Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984), 115-122

GIUSEPPE MASTROIANNI (*)

Due classi di interi che generalizzano i numeri di Stirling (**)

Introduzione

In questa nota definiamo mediante i numeri di Stirling di prima e di seconda specie, due classi di numeri interi $\{\sigma_{i,j}^{m,p}\}$ e $\{\tau_{i,j}^{m,p}\}$ fra loro « duali ».

I numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$ sono strettamente legati ai momenti di una classe $\{M_n^\alpha\}$ ($\alpha \geqslant 0$, $n \in N$) di operatori lineari e positivi definita nel lavoro [**8**], studiata nei lavori [**9**] e [**3**], che, come caso particolare, contiene l'operatore di Favard-Mirakyon-Szasz [7]$_3$. Talune proprietà di questi numeri risultano essenziali al fine di stabilire alcuni teoremi di tipo asintotico per l'operatore M_n^α. Inoltre, seguendo alcuni procedimenti usati nei lavori [**1**] - [**6**], è possibile definire, mediante M_n^α, una nuova classe $\{M_{n,k}^\alpha\}$ di operatori lineari. Orbene, proprio in virtù di una proprietà dei numeri $\sigma_{i,j}^{m,o}$, $M_{n,k}f$ è una approssimazione di f migliore di $M_n f$, per ogni funzione f sufficientemente regolare.

Riteniamo utile per le applicazioni effettuare, in questa nota, un primo studio dei numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$ e $\tau_{i,j}^{m,p}$.

Assegneremo semplici formule ricorrenti, dimostreremo alcune proprietà e indicheremo le funzioni generatrici. Dedurremo anche alcune identità concernenti i numeri di Stirling di prima e di seconda specie.

Vogliamo esprimere la nostra gratitudine al Prof. L. Carlitz della Duke University di Durham per le osservazioni e gli utili suggerimenti.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica « R. Caccioppoli », Via Mezzocannone 8, 80134 Napoli, Italy.
(**) Ricevuto: 22-X-1982.

1 - I numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$

Indichiamo con S_j^n e s_i^n rispettivamente i numeri di Stirling di prima e di seconda specie, definiti dalle uguaglianze

$$x^{(n)} = \sum_0^{n-1}{}_k\, S_k^n x^{n-k}\,, \qquad x^n = \sum_0^{n-1}{}_k\, s_k^n x^{(n-k)}\,,$$

ove è $x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\,...\,(x-n+1)$.

Sia inoltre

$$S_o^o = s_o^o = 1\,, \qquad s_k^n = s_k^n = 0 \qquad \text{se } k \geqslant n > 0\,. \tag{1.1}$$

Ciò posto, definiamo i numeri interi $\sigma_{i,j}^{m,p}$ $(i, j, m, p \in N)$ mediante l'uguaglianza

$$\sigma_{i,j}^{m,p} = \Delta_1^m(s_i^p\,|S_j^{p-1}|) = \sum_0^m{}_k(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\, s_i^{p+k}\,|S_j^{p+k-i}\,, \tag{1.2}$$

ove la potenza m-ma dell'operatore Δ_1 trasforma il prodotto $s_i^p\,|S_j^{p-i}|$ inteso come funzione della variabile intera p.

Osserviamo ora che per $m = 0$, tenendo conto della prima delle (1.1), dalla definizione si ha

$$\sigma_{o,o}^{o,p} = 1 \qquad (p \geqslant 0)\,, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{i,o}^{o,p} = s_i^p\,, \qquad \sigma_{o,j}^{o,p} = |S_j^p|\,. \tag{1.4}$$

Quindi, per le (1.4), l'insieme dei numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$ contiene i moduli dei numeri di Stirling di prima e di seconda specie.

