Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 105-113

SEBASTIANO FRANCAVIGLIA (*)

Su una caratterizzazione metrica di proprietà di misurabilità di multi-mappe (**)

Introduzione

In questo lavoro studieremo alcune proprietà di misurabilità di multimappe $F\colon Y \to \mathscr{P}(X)$ dove Y è un insieme su cui è dato un reticolo L σ-additivo [**3**]$_1$.

Viene principalmente affrontato il problema della caratterizzazione di tali proprietà e viene data una applicazione alle successioni di funzioni.

In **1** stabiliremo la simbologia e le necessarie definizioni; in **2** stabiliremo due teoremi di caratterizzazione ed un teorema sulla commutabilità delle proprietà di misurabilità con il limite di successioni di funzioni $f\colon X \to Y$. In **3** stabiliremo un altro teorema di caratterizzazione per la Hausdorff semicontinuità superiore.

1 – Sia (X, d) uno spazio metrico separabile non vuoto, $\mathscr{P}(X)$, $\mathscr{F}(X)$, $\mathscr{C}(X)$ rispettivamente gli insiemi dei suoi sottoinsiemi non vuoti, dei suoi sottoinsiemi chiusi non vuoti, dei suoi sottoinsiemi compatti non vuoti.

Una multimappa è in generale una applicazione $F\colon Y \to \mathscr{P}(X)$, dove Y è un insieme.

Ricordiamo che, se Y è uno spazio topologico, una multimappa F è semicontinua superiormente (semicontinua inferiormente) se per ogni insieme G aperto (chiuso) in X, l'insieme $\{y \in Y \mid F(y) \subseteq G\}$ è aperto (chiuso) in Y. (Vedi [**3**]$_2$ pag. 173 e seg.).

(*) Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa, 56100 Pisa, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-X-1982.

In Y è dato un reticolo σ-additivo L, cioè una famiglia di sottoinsiemi di Y, che contiene $\emptyset$ e Y, chiusa rispetto alla intersezione finita ed all'unione al più numerabile di elementi. Indicheremo con $-L$ la famiglia degli insiemi complementari di quelli appartenenti ad L.

Ovviamente $-L$ è una famiglia chiusa rispetto all'unione finita ed all'intersezione al più numerabile di elementi.

Se L è una σ-algebra, cioè è chiusa anche rispetto alla differenza dei propri elementi, allora evidentemente $L = -L$.

Seguendo [**3**]$_1$, porremo le seguenti definizioni.

Def. 1.1. (i) Sia data una multimappa $F\colon Y \to \mathscr{P}(X)$. Diremo che *$F$ è di classe L^+*, e scriveremo $F \in L^+$, se e solo se per ogni insieme G, aperto in X, l'insieme $(F^{-1})^\wedge(G) = \{y \,|\, F(y) \subseteq G\} \in L$, o equivalentemente per ogni insieme K, chiuso in X, l'insieme $F^{-1}(K) = \{y \,|\, F(y) \cap K \neq \emptyset\} \in -L$. (ii) *$F$ è di classe L^-*, e scriveremo $F \in L^-$, se e solo se per ogni insieme G aperto in X, l'insieme $F^{-1}(G) = \{y \,|\, F(y) \cap G \neq \emptyset\} \in L$, o equivalentemente per ogni insieme K, chiuso in X, l'insieme $(F^{-1})^\wedge(K) = \{y \,|\, F(y) \subseteq K\} \in -L$.

Nota. (j) Se Y è uno spazio topologico e L è il reticolo degli aperti, $F \in L^+$ significa che F è semicontinua superiormente e $F \in L^-$ significa che F è semicontinua inferiormente.

(jj) Sia Y uno spazio topologico dove sono definibili le classi Boreliane B_α additive e moltiplicative. Si ricorda che le classi B_α additiva e moltiplicativa, dove α è un ordinale minore del primo ordinale non numerabile, si definiscono per induzione transfinita sugli ordinali prendendo come B_0 additiva la classe degli aperti, B_0 moltiplicativa la classe dei chiusi e definendo B_α additiva come la classe delle unioni al più numerabili di insiemi di classe moltiplicativa B_β con $\beta < \alpha$ ed equivalentemente per la B_α moltiplicativa. (Vedi [**3**]$_1$ § 30).

Allora se L è la famiglia dei Boreliani della classe additiva B_α e $F = f^{-1}$, dove $f\colon X \to Y$, $F \in L^-$ significa che f trasforma aperti in Boreliani della classe additiva B_α e $F \in L^+$ significa che f trasforma chiusi in Boreliani della classe moltiplicativa B_α.

