---

(1) Denoteremo con $(\omega)'$ l'ipotesi

$$(\omega)' \qquad \omega(D) \leqslant \delta(D) \quad \forall D \in \mathscr{D}', \quad \mathscr{D}' \subset \mathscr{D}\,,$$

più debole della condizione (ω) e che sarà da noi utilizzata più avanti in luogo della (ω).

3 – In [4]$_6$ L. Cesari ha dimostrato il seguente

Teorema (6.i). *Sia $\varphi: I \mapsto \varphi(I)$, $I \in \{I\}$, una funzione vettoriale con le proprietà*

(i) *φ è quasi additiva rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla mesh δ,*

(ii) *esiste finito l'integrale $V = (\mathscr{D})\text{-}\int \|\varphi\|$.*

Siano inoltre verificate le ipotesi (f_1), (f_2), (ω). *In queste condizioni la funzione $\Phi: I \mapsto \Phi(I)$, $I \in \{I\}$, definita in* (2.4), *è quasi additiva rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla mesh δ.*

La *quasi additività* è quindi conservata dall'operatore *non* lineare f. Qui vogliamo provare che della stessa proprietà gode la *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ. Premettiamo due lemmi, di cui, per brevità, omettiamo le dimostrazioni poiché analoghe a quelle fatte in [4]$_6$ per giungere rispettivamente ai Teoremi (3.ii) e (5.i).

Lemma I. *Se $\varphi: I \mapsto \varphi(I)$, $I \in \{I\}$, è quasi additiva rispetto alla coppia $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ e alla mesh δ, allora la funzione $\|\varphi\|$ è quasi sub-additiva rispetto alla coppia $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ e alla mesh δ.*

Lemma II. *Sia $\varphi: I \mapsto \varphi(I)$, $I \in \{I\}$, quasi additiva rispetto alla coppia $(\mathscr{D},\mathscr{D}')$ e alla mesh δ ed esista inoltre in $\mathbf{R}$ l'integrale $(\mathscr{D})\text{-}\int \|\varphi\|$. In corrispondenza a un numero $\varepsilon > 0$ è allora possibile determinare un altro numero $\mu^* = \mu^*(\varepsilon) > 0$ tale che, per ogni $D_0' = [I] \in \mathscr{D}'$ con $\delta(D_0') < \mu^*$ esiste un numero $\lambda^* = \lambda^*(\varepsilon, D_0') > 0$ in modo che risulti*

(3.1) $\sum^* \|\varphi(J)\| < \varepsilon$, *per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ con $\delta(D) < \lambda^*$, ove con $\sum^*$ denotiamo la somma relativa agli insiemi $J \in D$, $J \subset I$, $I \in D_0'$, con $\|\beta(J) - \alpha(I)\| \geqslant \varepsilon$, essendo $\alpha(I) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)(I)$ e $\beta(J) = (\beta_1, \ldots, \beta_k)(J)$ i vettori definiti ponendo*

$$\alpha(I) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(I)}{\|\varphi(I)\|} & \textit{se } \|\varphi(I)\| > 0 \\[2ex] A & \textit{se } \|\varphi(I)\| = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\beta(J) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(J)}{\|\varphi(J)\|} & \textit{se } \|\varphi(J)\| > 0 \\[2ex] B & \textit{se } \|\varphi(J)\| = 0, \end{cases} \tag{3.2$'$}$$

con $A, B \in \mathbf{R}^k$ vettori tali che $\|A\| = 1$, $\|B\| = 1$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema. *Sia* $\varphi\colon I \mapsto \varphi(I)$, $I \in \{I\}$, *una funzione vettoriale con le proprietà*

(i)′ φ *è quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ,

(ii) *esiste finito l'integrale* $V = (\mathscr{D})\text{-}\int \|\varphi\|$.

