Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 95-103

RITA CAMPANINI (*)

Sui cambiamenti di variabili che conservano alcune proprietà di stabilità (**)

1 - Introduzione

Sia τ un numero reale e I l'intervallo reale (τ, ∞); sia Ω un insieme aperto connesso di $\boldsymbol{R}^n$, contenente l'origine e

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{1.1}$$

un'equazione differenziale vettoriale, dove $X: I \times \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ è una funzione continua, con $X(t, 0) \equiv 0$, e tale che per ogni punto (t_0, x_0) di $I \times \Omega$ passi un'unica soluzione dell'equazione (1.1), che indicheremo con $x(t, t_0, x_0)$.

Nelle applicazioni, anzichè studiare direttamente la stabilità del moto non perturbato $x = 0$ dell'equazione (1.1), è spesso conveniente fare un opportuno cambiamento di variabili che trasformi la (1.1) in una nuova equazione differenziale vettoriale, che ammetta ancora la soluzione nulla come punto critico. In generale tuttavia, le proprietà di stabilità non sono invarianti rispetto ad un generale cambiamento di variabili ([1]). Si pone perciò il problema di stabilire delle condizioni sul cambiamento di variabili perchè si conservino proprietà di stabilità per « soluzioni corrispondenti » delle due equazioni differenziali e, senza perdere in generalità, ci si può riferire alle soluzioni nulle. Questo è l'argomento del presente lavoro. L'ultimo paragrafo sarà dedicato al problema analogo nel caso di proprietà di stabilità parziale.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 30-IX-1982.
([1]) Esempi in proposito sono stati dati da Cesari in [**1**] (pp. 12-13).

2 - Criteri per la conservazione della stabilità semplice

Sia Ω' un aperto connesso di $\boldsymbol{R}^n$ contenente l'origine e si consideri il cambiamento di variabili locale (²): $x \leftrightarrow y$, rappresentato da una funzione $x = g(t, y)$, dove $g: I \times \Omega' \to \boldsymbol{R}^n$ è di classe C^1, $g(t, 0) \equiv 0$, ed è invertibile rispetto ad y con funzione inversa $y = h(t, x)$ pure di classe C^1 in un insieme contenente, per qualche intorno Ω'' dell'origine di $\boldsymbol{R}^n$, un insieme del tipo $I \times \Omega''$. Mediante tale cambiamento di variabili la (1.1) si può trasformare in un'equazione in forma normale

$$\dot{y} = Y(t, y)\,, \tag{2.1}$$

tale che per ogni punto $(t_0, y_0) \in I \times \tilde{\Omega}$ (³) passi una e una sola soluzione $y(t, t_0, y_0)$ di (2.1), ed inoltre $Y(t, 0) \equiv 0$. Tra le soluzioni di (1.1) e (2.1) sussiste la seguente identità

$$x(t, t_0, x_0) \equiv \big[g\big(t, y(t, t_0, y_0)\big)\big]_{y_0 = h(t_0, x_0)}\,, \tag{2.2}$$

ed in particolare alla soluzione nulla di (1.1) corrisponde la soluzione nulla di (2.1) e viceversa.

Indicheremo con $\|\cdot\|$ la norma euclidea in $\boldsymbol{R}^n$; dato un numero $\varrho > 0$, S_ϱ rappresenti la sfera aperta di $\boldsymbol{R}^n$ di centro l'origine e raggio ϱ, $\bar{S}_\varrho$ la sua chiusura.

Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema 1. *Se esiste un intervallo J, non limitato, contenuto in I, tale che si abbia*

$$\lim_{y \to 0} g(t, y) = 0 \qquad \textit{uniformemente rispetto a } t \in J\,, \tag{2.3}$$

allora la stabilità della soluzione nulla di (2.1) *implica la stabilità della soluzione nulla di* (1.1) (⁴).