Una prima proprietà dei numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$ è espressa dal seguente

Teorema 1.I. *Sussiste la relazione*

$$\sum_0^i{}_k\,(-1)^k\sigma_{k,i-k}^{m,p} = 0 \qquad (i > 0)\,. \tag{1.5}$$

Si ha infatti

$$\sum_0^i{}_k(-1)^k\sigma_{k,i-k}^{m,p} = \sum_0^i{}_k(-1)^k\sum_0^m{}_k(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\, s_k^{p+r}\,|S_{i-k}^{p+r-k}|$$

$$= \sum_0^m{}_r(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\sum_0^i{}_k(-1)^k s_k^{p+r}\,|S_{i-k}^{p+r-k}| = 0\,.$$

essendo la somma interna nulla per una nota proprietà dei numeri di Stirling. Ancora dalla (1.2), tenendo conto della seconda delle (1.1), segue

$$\sigma_{i,j}^{m,p} = 0 \quad \text{se } i + j \geqslant m + p \,. \tag{1.6}$$

Per ogni coppia $(m, p) \in N^2$, esiste, pertanto, al più un numero finito di $\sigma_{i,j}^{m,p}$ non nulli.

In tal senso una ulteriore informazione viene dal

Teorema 1.II. *Qualsiasi sia l'intero positivo p, se $i, j, m \in N$ verificano la relazione* (1)

$$i + j < \left[\frac{m+1}{2}\right],$$

allora si ha $\sigma_{i,j}^{m,p} = 0$.

Infatti si dimostra facilmente per induzione che è

$$\Delta_1^m s_i^p = 0 \quad \text{se } m > 2i \,, \qquad \Delta_1^m S_j^{p-i} = 0 \quad \text{se } m > 2j \,.$$

Pertanto, se $m > 2i + 2j$ o equivalentemente, fissato m, se $i + j < [(m+1)/2]$, si ha

$$\sigma_{i,j}^{m,p} = \Delta_1^m (s_i^p |S_j^{p-i}|) = \sum_0^m {}_k \binom{m}{k} \Delta_1^k s_i^{p+m-k} \Delta_1^{m-k} |S_j^{p-i}| = 0 \,,$$

cioè l'asserto.

In particolare è

$$\sigma_{o,o}^{m,p} = 0 \quad m > 0 \,, \qquad p \geqslant 0 \,, \tag{1.7}$$

$$\sigma_{i,j}^{2i+2j,p} = \binom{2i+2j}{2i} (2i-1)!! \, (2j-1)!! \qquad p \geqslant 0 \,, \tag{1.8}$$

$$\sigma_{i,o}^{2i,p} = (2i-1)!! \qquad p \geqslant 0 \,, \tag{1.9}$$

$$\sigma_{o,j}^{2j,p} = (2j-1)!! \qquad p \geqslant 0 \,. \tag{1.10}$$

---

(1) Si indica con $[\alpha]$ la parte intera di $\alpha \in R$.

Immediata conseguenza del Teorema 1.II sono le seguenti identità concernenti i numeri di Stirling di prima e di seconda specie

$$(1.11)\qquad (-1)^r s_i^{2i+r+1} = \sum_1^{i+r}{}_k (-1)^{i+k} \binom{2i+r+1}{i+k} s_i^{i+k} \qquad r\geq 0\,,$$

$$(1.12)\qquad (-1)^r |S_j^{2j+r+1}| = \sum_1^{j+r}{}_k (-1)^{j+k} \binom{2j+r+1}{j+k} |S_j^{j+k}| \qquad r\geq 0\,,$$

$$(1.13)\qquad (-1)^r s_i^{2i+2j+r+1} |S_j^{i+2j+r+1}|$$

$$= \sum_1^{i+j+r}{}_k (-1)^{i+j+k} \binom{2i+2j+r+1}{i+j+k} s_i^{i+j+k} S_j^{j+k} \qquad r\geq 0\,.$$