Siano inoltre verificate le ipotesi (f_1), (f_2), (ω'). *In queste condizioni la funzione* $\Phi\colon I \mapsto \Phi(I)$, $I \in \{I\}$, *definita in* (2.4), *risulta quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ.

Poiché f è limitata in $H \times \sigma$, esiste un numero $N > 0$ con la proprietà

$$(3.3) \qquad |f(p, q)| \leqslant N \qquad \forall p \in H\,, \qquad \forall q \in \sigma\,.$$

Posto $M = \max\{N, V + 1\}$, risulta (cfr. (f_2), (3.2), (3.3))

$$(3.4) \qquad |f[p(\tau), \varphi(I)]|\ (^2) = |f[p(\tau), \alpha(I)]\|\varphi(I)\|\,| \leqslant M\|\varphi(I)\|\,,$$

da cui segue

$$(3.5) \qquad |\sum_{I \in D} f[p(\tau), \varphi(I)]| \leqslant M \sum_{I \in D} \|\varphi(I)\| \qquad \forall D \in \mathscr{D}\,.$$

Poiché la funzione f verifica l'ipotesi (f_1), in corrispondenza del numero $\varepsilon/2M > 0$, esiste un numero $\xi = \xi(\varepsilon/2M) > 0$ in modo che risulti

$$(3.6) \qquad |f(p, q) - f(p', q')| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$\forall p, p' \in H \quad \forall q, q' \in \sigma$, con $\|p - p'\| < \xi$, $\|q - q'\| < \xi$, e supponiamo che sia

$$(3.7) \qquad \xi < \min\{1, \frac{\varepsilon}{6M}\}\,.$$

Intanto, per l'ipotesi (ii), in corrispondenza del numero ξ, esiste un altro numero $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi) > 0$ con la proprietà

$$(3.8) \qquad |\sum_{I \in D} \|\varphi(I)\| - V| < \xi \qquad \forall D \in \mathscr{D}\,, \quad \text{con } \delta(D) < \bar{\mu}\,.$$

(2) Abbiamo supposto $\|\varphi(I)\| > 0$; peraltro, se $\|\varphi(I)\| = 0$, la disuguaglianza (3.4) è ugualmente verificata poiché risulta

$$(3.4)' \qquad f[p(\tau), \varphi(I)] = 0\,.$$

Dal Lemma I e dal Teorema I di [**6**] segue inoltre che la funzione $\|\varphi\|$ è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$; pertanto in corrispondenza di ξ esiste un numero $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\xi) > 0$ tale che, per ogni $D_0' = [I] \in \mathscr{D}'$ con $\delta(D_0') < \tilde{\eta}$, esiste un altro numero $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\xi, D_0') > 0$ in modo che risulti

$$(3.9) \qquad \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum_{J \subset I} \|\varphi(J)\| - \|\varphi(I)\| \Big| < \xi \,, \qquad\qquad (3.10) \qquad \sum{}' \|\varphi(J)\| < \xi \,,$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ con $\delta(D) < \tilde{\lambda}$.

Indicati con $\mu^* = \mu^*(\xi) > 0$ e $\lambda^* = \lambda^*(\xi, D_0') > 0$ i numeri determinati come nel Lemma II in corrispondenza di ξ, sia

$$(3.11) \qquad \mu = \mu(\xi) = \min\{\tilde{\eta}(\xi), \mu^*(\xi), \xi\} \,.$$

Consideriamo poi un sistema finito $D_0' = [I] \in \mathscr{D}'$ con $\delta(D_0') < \mu$, e posto

$$(3.12) \qquad \lambda = \lambda(\xi, D_0') = \min\{\bar{\mu}(\xi), \tilde{\lambda}(\xi, D_0'), \lambda^*(\xi, D_0')\} \,,$$

sia $D = [J] \in \mathscr{D}$ un sistema finito con $\delta(D) < \lambda$.