Analogamente alla Def. 1.1 per multimappe porremo la seguente definizione per funzioni univoche.

Def. 1.2. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione, X e Y come nella Def. 1.1, diremo che

(i) *f è di classe L^-*, e scriveremo $f \in L^-$, se e solo se per ogni insieme G, aperto in X, l'insieme $f(G) = \{y \,|\, f^{-1}(y) \cap G \neq \emptyset\} \in L$, o equivalentemente per ogni insieme K, chiuso in X, l'insieme $\hat{f}(K) = \{y \,|\, f^{-1}(y) \subseteq K\} \in -L$;

(ii) f *è di classe* L^+, e scriveremo $f \in L^+$, se e solo se per ogni insieme K, chiuso in X, l'insieme $f(K) \in -L$, o equivalentemente per ogni insieme G, aperto in X, l'insieme $f(G) \in L$.

Nota. (j) Se L è il reticolo degli aperti, $f \in L^+$ significa che f è una funzione chiusa, e $f \in L^-$ significa che f è una funzione aperta.

(jj) Se L è il reticolo dei Boreliani della classe additiva B_α, $f \in L^-$ significa che f appartiene alla classe diretta $(\alpha)^-$ (vedi [**4**]), $f \in L^+$ significa che f appartiene alla analoga classe diretta $(\alpha)^+$, cioè f trasforma chiusi in Boreliani dalla classe moltiplicativa di ordine α.

2 – In questo paragrafo daremo due teoremi per caratterizzare l'appartenenza di una multimappa alla classe L^+ o L^- e, come corollari, analoghi teoremi per funzioni univoche.

Il Teorema 2.1 generalizza un analogo risultato provato in [**4**]. La dimostrazione è essenzialmente la stessa e la riportiamo per completezza.

Teorema 2.1. *Sia* $F\colon Y \to \mathscr{P}(X)$ *una multimappa surgettiva*, (X, d) *uno spazio metrico separabile. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti*: (i) $F \in L^-$. (ii) *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una famiglia al più numerabile* $\mathscr{Z}^\varepsilon = \{Z_n^\varepsilon\}$ *di elementi* $Z_n^\varepsilon \in L$ *tale che per ogni* $x \in X$ *esiste un insieme* $W \subseteq X$, *tale che* $x \in W$, $\operatorname{diam} W < \varepsilon$ *e* $F^{-1}(W) \in \mathscr{Z}^\varepsilon$.

Prova. (i) $\to$ (ii). Sia $F \in L^-$. Poichè X è metrico separabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esso è ricopribile con una infinità al più numerabile di sfere aperte $B(x_n, \varepsilon/2) = \{x \in X \mid d(x, x_n) < \varepsilon/2\}$. Posto $Z_n^\varepsilon = F^{-1}(B(x_n, \varepsilon/2))$, risulta che $Z_n^\varepsilon \in L$ perchè $F \in L^-$ e pertanto la famiglia $\mathscr{Z}^\varepsilon = \{Z_n^\varepsilon\}$ soddisfa (ii).

(ii) $\to$ (i). Sia G un aperto in X. Dobbiamo provare che $F^{-1}(G) \in L$. Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo $Z^\varepsilon = \cup \{Z_n^\varepsilon \in \mathscr{Z}^\varepsilon \mid \forall u \in Z_n^\varepsilon,\ F(u) \cap G \neq \emptyset\}$.

Evidentemente $Z^\varepsilon \in L$. Proveremo che esiste un ε opportuno per cui $Z^\varepsilon = F^{-1}(G)$. Se $y \in Z^\varepsilon$ allora, per qualche $n \in \boldsymbol{N}$, si ha $y \in Z_n^\varepsilon$ e $F(y) \cap G \neq \Phi$. Cosicchè $y \in F^{-1}(G)$ e $Z^\varepsilon \subseteq F^{-1}(G)$ qualunque sia ε.

$F^{-1}(G) \neq \emptyset$ per la surgettività di F, sia quindi $y \in F^{-1}(G)$ e scegliamo $x \in F(y) \cap G$ il che è possibile essendo $F(y) \cap G \neq \emptyset$.

Poichè G è aperto e contiene x, esistono per (ii) $\varepsilon > 0$ e $W \subseteq X$ tali che $x \in W \subseteq G$, $\operatorname{diam} W < \varepsilon$, e $F^{-1}(W) \in \mathscr{Z}^\varepsilon$.