(²) Se Ω' non contiene Ω sarà presa in esame una restrizione dell'equazione (1.1); per lo studio della stabilità della soluzione $x = 0$ è sufficiente riferirsi ad un intorno dell'origine di $\boldsymbol{R}^n$.

(³) Dove $\tilde{\Omega}$ è un opportuno insieme aperto connesso di $\boldsymbol{R}^n$ contenente l'origine.

(⁴) La soluzione nulla di (1.1) si dice *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $t_0 \in I$ esiste un $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tale che, per ogni $x_0 \in S_\delta$ e per ogni $t \geqslant t_0$, si abbia $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$; si dice inoltre *uniformemente stabile* se si può scegliere $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ indipendente da $t_0 \in I$. (Si confronti ad esempio [**3**]).

Dim. Comunque si fissi t_0 in I, si osservi che, se vale la (2.3), tale limite è uniforme anche per $t \in [t_0, \infty)$. Assegnato allora $\varepsilon > 0$ sia $\delta' = \delta'(t_0, \varepsilon) > 0$ tale che $\|y\| < \delta'$ implichi $\|g(t, y)\| < \varepsilon$ per ogni $t \geqslant t_0$; sia poi $\delta'' = \delta''(t_0, \varepsilon)$ tale che, per la stabilità di $y = 0$, $\|y_0\| < \delta''$ implichi $\|y(t, t_0, y_0)\| < \delta'$ per ogni $t \geqslant t_0$; sia infine $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tale che per $\|x_0\| < \delta$ si abbia $\|h(t_0, x_0)\| < \delta''$ (per la continuità di $h(t, x)$ e $h(t, 0) \equiv 0$). Per tale δ vale la condizione di stabilità per la soluzione nulla di (1.1), poichè $\|x_0\| < \delta$ implica $\|y_0\| = \|h(t_0, x_0)\| < \delta''$, che a sua volta implica $\|y(t, t_0, y_0)\| < \delta'$, per ogni $t \geqslant t_0$, e quindi $\|x(t, t_0, x_0)\| = \|g(t, y(t, t_0, y_0))\| < \varepsilon$, per ogni $t \geqslant t_0$.

Il Teorema 1 ammette il seguente teorema inverso.

Teorema 2. *Se, per una qualunque equazione differenziale del tipo* (1.1), *la stabilità della soluzione nulla dell'equazione trasformata* (2.1) *implica la stabilità della soluzione nulla di* (1.1), *allora il limite* (2.3) *è uniforme per* $t \geqslant t_0$, *dove* t_0 *è un qualunque punto di* I.

Dim. Consideriamo in particolare come equazione trasformata (2.1) $\dot{y} = 0$ la cui soluzione $y = 0$ è (uniformemente) stabile. Per le ipotesi ammesse sarà dunque stabile anche la soluzione $x = 0$ dell'equazione corrispondente e, in base alla (2.2), le soluzioni di quest'ultima sono tutte e sole del tipo $x(t, t_0, x_0) = [g(t, y_0)]_{y_0 = h(t_0, x_0)}$. Dunque fissato un punto $t_0 \in I$ ed assegnato un $\varepsilon > 0$, sia $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ il δ corrispondente ad ε nella condizione di stabilità per $x = 0$; per tale δ sia ϱ $(= \varrho(t_0, \varepsilon)) > 0$ tale che $\|y\| < \varrho$ implichi $\|g(t_0, y)\| < \delta$ (per la continuità di $g(t, y)$ e $g(t, 0) \equiv 0$). Dato allora $y_0 \in S_\varrho$ si ha $\|x_0\| = \|g(t_0, y_0)\| < \delta$ e quindi, per ogni $t \geqslant t_0$, $\|g(t, y_0)\| = \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$. Vale cioè la condizione (2.3) per $J = [t_0, \infty)$.