Denotati con $\alpha(I)$, $I \in D_0'$ e $\beta(J)$, $J \in D$, i vettori unitari definiti rispettivamente in (3.2) e (3.2)$'$, indichiamo con $\sum^{(*I)}$ la somma relativa agli insiemi $J \in D$, $J \subset I$, con $\|\beta(J) - \alpha(I)\| \geqslant \xi$, e con $\sum^{(0I)}$ la somma relativa agli insiemi $J \subset I$ con $\|\beta(J) - \alpha(I)\| < \xi$. Fissati arbitrariamente $\tau \in I$, $\tau' \in J$, risulta (cfr. (3.4) e (3.1))

$$(3.13) \qquad \sum{}^* |f[p(\tau'), \varphi(J)]| \leqslant M \sum{}^* \|\varphi(J)\| < M\xi \,,$$

e (cfr. (3.4), (3.10) e (3.7))

$$(3.14) \qquad \sum{}' |f[p(\tau'), \varphi(J)]| \leqslant M \sum{}' \|\varphi(J)\| < M\xi < \varepsilon \,,$$

che altro non è che la $(\tilde{\tilde{\Phi}}_2)$.

Poiché da (ω') e da (3.11) si ha inoltre

$$(3.15) \qquad \omega(I) \leqslant \delta(D_0') < \xi \qquad \forall I \in D_0' \,,$$

segue che

$$(3.16) \qquad \|p(\tau') - p(\tau)\| \leqslant \omega(I) < \xi \qquad \forall \tau \in I \,, \quad \forall \tau' \in J \,, \quad J \subset I \,,$$

da cui (cfr. (3.6))

$$|f[p(\tau'), \beta(J)] - f[p(\tau), \alpha(I)]| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{3.17}$$

$\forall J \in D\,, \quad J \subset I \quad$ con $\|\beta(J) - \alpha(\mathrm{I})\| < \xi$.

Risulta pertanto (cfr. (3.4), (3.13), (3.17), (3.3))

$$\begin{aligned}
(3.18)\qquad & \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum\nolimits^{(I)} \Phi(J) - \Phi(I) \Big| = \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum\nolimits^{(I)} f[p(\tau'), \varphi(J)] - f[p(\tau), \varphi(I)] \Big| \\
& \leqslant \sum\nolimits^{*} |f[p(\tau'), \varphi(J)]| + \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum\nolimits^{(0I)} f[p(\tau'), \beta(J)] \|\varphi(J)\| - f[p(\tau), \alpha(I)] \|\varphi(I)\| \Big| \\
& < M\xi + \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum\nolimits^{(0I)} \{f[p(\tau'), \beta(J)] - f[p(\tau), \alpha(I)]\} \|\varphi(J)\| \\
& \qquad\qquad + f[p(\tau), \alpha(I)] \{\sum\nolimits^{(0I)} \|\varphi(J)\| - \|\varphi(I)\|\} \Big| \\
& < M\xi + \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{I \in D_0'} \sum\nolimits^{(0I)} \|\varphi(J)\| + M \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum\nolimits^{(0I)} \|\varphi(J)\| - \|\varphi(I)\| \Big| \\
& \leqslant M\xi + \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{J \in D} \|\varphi(J)\| + M \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum\nolimits^{(I)} \|\varphi(J)\| - \|\varphi(I)\| \Big| + M \sum\nolimits^{*} \|\varphi(J)\|\,.
\end{aligned}$$

Tenendo presente le relazioni (3.8), (3.9), (3.1), (3.7), da (3.18) segue infine

$$\begin{aligned}
(3.18)'\qquad & \sum_{I \in D_0'} \Big| \sum\nolimits^{(I)} \Phi(J) - \Phi(I) \Big| \\
& < M\xi + \frac{\varepsilon}{2M} (V + \xi) + 2M\xi < 3M\xi + \frac{\varepsilon}{2M} (V + 1) < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

che altro non è che la $(\tilde{\tilde{\Phi}}_1)$, c.v.d.