Sia $Z_m^\varepsilon = F^{-1}(W)$, allora per ogni $\bar{y} \in Z_m^\varepsilon$ si ha che $F(\bar{y}) \cap W \neq \emptyset$ e ciò implica che $F(\bar{y}) \cap G \neq \emptyset$ e quindi $Z_m^\varepsilon \subseteq Z^\varepsilon$. Poichè $x \in F(y) \cap G \cap W = F(y) \cap W$ segue che $y \in F^{-1}(W) = Z_m^\varepsilon$ cioè $y \in Z^\varepsilon$ e $F^{-1}(G) \subseteq Z^\varepsilon$.

Teorema 2.2. *Sia* $F: Y \to \mathscr{C}(X)$ *una multimappa surgettiva,* (X, d) *uno spazio metrico totalmente limitato. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:* (i) $F \in L^+$. (ii) *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una famiglia al più numerabile* $\mathscr{Z}^\varepsilon = \{Z_n^\varepsilon\}$ *di elementi* $Z_n^\varepsilon \in -L$ *tale che per ogni chiuso* $K \subseteq X$ *esiste un numero finito di insiemi* $W_i \subseteq X$, $i = 1, \dots, r$, *tali che* $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} W_i$, diam $W_i < \varepsilon$ *e* $F^{-1}(W_i) \in \mathscr{Z}^\varepsilon$, $i = 1, \dots, r$.

Prova. (i) $\to$ (ii). Essendo X totalmente limitato, per ogni $\varepsilon > 0$ è ricopribile con un numero finito di sfere aperte $B\,(x_n, \varepsilon/2)$, $n = 1, \dots, s$.

Posto $Z_n^\varepsilon = F^{-1}(\overline{B(x_n, \varepsilon/2)})$, risulta $Z_n^\varepsilon \in -L$ in quanto $F \in L^+$ e quindi la famiglia $\mathscr{Z}^\varepsilon = \{Z_n^\varepsilon\}$ soddisfa (ii).

(ii) $\to$ (i). Sia K un chiuso in X. Dobbiamo provare che $F^{-1}(K) \in -L$. Fissato $\varepsilon_i = 1/i$, $i \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$, esistono $W_1^{\varepsilon_i}, \dots, W_r^{\varepsilon_i}$ contenuti in X tali che

$$\text{(j)} \qquad K \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} W_j^{\varepsilon_i} \subseteq Q_{\varepsilon_i} = \{x \,|\, d(x, K) < \frac{1}{i}\}\,,$$

perchè diam $W_j^{\varepsilon_i} < 1/i$, avendo eliminato gli insiemi $W_j^{\varepsilon_i}$ tali che $W_j^{\varepsilon_i} \cap K = \emptyset$. Segue che per ogni $i \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$,

$$\text{(jj)} \qquad F^{-1}(K) \subseteq F^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{r} W_j^{\varepsilon_i}\Big) = \bigcup_{j=1}^{r} Z_{m_j}^{\varepsilon_i} = V_{\varepsilon_i} \subseteq F^{-1}(Q_{\varepsilon_i})$$

$\big(Z_{m_j}^{\varepsilon_i} = F^{-1}(W_j^{\varepsilon_i})$ e F^{-1} commuta con l'unione$\big)$.

Ciascun $V_{\varepsilon_i} \in -L$ perchè unione di un numero finito di elementi di $-L$.

Dalla (jj) segue che $F^{-1}(K) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{\varepsilon_i}$, dove $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_{\varepsilon_i} \in -L$ perchè intersezione di una infinità numerabile di elementi di $-L$.

Dalla (jj) segue anche che

$$\text{(jjj)} \qquad F^{-1}(K) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{\varepsilon_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} F^{-1}(Q_{\varepsilon_i})\,.$$

Proveremo che $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(Q_{\varepsilon_i}) \subseteq F^{-1}(K)$ per cui i tre insiemi in (jjj) risulteranno uguali.

Infatti, se $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F^{-1}(Q_{\varepsilon_i})$, $y \in F^{-1}(Q_{\varepsilon_i})$ per ogni $i \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$ e cioè

$$\text{(jv)} \qquad F(y) \cap Q_{\varepsilon_i} \neq \emptyset \quad \text{per ogni } i \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}.$$

Ciò implica che $F(y) \cap K \neq \emptyset$, altrimenti, essendo $F(y)$ compatto e K chiuso, la distanza di $F(y)$ da K sarebbe strettamente positiva e per un $i \in \boldsymbol{N}$ sufficientemente grande risulterebbe $F(y) \cap Q_{\varepsilon_i} = \emptyset$ contro la (jv).