Osserviamo ora che la (1.2), mediante la quale sono stati definiti i numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$, può essere anche utilmente impiegata per il loro effettivo calcolo. Tuttavia, a tal fine risulterà più semplice fare uso delle seguenti formule di ricorrenza

$$(1.14)\qquad \sigma_{1,o}^{1,p} = p\,, \qquad \sigma_{i,o}^{m+1,p} = (p+m+1-i)\sigma_{i-1,o}^{m,p} + m\sigma_{i-1,o}^{m-1,p}\,,$$

$$(1.15)\qquad \sigma_{o,1}^{1,p} = p\,, \qquad \sigma_{o,j}^{m+1,p} = (p+m)\sigma_{o,j-1}^{m,p} + m\sigma_{o,j-1}^{m-1,p}\,,$$

$$(1.16)\qquad \sigma_{i,j}^{m+1,p} = (p+m+1-i)\sigma_{i-1,j}^{m,p} + (p+m-i)\sigma_{i,j-1}^{m,p}$$

$$+ m(\sigma_{i-1,j}^{m-1,p} - \sigma_{i,j-1}^{m-1,p})\,,$$

ove è $m, i, j \geq 1$ e $p \geq 0$.

Ometteremo le dimostrazioni di (1.14) e (1.15) perchè perfettamente analoghe alla seguente dimostrazione della (1.16).

Si ha infatti

$$\sigma_{i,j}^{m+1,p}$$

$$= \Delta_1^{m+1}(s_i^p |S_j^{p-i}|) = \Delta_1^m(\Delta_1 s_i^p |S_j^{p-i}|) = \Delta_1^m(|S_j^{p+1-i}|\Delta_1 s_i^p + s_i^p \Delta_1 |S_j^{p-i}|)$$

$$= \Delta_1^m((p+1-i)s_{i-1}^p |S_j^{p+1-i}|) + \Delta_1^m((p-i)s_i^p |S_{j-1}^{p-i}|)\,.$$

D'altra parte si ha

$$\Delta_1^m((p+1-i)s_{i-1}^p|S_j^{p+1-i}|)$$

$$= \sum_0^m{}_k \binom{m}{k} \Delta_1^k((p+m+1-i-k))\Delta_1^{m-k}(s_{i-1}^p|S_j^{p+1-i}|)$$

$$= (p+m+1-i)\sigma_{i-1,j}^{m,p} + m\sigma_{i-1,j}^{m-1,p},$$

$$\Delta_1^m((p-i)s_i^p|S_{j-1}^{p-i}|) = \sum_0^m{}_k \binom{m}{k} \Delta_1^k((p+m-i-k)(\Delta_1^{m-k}(s_i^p|S_{j-1}^{p-1}|)$$

$$= (p+m-i)\sigma_{i,j-1}^{m,p} + m\sigma_{i,j-1}^{m-i,p};$$

sostituendo si ottiene facilmente la (1.16).

Le formule (1.3), (1.6), (1.14), (1.15), (1.16) ed il Teorema 1.II consentono di ottenere il seguente

Teorema 1.III. *Qualsiasi siano $m, p, i, j \in N$, è*

$$\sigma_{i,j}^{m,p} \begin{cases} > 0 & se\ [\frac{m+1}{2}] \leqslant i+j \leqslant m+p-1 \\ = 0 & nei\ rimanenti\ casi\,. \end{cases}$$

Segnaliamo ancora i seguenti casi particolari

$$\sigma_{m+p,o}^{m+1,p} = 1 \qquad m > 0,\ p \geqslant 0\,, \tag{1.17}$$

$$\sigma_{o,m+p}^{m+1,p} = (m+p)! \qquad m > 0,\ p \geqslant 0\,. \tag{1.18}$$

Si verifica infine che una funzione generatrice è data dalla

$$\sum_0^\infty{}_m (-1)^{m+p}\frac{y^m}{m!}\sum_{\overline{m}}^{m+p-1}{}_{i+j}(-1)^j x^{m+p-i-j} z^{m+p-i}\sigma_{i,j}^{m,p} \tag{1.19}$$

$$= e^{xyz} D^p[1+z(e^y-1)]^x\,,$$

ove $\overline{m} = [\frac{m+1}{2}]$, $\quad D = \frac{d}{dy}$, $p \geqslant 0$.