Oss. I. Poiché il concetto di *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ è più ampio del concetto di *quasi additività* rispetto a $\mathscr{D}$ e coincide con questo se $\mathscr{D}' \equiv \mathscr{D}$ e peraltro la nostra (ω') è, come abbiamo detto, più debole della (ω) (cfr. qui nota (1)), il nostro Teorema contiene, come caso particolare, il Teorema (6.i) di $[4]_6$, nel senso che questa proposizione si ottiene dal nostro Teorema assumendo $\mathscr{D}' \equiv \mathscr{D}$.

Mostreremo ora che l'ipotesi di *quasi additività in senso debole* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ sulla φ e le ipotesi (ii), (f_1), (f_2), (ω) *non* sono invece sufficienti a garantire la *quasi additività in senso debole* di $\Phi\colon I \mapsto \Phi(I)$, $I \in \{I\}$, come risulta dal seguente

Esempio I. Dato il quadrato $\tilde{I}=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$, con la topologia usuale, siano $\{I\}$ la totalità dei rettangoli $I=[a,b]\times[c,d]\subset\tilde{I}$, $\mathscr{D}$ la famiglia di tutte le decomposizioni $D=[I]$, $I\in\{I\}$, del dato quadrato ottenute come prodotto di due suddivisioni dei lati di $\tilde{I}$, di cui quella del lato verticale sia costruita per dicotomia. Assumiamo poi $\delta\colon D\mapsto\delta(D)=\max\limits_{I\in D}\operatorname{diam} I$, $D\in\mathscr{D}$. Indicato poi con $E_{n,i}$, $n\in\boldsymbol{N}$, $i=1,\dots,2^n$, il generico intervallo ottenuto dalla divisione per dicotomia del lato di $\tilde{I}$ giacente sull'asse y e con «h» l'altezza del generico rettangolo $I\in\{I\}$, definiamo la funzione $\varphi\colon I\mapsto\varphi(I)$, $I\in\{I\}$, nel modo seguente

$$\varphi(I)=\begin{cases} h \ \text{se}\ I=[0,a]\times E_{n,i}\,, & n\in\boldsymbol{N},\quad i=1,3,\dots,2^n-1\,,\quad n\geqslant 1\\ -h \ \text{se}\ I=[0,a]\times E_{n,i}\,, & n\in\boldsymbol{N},\quad i=2,4,\dots,2^n\,,\quad n\geqslant 1\\ 0\ \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Tale funzione è *quasi additiva in senso debole*; infatti, assunto $D_0=[[0,1]\times[0,1]]$, per ogni $D=[J]\in\mathscr{D}$, risulta

$$\sum_{I\in D_0}\Big|\sum{}^{(I)}\varphi(J)-\varphi(I)\Big|=\Big|\sum_{J\in D}\varphi(J)\Big|=0\,,\qquad \sum{}'\,|\varphi(J)|=0\,,$$

mentre si ha $(\mathscr{D})\text{-}\!\int\|\varphi\|=1$.

Detta $f\colon(p,q)\mapsto f(p,q)$ la funzione reale così definita $f(p,q)=q+|q|$, $q\in\boldsymbol{R}$, risulta

$$\Phi(I)=\begin{cases} 2h\ \text{se}\ I=[0,a]\times E_{n,i}\,, & n\in\boldsymbol{N},\quad i=1,3,\dots,2^n-1\,,\quad n\geqslant 1\\ 0\ \text{altrove}\,, \end{cases}$$

e tale funzione *non* è *quasi additiva in senso debole.*

Fissato infatti ε, $0<\varepsilon<1$, sia $D_0=[I]\in\mathscr{D}$ un'arbitraria decomposizione; qualunque sia il numero $\lambda>0$, esiste una decomposizione $D=[J]\in\mathscr{D}$, con $\delta(D)<\lambda$, in modo che risulti