Quindi, essendo $F(y) \cap K \neq \emptyset$, $y \in F^{-1}(K)$.

Corollario 2.3. *Sia $f: X \to Y$ una funzione surgettiva, X uno spazio metrico separabile. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(i) $f \in L^-$. (ii) *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile $\mathscr{Z}^\varepsilon = \{Z_n^\varepsilon\}$ di elementi $Z_n^\varepsilon \in L$ tale che per ogni $x \in X$ esiste un insieme $W \subseteq X$ tale che $x \in W$,* diam $W < \varepsilon$, *e* $f(W) \in \mathscr{Z}^\varepsilon$.

Corollario 2.4. *Sia (X, d) uno spazio metrico totalmente limitato e $f: X \to Y$ una funzione surgettiva tale che, per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è compatto in X. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $f \in L^+$. (ii) *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile $\mathscr{Z}^\varepsilon = \{Z_n^\varepsilon\}$ di elementi $Z_n^\varepsilon \in -L$ tale che per ogni insieme K chiuso in X esiste un numero finito di insiemi $W_i \subseteq X$, $i = 1, \ldots, r$, tali che*

$$K \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} W_i\,, \qquad \operatorname{diam} W_i < \varepsilon\,, \qquad f(W_i) \in \mathscr{Z}^\varepsilon \qquad i = 1, \ldots, r\,.$$

Nota. Il Corollario 2.3 costituisce una generalizzazione del Teorema 2 in [4]. Da tale teorema si può dedurre un teorema di convergenza (Teorema 3 di [4]) che enunciamo omettendo la dimostrazione che è identica a quella in [4].

Teorema 2.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico separabile e $f: X \to Y$, $f_n: X \to Y$ funzioni surgettive tali che:*

(i) $f_n \in L^-$. (ii) $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y) \subseteq \operatorname{Lif}_n^{-1}(y)$, *cioè per ogni $x \in f^{-1}(y)$ e per ogni intorno U di x esiste un $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ $U \cap f_n^{-1}(y) \neq \emptyset$, o equivalentemente per ogni $x \in f^{-1}(y)$ esiste una successione $\{x_n\}$ convergente a x con $x_n \in f_n^{-1}(y)$.*

(iii) *Per ogni $\varepsilon > 0$, posto per ogni $n \in \boldsymbol{N}$*

$$F_n^\varepsilon = \{Z \in Y \mid \forall t \in f_n^{-1}(Z)\ \exists x \in f^{-1}(Z) : d(x, Z) < \varepsilon\}\,,$$

ogni $y \in Y$ appartiene ad infiniti F_n^ε.

(iv) *Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, $F_n \in L$. Allora $f \in L^-$.*

Nota. (j) La dimostrazione del Teorema 2.5 si basa sul fatto di dimostrare che $f^{-1}(y)$ soddisfa la (ii) del Teorema 2.1.

(jj) Questo teorema, al di là del Teorema 3 di [**4**] ci dà, per esempio, condizioni affinchè una successione di funzioni che trasformano aperti in insiemi che hanno la proprietà di Baire conservi tale proprietà al limite. Ricordiamo che un insieme $A \subseteq X$ ha la proprietà di Baire se e solo se differisce da un aperto $G \subseteq X$ per un insieme di 1ª categoria, cioè $A \setminus G$ e $G \setminus A$ sono insiemi di 1ª categoria.

(jjj) Le ipotesi del Teorema 2.5 sono più deboli di quelle del Teorema 5 di § **6** di [**3**]$_1$ in cui è richiesta la compattezza delle contro-immagini e la convergenza uniforme di $f_n^{-1}(y)$ secondo la metrica di Hausdorff.

3 – In [**1**] viene presentata una diversa caratterizzazione per la semicontinuità superiore, introducendo le seguenti definizioni.

Def. 4.1. Sia $F\colon Y \to \mathscr{P}(X)$ una multimappa, Y uno spazio topologico, allora F *è Hausdorff semicontinua superiormente* (H-s.c.s.) *in* $y_0 \in Y$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno W di y_0 tale che $W \subseteq (F^{-1})^\wedge(B[F(y_0), \varepsilon]$, dove $B[F(y_0), \varepsilon] = \bigcap_{x \in F(y_0)} B(x, \varepsilon)$.