Come conseguenza dei Teoremi 1 e 2 si ottiene il seguente

Teorema 3. *Comunque si consideri un'equazione del tipo* (1.1), *la instabilità della soluzione nulla dell'equazione trasformata* (2.1) *implica sempre la instabilità della soluzione nulla di* (1.1) *se e solo se esiste un intervallo non limitato* J, *contenuto in* I, *tale che si abbia*

$$\lim_{x \to 0} h(t, x) = 0 \quad \textit{uniformemente in } t \in J. \tag{2.4}$$

Osservazione 1. Dai teoremi 2 e 3 si deduce che molti semplici cambiamenti di variabili non conservano la stabilità oppure possono conservare la stabilità ma non l'instabilità, o viceversa; si pensi, ad esempio al cambiamento di variabili (*lineare!*) determinato da $g(t, y) = y/(1 + t^2)$ e perciò $h(t, x) = x(1 + t^2)$.

La condizione (2.3) non conserva però la stabilità uniforme, come mostra il seguente esempio.

Sia, per $y \in \boldsymbol{R}$ e $t \in I = (1, \infty)$, $g(t, y) = yt^{(\cos t - 2)}$; poichè $|g(t, y)| \leqslant |y| t^{-1}$ si ha $\lim\limits_{y \to 0} g(t, y) = 0$, uniformemente in $t \in I$. Consideriamo l'equazione $\dot{y} = 0$ (la cui soluzione nulla è uniformemente stabile); si osserva facilmente che $h(t, x) = xt^{(2 - \cos t)} =$ costante è un integrale primo dell'equazione corrispondente (1.1), le cui soluzioni sono perciò del tipo

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 t_0^{(2 - \cos t_0)} t^{(\cos t - 2)} .$$

Posto allora, per k intero positivo, $t_{0,k} = (2k - 1)\pi$ e $t_k = 2k\pi$ $(> t_{0,k})$, comunque si fissi $x_0 \neq 0$, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} |x(t_k, t_{0,k}, x_0)| = \lim_{k \to +\infty} |x_0| [(2k - 1)\pi]^3 (2k\pi)^{-1} = +\infty .$$

Dunque la soluzione $x = 0$ non può essere uniformemente stabile.

Vale tuttavia il seguente

Teorema 4. *Entrambi i limiti* $\lim\limits_{y \to 0} g(t, y) = 0$ *e* $\lim\limits_{x \to 0} h(t, x) = 0$ *siano uniformi in* $t \in I$. *Se la soluzione nulla di* (2.1) *è uniformemente stabile è tale anche la soluzione nulla di* (1.1) *e viceversa.*

Dim. Il teorema si dimostra facilmente facendo uso delle funzioni di classe K, introdotte da W. Hahn, ovvero funzioni scalari, continue e strettamente crescenti su un intervallo del tipo $[0, \varrho]$ $(\varrho > 0)$ e nulle nell'origine. Infatti la soluzione nulla di (2.1) è uniformemente stabile se e solo se (5) esiste una funzione φ di classe K verificante, per ogni $y_0 \in S_\varrho$ $(\varrho > 0)$, per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $t \geqslant t_0$

$$\|y(t, t_0, y_0)\| \leqslant \varphi(\|y_0\|) . \tag{2.5}$$

Le ipotesi del teorema equivalgono inoltre all'esistenza di due funzioni di classe K, χ e ψ tali che, per opportuni numeri positivi α e β, si abbia, per

(5) Si confronti [3], p. 173.

ogni $y \in S_\alpha$, per ogni $x \in S_\beta$ e per ogni $t \in I$,

$$\|g(t, y)\| \leqslant \chi(\|y\|), \qquad \|h(t, x)\| \leqslant \psi(\|x\|). \tag{2.6}$$

In base a (2.5) e (2.6), per un opportuno numero $\sigma > 0$, per ogni $x_0 \in S_\sigma$, per ogni $t_0 \in I$ e $t \geqslant t_0$ (posto $y_0 = h(t_0, x_0)$), si ha

$$\|x(t, t_0, x_0)\| = \|g(t, y(t, t_0, y_0))\| \leqslant \chi(\|y(t, t_0, y_0)\|) \leqslant \chi[\varphi(\|y_0\|)]$$

$$= \chi[\varphi(\|h(t_0, x_0)\|)] \leqslant \chi \circ \varphi \circ \psi(\|x_0\|).$$

Poichè $\chi \circ \varphi \circ \psi$ è una funzione di classe K, ciò dimostra che la soluzione nulla di (1.1) è uniformemente stabile.