$$\sum_{I\in D_0}\Big|\sum{}^{(I)}\Phi(J)-\Phi(I)\Big|=1\,. \tag{3.19}$$

Invero, sia $D=[J]\in\mathscr{D}$ una decomposizione con $\delta(D)<\varrho$, ove ϱ è la lunghezza del più piccolo dei lati dei rettangoli $I\in D_0$. Se $I\in D_0$, con $I=[0,a]\times E_{n,i}$, $n\in\boldsymbol{N}$, $i=1,3,\ldots,2^n-1$, $n\geqslant 1$, si ha

$$\Phi(I)=2h\,,\qquad \textstyle\sum^{(I)}\Phi(J)=h; \tag{3.20}$$

se invece $I\in D_0$, con $I=[0,a]\times E_{n,i}$, $n\in\boldsymbol{N}$, $i=2,4,\ldots,2^n$, $n\geqslant 1$, risulta

$$\Phi(I)=0\,,\qquad \textstyle\sum^{(I)}\Phi(J)=h\,. \tag{3.21}$$

Poiché da (3.20) e (3.21) discende immediatamente la (3.19), la funzione Φ non è *quasi additiva in senso debole.*

Oss II. Vogliamo osservare che il Teorema (6.i) di L. Cesari e il nostro Teorema *non* sussistono senza l'ipotesi (ii), come è provato nel seguente

Esempio II. Siano $\tilde{I}=[0,1]$, con la topologia usuale, $\{I\}$ la collezione degli intervalli $I=[a,b]\subset[0,1]$ e $\mathscr{D}$ la famiglia delle decomposizioni D individuate, al variare di $n\in\boldsymbol{N}$, $n>1$, dagli insiemi $\{0,1/n,a_1,\ldots,1/(n-1),a_r,\ldots,1/2,a_s,\ldots,1\}$, $a_i\in\boldsymbol{R}$, che denoteremo con $D=[0,1/n,a_1,\ldots,1/(n-1),a_r,\ldots,1/2,a_s,\ldots,1]$. Sia poi $\delta\colon D\mapsto\delta(D)$, $D\in\mathscr{D}$, la funzione definita ponendo $\delta(D)=\max\limits_{I\in D}|I|+1/\mathrm{n}$, ove $|I|$ indica l'ampiezza di I.

La funzione $\varphi\colon I\mapsto\varphi(I)$, ove

$$\varphi(I)=\begin{cases}1 & se\ I=[0,1/n]\\ -1 & se\ I=[a_i,1/n]\\ 1 & se\ I=[1/n,a_j]\\ 0 & altrove\,,\end{cases}$$

risulta *quasi additiva* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ (e quindi è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D},\mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ). Infatti, fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon>0$, sia $D_0=[I]\in\mathscr{D}$, $\lambda=\lambda(\varepsilon,D_0)<\varrho$, ove ϱ è la lunghezza del più piccolo degli intervalli $I\in D_0$. Per ogni $D=[J]\in\mathscr{D}$, con $\delta(D)<\lambda$, si ha

$$\begin{aligned}
I&=[0,1/n]\ \in D_0 \Rightarrow \varphi(I)=1\,, && \textstyle\sum^{(I)}\varphi(J)=1\,,\\
I&=[1/n,a_i]\in D_0 \Rightarrow \varphi(I)=1\,, && \textstyle\sum^{(I)}\varphi(J)=1\,,\\
I&=[a_j,1/n]\in D_0 \Rightarrow \varphi(I)=-1\,, && \textstyle\sum^{(I)}\varphi(J)=-1\,,\\
I&=[a_i,a_{i+1}]\in D_0 \Rightarrow \varphi(I)=0\,, && \textstyle\sum^{(I)}\varphi(J)=0\,.
\end{aligned}$$

Risulta allora $\sum_{I\in D_0} |\sum^{(I)} \varphi(J) - \varphi(I)| = 0$, e si ha inoltre $\sum' |\varphi(J)| = 0$, mentre risulta $(\mathscr{D})$ - $\int \|\varphi\| = +\infty$.