Riportiamo, a titolo di esempio, i primi numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$, con $p = 0$ ed $m \leqslant 6$.

0	0	1	0	0	2	0	0	3	6	0	0	0	24	24	0	0	0	15	150	120
	1	0	0	3	0	0	6	12	0	0	0	50	60	0	0	0	45	410	360	0
			0	0	0	3	7	0	0	0	36	50	0	0	0	45	403	390	0	0
						0	0	0	0	10	15	0	0	0	15	168	180	0	0	0
										1	0	0	0	0	25	31	0	0	0	0
															1	0	0	0	0	0

2 - I numeri $\tau_{i,j}^{m,p}$

Con le notazioni già introdotte, definiamo i numeri $\tau_{i,j}^{m,p}$ mediante la posizione

$$\tau_{i,j}^{m,p} = \Delta_1^m(|S_i^p| s_j^{p-i}) = \sum_0^m{}_k (-1)^{m-k} \binom{m}{k} |S_i^{p+k}| s_j^{p+k-i} . \tag{2.1}$$

Come risulta evidente, i numeri $\tau_{i,j}^{m,p}$ si possono ottenere dai numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$ scambiando i numeri di Stirling di prima specie con quelli di seconda specie; diremo, per questo, che i numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$ e $\tau_{i,j}^{m,p}$ sono fra loro « duali ».

Inoltre, come fra breve vedremo, i numeri $\tau_{i,j}^{m,p}$ conservano numerose proprietà dei numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$.

Si ha infatti

$$\tau_{o,o}^{o,p} = 1 \qquad p \geqslant 0 , \tag{2.2}$$

$$\tau_{i,o}^{o,p} = |S_i^p| , \qquad \tau_{o,j}^{o,p} = s_j^p , \tag{2.3}$$

e quindi anche l'insieme dei numeri $\tau_{i,j}^{m,p}$ contiene i moduli dei numeri di Stirling. Dalla definizione segue pure

$$\tau_{i,j}^{m,p} = 0 \qquad i + j \geqslant m + p . \tag{2.4}$$

Valgono anche i seguenti teoremi dei quali si omette la dimostrazione perchè analoga a quella dei corrispondenti teoremi relativi ai numeri $\sigma_{i,j}^{m,p}$.

Teorema 2.I. *Sussiste la relazione*

$$\sum_0^i{}_k (-1)^k \tau_{k,k-i}^{m,p} = 0 \qquad i > 0 . \tag{2.5}$$

Teorema 2.II. *Per ogni* $p \in N$, *se* $m, i, j \in N$ *verificano la relazione* $i + j < [(m+1)/2]$, *allora è* $\tau_{i,j}^{m,p} = 0$.

Le formule (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) e (1.12) possono completamente riproporsi con la ovvia sostituzione del simbolo σ con τ. Alla (1.13) subentra naturalmente la duale

(2.6) $$(-1)^r |S_i^{2i+2j+r+1}| s_j^{2j+i+r+1}$$

$$= \sum_1^{i+j+r} {}_k (-1)^{i+j+k} \binom{2i+2j+r+1}{i+j+k} |S_i^{i+j+k}| s_j^{j+k} \qquad r \geqslant 0 .$$

Al fine di stabilire analoghe formule iterative, col procedimento già usato per dimostrare le (1.14), (1.15) e (1.16), si ottengono per ogni $p \geqslant 0$ le seguenti formule ricorrenti

(2.7) $$\tau_{1,0}^{1,p} = p , \qquad \tau_{i,0}^{m+1,p} = (m+p)\tau_{i-1,0}^{m,p} + m\tau_{i-1,0}^{m-1,p} ,$$

(2.8) $$\tau_{0,1}^{1,p} = p , \qquad \tau_{0,j}^{m+1,p} = (p+m+1-j)\tau_{0,j-1}^{m,p} + m\tau_{0,j-1}^{m-1,p} ,$$

(2.9) $$\tau_{i,j}^{m+1,p} = (p+m)\tau_{i-1,j}^{m,p} + (p+m+1-i-j)\tau_{i,j-1}^{m,p}$$
$$+ m(\tau_{i-1,j}^{m-1,p} + \tau_{i,j-1}^{m-1,p})$$

con $m, i, j \geqslant 1$.