3 - Criteri per la conservazione della stabilità asintotica

Le condizioni introdotte in **2** conservano anche le proprietà di stabilità asintotica (6). Precisamente, la condizione (2.3) comporta che se la soluzione nulla di (2.1) è (equi)asintoticamente stabile anche la soluzione nulla di (1.1) è (equi)asintoticamente stabile. Ciò segue dal Teorema 1 e dal seguente

Teorema 5. *Sia soddisfatta la condizione* (2.3) *del Teorema* 1. *Se la soluzione nulla di* (2.1) *è* (*equi*) *attrattiva* (6) *anche la soluzione nulla di* (1.1) *è* (*equi*) *attrattiva.*

Dim. I due casi si trattano in modo analogo; diamo perciò, ad esempio, la dimostrazione per la equiattrattività.

Sia dunque $y = 0$ equiattrattiva; assegnati $t_0 \in I$ ed $\varepsilon > 0$, sia $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tale che, per la (2.3), se $\|y\| < \delta$ sia $\|g(t, y)\| < \varepsilon$, per ogni $t \geqslant t_0$; sia poi $\eta(t_0) > 0$ tale che, per l'equiattrattività di $y = 0$, si abbia $\|y(t, t_0, y_0)\| < \delta$ per ogni $y_0 \in S_\eta$ e per ogni $t \geqslant t_0 + \sigma$, per un opportuno $\sigma > 0$ (dipendente da t_0 e δ e quindi da t_0 e ε); sia infine $\varrho(t_0) > 0$ tale che $\|x_0\| < \varrho$ implichi $\|h(t_0, x_0)\| < \eta$.

---

(6) La soluzione nulla di (1.1) si dice *asintoticamente stabile* se è *stabile* e *attrattiva*, ovvero per ogni $t_0 \in I$ esiste un $\eta(t_0) > 0$ tale che, per ogni $x_0 \in S_\eta$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ tale che per ogni $t \geqslant t_0 + \sigma$ si abbia $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$; se il σ della condizione precedente è indipendente da $x_0 \in S_\eta$ ovvero da $x_0 \in S_\eta$ e da $t_0 \in I$ allora la soluzione nulla di (1.1) si dice rispettivamente *equiattrattiva* oppure *uniformemente attrattiva*. Se la soluzione nulla di (1.1) è *stabile* ed *equiattrattiva* si dice *equiasintoticamente stabile*. Se è *uniformemente stabile* ed *uniformemente attrattiva* si dice *uniformemente asintoticamente stabile*.

Allora, per $\|x_0\| < \varrho$ sarà anche, per ogni $t \geqslant t_0 + \sigma$, $\|x(t, t_0, x_0)\| = \|g(t, y(t, t_0, h(t_0, x_0)))\| < \varepsilon$.

Dunque la soluzione nulla di (1.1) è equiattrattiva.

Infine, nelle ipotesi del Teorema 4, si ha che le soluzioni nulle di (1.1) e (2.1) sono solo insieme uniformemente asintoticamente stabili. Ciò segue dal Teorema 4 e dal seguente

Teorema 6. *Entrambi i limiti,* $\lim_{y \to 0} g(t, y) = 0$ *e* $\lim_{x \to 0} h(t, x) = 0$, *siano uniformi in* $t \in I$. *Se la soluzione nulla di* (2.1) *è uniformemente attrattiva è tale anche la soluzione nulla di* (1.1) *e viceversa.*

Dim. Si dimostra in modo analogo al Teorema 5.