Posto però $f(p, q) = |q|$, $q \in \boldsymbol{R}$, la funzione $\Phi(I) = |\varphi(I)|$, $I \in \{I\}$, *non* essendo integrabile poiché $(\mathscr{D})$ - $\int \Phi = +\infty$, *non* risulta *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ (cfr. [**1**]$_1$, Teorema I e [**1**]$_2$, **5**, Osservazione), e quindi neppure *quasi additiva* rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ.

4 – Dal Teorema dimostrato in **3**, tenendo presente il Teorema I di [**1**]$_1$ e l'Osservazione di **5** di [**1**]$_2$, discende il seguente

Corollario. *Sotto le ipotesi del Teorema la funzione* $\Phi(I) = f[p(\tau), \varphi(I)]$ *risulta integrabile rispetto alla famiglia* $\mathscr{D}$.

Oss. III. Il Corollario appena enunciato rappresenta un criterio di integrabilità per la funzione Φ più stringente del Teorema (6.ii) di [**4**]$_6$. Infatti, se sono verificate le ipotesi del citato Teorema (6.ii), sono anche soddisfatte le ipotesi del nostro Corollario; d'altra parte esistono funzioni *quasi additive rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ con $\|\varphi\|$ integrabile che *non* sono *quasi additive* rispetto a $\mathscr{D}$ (cfr. Esempio di pag. 5 di [**1**]$_1$ ove si assuma come $\mathscr{D}'$ la famiglia delle decomposizioni cartesiane del quadrato Q, prodotto di due suddivisioni di due lati consecutivi di Q di cui la prima *non* contenga il punto $(1/2, 0)$).

Oss. IV. Nell'Esempio III mostreremo che la tesi del Corollario *non* sussiste sostituendo l'ipotesi di *quasi additività rispetto a* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e a* δ con quella di *quasi additività in senso debole* (3) e neppure sostituendo alle ipotesi (i)', (ii) le condizioni, più deboli (4), che φ sia integrabile rispetto a $\mathscr{D}$ e $\|\varphi\|$ sia *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$.

---

(3) Vogliamo far notare che la classe delle funzioni *quasi additive in senso debole* contiene strettamente la classe delle funzioni *quasi additive rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ poiché una funzione *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ è *quasi additiva in senso debole*, mentre esistono funzioni *quasi additive in senso debole* che *non* sono *quasi additive rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$, qualunque sia $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$. Basta per questo considerare la funzione φ qui definita nell'Esempio III: tale funzione *non* è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$, qualunque sia $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$, poiché in tal caso (cfr. Corollario) la funzione Φ sarebbe integrabile rispetto a $\mathscr{D}$.

(4) Le condizioni che φ sia integrabile rispetto a $\mathscr{D}$ e $\|\varphi\|$ sia *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ sono più deboli delle condizioni (i)', (ii). Infatti, dal Lemma I di **3** e dal Teorema I di [**6**] discende che se $\|\varphi\|$ è integrabile rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e φ è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ allora $\|\varphi\|$ è anch'essa *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$; inoltre, dall'ipotesi (i)' segue, al solito, l'integrabilità rispetto a $\mathscr{D}$ della φ.

Esempio III. Siano $\tilde{I}$, $\{I\}$, $\mathscr{D}$ e δ definiti come nell'Esempio I. Andiamo a considerare la funzione vettoriale $\varphi\colon I \mapsto \varphi(I)$ di componenti

$$\varphi_1(I) = \begin{cases} h \ \textit{se} \ I = [0, a]\times E_{n,i}\,, \ n \in \boldsymbol{N}, \ i = 1, 3, \ldots, 2^n - 1, & a \in \boldsymbol{Q}, \ n \geqslant 1 \\ -h \ \textit{se} \ I = [0, a]\times E_{n,i}\,, \ n \in \boldsymbol{N}, \ i = 2, 4, \ldots, 2^n, & a \in \boldsymbol{Q}, \ n \geqslant 1 \\ 0 \ \textit{altrove}, & \end{cases}$$