Def. 4.2. Sia $D \subseteq X$ limitato, definiamo *misura di non compattezza* il numero

$$\Psi(D) = \operatorname{Inf}\{r > 0 \mid D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,\ \operatorname{diam} D_i \leqslant r\}\,.$$

Def. 4.3. Definiamo *frontiera attiva di* $F(y_0)$, indicata con $\partial A\{F(y_0)\}$, come segue: $x \in \partial A\{F(y_0)\}$ se e solo se per ogni intorno U di x e per ogni intorno W di y_0, $U \cap \{F(W) \setminus F(y_0)\} \neq \emptyset$. Equivalentemente

$$\partial A\{F(y_0)\} = \bigcap_{W \in \mathscr{V}(y_0)} \{\overline{F(W) \setminus F(y_0)}\}\,,$$

dove $\mathscr{V}(y_0)$ è una base di intorni di y_0.

La caratterizzazione di [**1**], ripresa in [**2**], è data dal seguente teorema (Teorema 4 di [**1**]).

Teorema 4.4. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico completo,* Y *uno spazio topologico che soddisfa il* 1° *assioma di numerabilità in* y_0 *e* $F\colon Y \to \mathscr{P}(X)$. *Allora* $Fy \to \mathscr{P}(X)$ *è semicontinua superiormente in* y_0 *se e solo se*

(i) F *è* H-s.c.s. *in* y_0.

(ii) $\lim_{n \to \infty} \Psi\{F(W_n) \setminus F(y_0)\} = 0$, *dove* $\{W_n\}$ *è una base numerabile di intorni di* y_0.

(iii) $\partial A\{F(y_0)\} \subseteq F(y_0)$.

Nota. Nel Teorema 4.4, se F è in particolare una multimappa da Y in $\mathscr{F}(X)$, l'ipotesi (iii) è ridondante. Infatti se X è uno spazio metrico e Y soddisfa il 1° assioma di numerabilità in y_0, posto $\gamma(y_0) = \sup_{x \in \partial\{AF(y_0)\}} d\{x, F(y_0)\}$, vale il seguente lemma.

Lemma 4.5. *Sia $F\colon Y \to \mathscr{P}(X)$ una multimappa, X uno spazio metrico, Y uno spazio topologico che soddisfa il 1° assioma di numerabilità in y_0. Allora, se F e H-s.c.s. in y_0, risulta $\gamma(y_0) = 0$.*

Prova. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno W_ε di y_0 tale che $F(W_\varepsilon) \subseteq B[F(y_0), \varepsilon/2]$. Sia $x \in \partial A\{F(y_0)\}$. Allora si ha

$$x \in \overline{F(W_\varepsilon) \setminus F(y_0)} \subseteq \overline{B[F(y_0), \varepsilon/2]} \subseteq B[F(y_0), \varepsilon]\,,$$

che implica $\gamma(y_0) < \varepsilon$ e, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $\gamma(y_0) = 0$.

Corollario 4.6. *Sia $F\colon Y \to \mathscr{F}(X)$ una multimappa H-s.c.s. in y_0, X uno spazio metrico e Y soddisfi il 1° assioma di numerabilità in y_0. Allora $\partial A\{F(y_0)\} \subseteq F(y_0)$.*

Secondo le tecniche del paragrafo precedente daremo qui una caratterizzazione della Hausdorff semicontinuità superiore.

Lemma 4.7. *Sia (X, d) uno spazio metrico separabile, Y uno spazio topologico e $F\colon Y \to \mathscr{C}(X)$ una multimappa. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *F è H-s.c.s. per ogni $y \in Y$.*
(ii) *Per ogni $\varepsilon > 0$ e $y \in Y$ l'insieme $(F^{-1})^\wedge\{B[F(y_0), \varepsilon]\}$ è aperto in Y.*

Prova. (i) $\to$ (ii). Sia $\bar{y} \in (F^{-1})^\wedge\{B[F(y), \varepsilon]\}$.

Evidentemente $F(\bar{y}) \subseteq B[F(y), \varepsilon]$. Poichè $F(y)$ è compatto esiste un $\varepsilon' > 0$ tale che $B[F(\bar{y}), \varepsilon'] \subseteq B[F(y), \varepsilon]$.

Poichè F è H-s.c.s. in $\bar{y}$, esiste un intorno W di $\bar{y}$ tale che

$$W \subseteq (F^{-1})^\wedge\{B[F(\bar{y}), \varepsilon']\} \subseteq (F^{-1})^\wedge\{B[F(y), \varepsilon]\}\,.$$

(ii) $\to$ (i) Se $y \in Y$, poichè $(F^{-1})^\wedge\{B[F(y), \varepsilon]\}$ è un aperto che contiene y, è esso stesso un intorno di y che soddisfa la definizione di H-s.c.s.