In particolare, per $m \geqslant 1$ e $p \geqslant 0$, si ha

$$\tau_{m+p,0}^{m+1,p} = (m+p)! , \qquad \tau_{0,m+p}^{m+1,p} = 1 .$$

Le formule (2.2), (2.4), (2.7), (2.8), (2.9) ed il Teorema 2.II consentono la dimostrazione del

Teorema 2.III. *Qualsiasi siano* $m, p, i, j \in N$, *si ha*

$$\tau_{i,j}^{m,p} \begin{cases} > 0 & \textit{se } [\frac{m+1}{2}] \leqslant i + j \leqslant m + p - 1 , \\ = 0 & \textit{nei rimanenti casi} . \end{cases}$$

I numeri $\tau_{i,j}^{m,p}$ risultano sufficientemente caratterizzati e facilmente calcolabili.

A titolo di esempio, riportiamo i primi numeri $\tau_{i,j}^{m,p}$ per $p = 0$ ed $m \leqslant 6$.

0	0 1	0 0 1	0 0 3 1	0 0 0 10 1	0 0 0 15 25 1
	1 0	0 3 0	0 6 6 0	0 0 40 10 0	0 0 45 165 15 0
		2 0 0	3 11 0 0	0 50 35 0 0	0 45 385 85 0 0
			6 0 0 0	20 50 0 0 0	15 375 225 0 0 0
				24 0 0 0 0	130 274 0 0 0 0
					120 0 0 0 0 0

Una funzione generatrice dei numeri $\tau_{i,j}^{m,o}$ è data da

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{m} \frac{y^m}{m!} \sum_{\overline{i+j}=m}^{m-1} x^{(m-i-j)} z^{m-i} \tau_{i,j}^{m,o} = [(1-y)^z + yz] . \tag{2.10}$$

Bibliografia

[1] P. L. Butzer, *Linear combination of Bernstein polinomials*, Canad. J. Math. **5** (1953), 559-567.

[2] M. Frentiu, *Combinatii liniare de polinoame Bernstein si de operatori Mirakyan*, Mathematica-Mecanica **1** (1970).

[3] G. Mastroianni, *Una generalizzazione dell'operatore di Mirakyan*, Liguori Ed. 1981.

[4] G. Mastroianni e M. R. Occorsio: $[\cdot]_1$ *Una generalizzazione dell'operatore di Bernstein*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **44** (1977), 151-169; $[\cdot]_2$ *Una generalizzazione dell'operatore di Stancu*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **45** (1979), 1-16.

[5] C. P. May, *Saturation and inverse theorems for combination of a class of exponential type operators*, Canad. J. Math. **28** (1976), 1224-1250.

[6] C. Micchelli, *The saturation class and iterates of the Bernstein polinomials*, J. Approx. Theory **8** (1973), 1-18.

[7] G. Mirakyan, *Approximation des fonctions continues en moyen de polinome de la forme ...*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **31** (1941).

[8] S. P. Pethe and G. C. Jain, *Approximation of functions by a Bernstein type operator*, Canad. Math. Bull. **15** (1972), 551-557.

[9] D. D. Stancu, *Representari ale restului intro formula de aproximare de tip Favard*, Seminarul itinerant de equatii functionale, approximare si convexitate, 17-19 mai 1979, Cluj-Naponica, Romania.

Summary

Two classes of integer numbers related to moments of linear positive operators are introduced and studied by using Stirling's numbers.

* * *