$$\varphi_2(I) = \begin{cases} h \ \textit{se} \ I=[0, a]\times E_{n,i}, \ n \in \boldsymbol{N}, \ i = 1, 3, \ldots, 2^n - 1, & a \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}, \ n \geqslant 1 \\ -h \ \textit{se} \ I=[0, a]\times E_{n,i}, \ n \in \boldsymbol{N}, \ i = 2, 4, \ldots, 2^n, & a \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}, \ n \geqslant 1 \\ 0 \ \textit{altrove}\,. & \end{cases}$$

La funzione $\varphi(I) = \big(\varphi_1(I), \varphi_2(I)\big)$ è *quasi additiva in senso debole.* Infatti, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, sia $D_0 = \big[[0, 1]\times[0, 1]\big]$; per ogni decomposizione $D = [J] \in \mathscr{D}$, risulta

$$\sum_{I \in D_0} \Big\| \sum\nolimits^{(I)} \varphi(J) - \varphi(I) \Big\| = \sqrt{\big(\sum\nolimits^{(\tilde{I})} \varphi_1(J) - \varphi_1(\tilde{I})\big)^2 + \big(\sum\nolimits^{(\tilde{I})} \varphi_2(J) - \varphi_2(\tilde{I})\big)^2} \tag{4.1}$$

$$= \sqrt{\big(\sum_{J \in D} \varphi_1(J)\big)^2 + \big(\sum_{J \in D} \varphi_2(J)\big)^2} = 0\,,$$

$$\sum\nolimits' \|\varphi(J)\| = 0\,, \tag{4.2}$$

e quindi sono verificate la $(\tilde{\Phi}_1)$ e la $(\tilde{\Phi}_2)$ della *quasi additività in senso debole.*

Denotata ora con $\mathscr{D}'$ una qualunque sottofamiglia di $\mathscr{D}$, dimostreremo che $\|\varphi\|$ è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ e quindi integrabile rispetto a $\mathscr{D}$. Infatti, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, sia $D_0 = [I]$ una qualunque decomposizione di $\mathscr{D}'$; posto $\lambda = \varrho$, per ogni decomposizione $D = [J] \in \mathscr{D}$ con $\delta(D) < \lambda$, si ha

$$I = [0, a]\times E_{n,i},\, n \geqslant 1 \Rightarrow \|\varphi(I)\| = h\,, \qquad \sum\nolimits^{(I)} \|\varphi(J)\| = h\,, \quad \sum_{J \not\subset I} \|\varphi(J)\| = 0\,,$$

$$I = [a, b]\times[c, d] \qquad \Rightarrow \|\varphi(I)\| = 0\,, \qquad \sum\nolimits^{(I)} \|\varphi(J)\| = 0\,, \quad \sum_{J \not\subset I} \|\varphi(J)\| = 0\,.$$

Risulta quindi

$$\sum_{I \in D_0} \Big| \sum\nolimits^{(I)} \|\varphi(J)\| - \|\varphi(I)\| \Big| < \varepsilon\,, \tag{4.3}$$

$$\sum\nolimits' \|\varphi(J)\| < \varepsilon\,, \tag{4.4}$$

Posto, infine, $f(p, q) = q_1 - q_2^+$, $q \in \boldsymbol{R}^2$, $q = (q_1, q_2)$, si ha

$$\Phi(I) = \begin{cases} h \ \mathit{se} \ I=[0, a]\times E_{n,i}, & n\in \boldsymbol{N}, \ i=1, 3, \dots, 2^n-1, \ a\in \boldsymbol{Q}, \quad n\geqslant 1 \\ -h \ \mathit{se} \ I=[0, a]\times E_{n,i}, & n\in \boldsymbol{N}, \ i=2, 4, \dots, 2^n, \quad a\in \boldsymbol{Q}, \quad n\geqslant 1 \\ -h \ \mathit{se} \ I=[0, a]\times E_{n,i}, & n\in \boldsymbol{N}, \ i=1, 3, \dots, 2^n-1, \ a\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}, \ n\geqslant 1 \\ 0 \ \mathit{altrove}, \end{cases}$$

che *non* è integrabile rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ poiché risulta

$$(\mathscr{D})\text{-}\int_* \Phi = -\tfrac{1}{2}, \qquad (\mathscr{D})\text{-}\int^* \Phi = 0 .$$