Osservazione 2. Nelle ipotesi del Teorema 6, le soluzioni nulle di (1.1) e (2.1) verificano insieme, o meno, ciascuna delle proprietà di stabilità finora considerate. Ovvii cambiamenti di variabili che soddisfano tali condizioni sono quelli in cui la funzione g (e perciò anche h) non dipende esplicitamente da t.

4 - Stabilità parziale

In questo numero diamo alcune condizioni, sui cambiamenti di variabili, affinchè si conservino alcune proprietà di stabilità parziale.

Sia I l'intervallo reale (τ, ∞) ed Ω un aperto connesso di $\boldsymbol{R}^n$, contenente l'origine. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali

$$(4.1) \qquad \dot{p} = P(t, p, q), \qquad \dot{q} = Q(t, p, q),$$

dove p, P sono vettori di dimensione n e q, Q sono vettori di dimensione m, e le funzioni $P(t, p, q)$, $Q(t, p, q)$ sono definite e continue in $I \times \Omega \times \boldsymbol{R}^m$. Posto, per brevità, $z = (p, q)$, supponiamo che $z = 0$ sia una soluzione del sistema (4.1), cioè che sia $P(t, 0, 0) \equiv 0$ e $Q(t, 0, 0) \equiv 0$, e che per ogni punto $(t_0, z_0) = (t_0, p_0, q_0)$ di $I \times \Omega \times \boldsymbol{R}^m$ passi un'unica soluzione del sistema (4.1), che indicheremo con $z(t, t_0, z_0) = \big(p(t, t_0, z_0), q(t, t_0, z_0)\big)$. Indicheremo con lo stesso simbolo $\|\cdot\|$ le norme euclidee in $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{R}^{n+m}$.

Supponiamo inoltre che le soluzioni di (4.1) siano *q-prolungabili* [**2**], cioè che la componente $q(t)$ di una qualunque soluzione $z(t) = \big(p(t), q(t)\big)$ di (4.1) non cessi di essere definita finchè si ha $p(t) \in \Omega$.

Si dice che la soluzione $z = 0$ di (4.1) è (cfr. [**2**])

(i) *p-stabile* (oppure *parzialmente stabile rispetto a p*), se per ogni $t_0 \in I$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tale che, per ogni $z_0 \in S_\delta$ e per ogni $t \geqslant t_0$, si abbia $\|p(t, t_0, z_0)\| < \varepsilon$;

(ii) *uniformemente p-stabile*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, per ogni $z_0 \in S_\delta$, per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $t \geqslant t_0$, si abbia $\|p(t, t_0, z_0)\| < \varepsilon$.

Dato un intorno A dell'origine di $\boldsymbol{R}^n$ consideriamo un cambiamento di variabili determinato dalle funzioni

$$p = k(t, u, v) , \qquad q = h(t, u, v) , \tag{4.2}$$

con $k: I \times A \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ e $h: I \times A \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, funzioni di classe C^1 (in $I \times A \times \boldsymbol{R}^m$) tali che $k(t, 0, 0) \equiv 0$ e $h(t, 0, 0) \equiv 0$; supponiamo inoltre che le (4.2) siano invertibili rispetto a (u, v) e la trasformazione inversa sia data da

$$u = f(t, p, q) , \qquad v = g(t, p, q) , \tag{4.3}$$

con f e g funzioni di classe C^1 in un insieme contenente, per qualche intorno B dell'origine di $\boldsymbol{R}^n$, un insieme del tipo $I \times B \times \boldsymbol{R}^m$.

Il sistema (4.1) (o una sua restrizione) è trasformato dalle (4.2), (4.3) in un analogo sistema in forma normale

$$\dot{u} = U(t, u, v) , \qquad \dot{v} = V(t, u, v) , \tag{4.4}$$

che ammette la soluzione $w = (u, v) = 0$.

Sussiste il seguente teorema.