Teorema 4.8. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico separabile,* Y *uno spazio topologico e* $F\colon Y \to \mathscr{C}(X)$ *una multimappa. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

(i) F *è* H-s.c.s. *per ogni* $y \in Y$;

(ii) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una famiglia al più numerabile* $\mathscr{Z}^\varepsilon = \{Z_n^\varepsilon\}$ *di sottoinsiemi aperti di* Y *tale che per ogni* $y \in Y$ *esiste un insieme* $W \subseteq X$ *tale che* $F(y) \subseteq W \subseteq B[F(y), \varepsilon]$ *e* $(F^{-1})^\wedge(W) \in \mathscr{Z}^\varepsilon$.

Prova. (i) $\to$ (ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ si ricopra X con una infinità numerabile di sfere aperte $B(x_i, \varepsilon/2)$ e si ponga $W_i = B(x_i, \varepsilon/2)$.

Definiamo $\mathscr{Z}^\varepsilon$ la famiglia formata da insiemi del tipo $Z_n^\varepsilon = (F^{-1})^\wedge(W)$, dove $W = \bigcup_{i=1}^{r} W_i$. Sia $y \in Y$. $F(y)$ è compatto, quindi

$$F(y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} W_i = W \subseteq B[F(y), \varepsilon] .$$

Dobbiamo provare che $(F^{-1})^\wedge(W)$ è un insieme aperto. Sia $\bar{y} \subseteq (F^{-1})^\wedge(W)$, allora $F(y) \subseteq W \subseteq B[F(y), \varepsilon]$.

Poichè $F(y)$ è compatto, esiste $\varepsilon' > 0$ per cui $F(\bar{y}) \subseteq B[F(\bar{y}), \varepsilon'] \subseteq W \subseteq B[F(y), \varepsilon]$.

Poichè F è H-s.c.s. in $\bar{y}$, esiste un intorno U di $\bar{y}$ tale che

$$U \subseteq (F^{-1})^\wedge\{B[F(\bar{y}), \varepsilon']\} \subseteq (F^{-1})^\wedge(W) .$$

Quindi $(F^{-1})^\wedge(W)$ è un insieme aperto.

(ii) $\to$ (i) Sia $y \in Y$. Per il Lemma 4.7 basta provare che l'insieme $(F^{-1})^\wedge \{B[F(y), \varepsilon]\}$ è un aperto.

Sia $\bar{y} \in (F^{-1})^\wedge\{B[F(y), \varepsilon]\}$. Allora $F(\bar{y}) \subseteq B[F(y), \varepsilon]$ ed esiste $\varepsilon' > 0$ per cui $F(\bar{y}) \subseteq B[F(\bar{y}), \varepsilon'] \subseteq B[F(y), \varepsilon]$.

Per ipotesi esiste un aperto $Z_m^{\varepsilon'}$ in Y ed un insieme W in X tali che $Z_m^{\varepsilon'} = (F^{-1})^\wedge(W)$ e $F(\bar{y}) \subseteq W \subseteq B[F(\bar{y}), \varepsilon'] \subseteq B[F(y), \varepsilon]$.

Ne segue $\bar{y} \in (F^{-1})^\wedge\{F(\bar{y})\} \subseteq Z_m^{\varepsilon'} \subseteq (F^{-1})^\wedge\{B[F(y), \varepsilon]\}$. Quindi $Z_m^{\varepsilon'}$ è un intorno di $\bar{y}$, il che prova la tesi.

Bibliografia

[1] S. Dolecki and S. Rolewicz, *Metric characterization of upper semicontinuity*, J. Math. Anal. Appl. **69** (1979), 146-152.

[2] S. DOLECKI and A. LECHICKI, *Semicontinuité superieure forte et filtres adhérents*, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Mat. **293** (1981), 219-221.

[3] K. KURATOWSKI: $[\cdot]_1$ *A general approach to the theory of set-valued mappings. General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra*, Proc. Third Prague Topological Symposium 1971, Academic Press (1972), 271-280; $[\cdot]_2$ *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York 1966.

[4] S. LEVI, *On classification of functions in separable metric spaces*, Atti Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **69** (1980), 308-312.

Abstract

Two theorems that give a metric characterization of some measurability properties of set-valued functions in a general context are stated, together with another theorem on Hausdorff upper semicontinuity.

* * *