Bibliografia

[1] A. Averna e C. Lodovici: $[\bullet]_1$ *La quasi additività in senso debole*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **25** (1976), 1-14; $[\bullet]_2$ *La quasi sub-additività rispetto a una coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *di famiglie di sistemi finiti e alla mesh* δ, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **14**-B (1977), 101-117.

[2] V. E. Bononcini: $[\bullet]_1$ *Sugli integrali regolari del Calcolo delle Variazioni per superficie in forma parametrica*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) **3** (1952), 131-151; $[\bullet]_2$ *Un teorema di continuità per integrali su superficie chiuse*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) **4** (1953), 299-311.

[3] J. Cecconi: $[\bullet]_1$ *Sul Teorema di Gauss-Green*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **20** (1951), 194-218; $[\bullet]_2$ *Sul teorema di Stokes*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) **3** (1952), 233-264; $[\bullet]_3$ *Sul teorema di Gauss-Green per una particolare classe di superficie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **22** (1953), 81-112.

[4] L. Cesari: $[\bullet]_1$ *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **13** (1944), 77-117; $[\bullet]_2$ *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **14** (1945), 47-59; $[\bullet]_3$ *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **29** (1949), 199-224; $[\bullet]_4$ *An existence theorem of Calculus of Variations for integrals on parametric surfaces*, Amer. J. Math. **74** (1952), 265-295; $[\bullet]_5$ *Surface area*, Princeton University Press 1956; $[\bullet]_6$ *Quasi additive set functions and the concept of integral over a variety*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 94-113.

[5] J. M. Danskin, *On the existence of minimizing surfaces in parametric double integral problems of the Calculus of Variations*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) **3** (1952), 43-63.

[6] A. FIACCA, *Sulla quasi additività e sulla quasi sub-additività rispetto a una coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *di famiglie di sistemi finiti e alla mesh* δ, Rend. Circ. Mat. Palermo **26** (1977), 289-301.

[7] A. G. SIGALOV: $[\cdot]_1$ *The existence of an absolute minimum for double integrals of the Calculus of Variations in parametric form*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **70** (1950), 769-772; $[\cdot]_2$ *On the existence of an absolute minimum for double integrals of the Calculus of Variations*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **71** (1950), 617-620.

[8] L. H. TURNER, *An invariant property of Cesari's surface integral*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 920-925.

Summary

In the present paper we obtain some results about quasi additive set functions. In particular, we prove that if $\varphi: \{I\} \to \boldsymbol{R}^k$ *is a set function that is quasi additive with respect to* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ $([\mathbf{1}]_2)$ *and of bounded variation, then the set function* $\Phi: I \mapsto \Phi(I) = f[T(\tau), \varphi(I)]$ *is quasi additive with respect to* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$, *where* $f: H \times \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}$, $H \subset \boldsymbol{R}^m$, *is positive homogeneous of degree one in* $q \in \boldsymbol{R}^k$, *but it is not necessarily linear. As a consequence, the Burkill-Cesari integral* $\mathscr{I}(f, T, \varphi)$ *of the function* Φ *exists in* $\boldsymbol{R}$. *The present integral is called the integral of the Calculus of Variations as a Weierstrass integral of the function* f *over the variety* T *with respect to* φ.

The results here obtained generalize some theorems due to L. Cesari $([\mathbf{4}]_6)$.

* * *