Teorema 7. *Se per un intervallo illimitato $J \subset I$ si ha $\lim\limits_{w \to 0} k(t, w) = 0$, uniformemente in $t \in J$, la stabilità (rispetto alle variabili u, v) della soluzione nulla del sistema trasformato* (4.4) *implica la p-stabilità della soluzione nulla di* (4.1). *Se inoltre si ha $\lim\limits_{u \to 0} k(t, u, v) = 0$, uniformemente in $(t, v) \in J \times \boldsymbol{R}^m$, allora la u-stabilità della soluzione nulla del sistema trasformato* (4.4) *implica la p-stabilità della soluzione nulla di* (4.1).

Dim. La dimostrazione di questo teorema non differisce sostanzialmente da quella del Teorema 1 di **2** perciò, per brevità, la omettiamo.

Posto infine $F(t, z) = (f(t, p, q), g(t, p, q))$ vale il seguente

Teorema 8. *Se i limiti,* $\lim_{z\to 0} F(t, z) = 0$ *e* $\lim_{w\to 0} k(t, w) = 0$, *sono uniformi in* $t \in I$, *allora la stabilità uniforme della soluzione nulla di* (4.4) *implica la uniforme p-stabilità della soluzione nulla di* (4.1). *Se inoltre si ha,* $\lim_{u\to 0} k(t, u, v) = 0$, *uniformemente in* $(t, v) \in I \times \boldsymbol{R}^m$, *allora la uniforme u-stabilità della soluzione nulla di* (4.4) *implica la uniforme p-stabilità della soluzione nulla di* (4.1).

Dim. Dimostriamo ad esempio la seconda parte del teorema (la prima si dimostra in modo analogo). Dato un arbitrario numero positivo ε, sia $\delta'(\varepsilon) > 0$ tale che, per le ipotesi ammesse, $\|u\| < \delta'$ implichi $\|k(t, u, v)\| < \varepsilon$ per ogni $(t, v) \in I \times \boldsymbol{R}^m$; sia $\delta''(\varepsilon) > 0$ tale che, per la uniforme u-stabilità di $w = 0$, $\|w_0\| < \delta''$ implichi $\|u(t, t_0, w_0)\| < \delta'$ per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $t \geqslant t_0$; sia infine $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\|z_0\| < \delta$ implichi $\|F(t_0, z_0)\| < \delta''$ per ogni $t_0 \in I$. Dunque, se è $\|z_0\| < \delta$, si ha, per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $t \geqslant t_0$, $\|F(t_0, z_0)\| = \|w_0\| < \delta''$ e perciò, $\|u(t, t_0, w_0)\| < \delta'$, quindi $\|p(t, t_0, z_0)\| = \|k(t, u(t, t_0, w_0), v(t, t_0, w_0))\| < \varepsilon$, da cui si riconosce che la soluzione nulla di (4.1) è uniformemente p-stabile.

Osservazione 3. Si possono considerare, in analogia con le condizioni di stabilità asintotica condizioni di *p-stabilità asintotica* (cfr. [**2**]) e dedurre, ulteriori teoremi, analoghi ai teoremi 7 e 8, procedendo come in **3**.

Anche le proprietà di *limitatezza* (cfr. [**5**], p. 60) di soluzioni di equazioni differenziali pongono un problema analogo. Se si opera un cambiamento di variabili, in generale, tali proprietà non si conservano. Con metodi simili ai precedenti ritengo sia abbastanza semplice individuare condizioni perchè tali proprietà si mantengano.

Bibliografia

[**1**] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[**2**] C. Corduneanu, *Sur la stabilité partielle*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **9** (1964), 229-236.

[**3**] W. Hahn, *Stability of motion*, Springer-Verlag, Berlin 1967.

[**4**] C. Risito, *Metodi per lo studio della stabilità di sistemi con integrali primi noti*, Ann. Mat. Pura Appl. **107**, (1975), 49-94.

[5] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Applied Math. Sciences, vol. 14, Springer-Verlag, New York 1975.

Summary

Conditions are given for a general change of coordinates to maintain some stability properties for solutions of systems of differential equations.

* * *