Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 137-142

F. Milazzo e V. Vacirca (*)

Colorazioni totali di specie superiore di un grafo (**)

1 – Sia $G(V, S)$ un *grafo* non orientato, semplice. Se $\mathscr{C}(x, y)$ indica una catena di estremi $x, y \in V$ ed $l(\mathscr{C}(x, y))$ la sua lunghezza, ponendo

$$d(x, y) = \min_{\mathscr{C}(x,y)} l(\mathscr{C}(x, y)) ,$$

si definisce in ogni componente connessa di G uno spazio metrico di distanza d. Se x e y sono due vertici appartenenti a componenti connesse distinte si pone $d(x, y) = \infty$.

Un'applicazione $K\colon V \cup S \to C$ (insieme di colori) si dice *colorazione totale* di G se $K_{/V}$ è una colorazione dei vertici di G, $K_{/S}$ è una colorazione degli spigoli di G, ed inoltre risulta $K(x) \neq K(y)$ per ogni $x \in V$, $y \in S$, x estremo di y. *Numero cromatico totale* di G è il minimo numero τ di colori necessario per poter definire in G una colorazione totale [**1**].

In [**8**]$_2$ F. Speranza ha definito *colorazione* L_s (dei vertici di G), per $s \in \mathbf{N}$, un'applicazione $K\colon V \to C$ tale che

$$\forall x, y \in V\,, \quad x \neq y\,, \qquad d(x, y) \leqslant s \Rightarrow K(x) \neq K(y)\,.$$

Il *numero s-cromatico* di G è il minimo numero γ_s di colori necessario per potere definire in G una colorazione L_s. Risultati sulle colorazioni L_s di un grafo si trovano in [**4**], [**5**], [**6**], [**8**]$_2$.

In modo analogo si possono definire le colorazioni totali T_s di G. Diremo θ-distanza definita in G l'applicazione $\theta\colon (V \cup S)^2 \to N$, tale che $\theta(x, y) = 0$ se $x = y$, mentre per $x \neq y$: $\theta(x, y) = d(x, y)$, $\forall x, y \in V$; $\theta(x, y) = 1 + \min d(x, v)$

(*) Indirizzo: Seminario Matematico, Città Universitaria, via A. Doria 6, 95125 Catania, Italy.

(**) Ricevuto: 27-X-1982.

(v extremo di y) $\forall x \in V$, $\forall y \in S$; $\theta(x, y) = 1 + \min d(u, v)$ (u estremo di x, v estremo di y) $\forall x, y \in S$.

Posto $I(G) = V \cup S$, il θ-diametro di un $X \subseteq I(G)$ sarà $\max\limits_{x,y \in X} \theta(x, y)$.

Si dirà *colorazione* (*totale*) T_s di G un'applicazione $K\colon V \cup S \to C$, tale che

$$\forall x, y \in V \cup S\,, \qquad \theta(x, y) \leqslant s \Rightarrow K(x) \neq K(y)\,.$$

Se $s \in N$, *numero s-cromatico totale* di G sarà il minimo numero τ_s di colori necessario per potere definire in G una colorazione T_s. Per $s = 1$, una colorazione T_1 è una colorazione totale (classica) di G, τ_1 è il numero cromatico totale di G.

Dato un grafo $G(V, S)$, si dirà grafo *T-associato a G* il grafo $G_T(V \cup S, Z)$, dove $\{x, y\} \in Z$ se e solo se $x \in V$, $y \in S$, e x è un estremo di y.

In questo lavoro si determinano alcuni risultati relativi alle colorazioni T_s di un grafo ed al suo numero s-cromatico totale τ_s. Tra le altre cose, si studiano grafi aventi numero s-cromatico totale uguale a valori prefissati, e si determina τ_s per particolari classi di grafi.

Se $r \in R$, $[r]$ (rispettivamente $[r]^*$) sarà il massimo (risp. minimo) intero non maggiore (risp. non minore) di r. Se $m, n \in N$, $n \neq 0$, $Q(m, n)$ ed $R(m, n)$ saranno rispettivamente il quoziente e il resto della divisione $m:n$. Nel seguito per indicare che, in un grafo G, un vertice x è estremo di uno spigolo y si scriverà $x \in y$.

2 – Dimostriamo i seguenti lemmi.

Lemma 1. *Sia $G(V, S)$ un grafo e G_T il grafo ad esso T-associato. Si ha $\theta(x, y) \leqslant s$ in G se e solo se $d(x, y) \leqslant 2s$ in G_T.*

Sia $\theta(x, y) \leqslant s$ in G. Se $x, y \in V$ (risp. $x, y \in S$) e $\theta(x, y) = p$ esistono in G p spigoli (risp. vertici) t_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) tali che $x \in t_1$, $y \in t_p$, $t_i \cap t_{i+1} \neq \emptyset$ (risp. $t_1 \in x$, $t_p \in y$, $\{t_i, t_{i+1}\} \in S$), $i = 1, 2, \ldots, p - 1$.

Esiste allora in G_T la catena $\mathscr{C}_T(x, y)$ di vertici x, t_1, $t_1 \cap t_2$, $t_2, \ldots, t_i$, $t_i \cap t_{i+1}$, $t_{i+1}, \ldots, y$ (risp. x, t_1, $\{t_1, t_2\}$, $t_2, \ldots, t_i$, $\{t_i, t_{i+1}\}$, $t_{i+1}, \ldots, y$) di lunghezza $2p$. Segue $d(x, y) = 2p \leqslant 2s$ in G_T.

Se $x \in V$, $y \in S$, esistono in G $p - 1$ spigoli t_i, $i = 1, 2, \ldots, p - 1$, tali che $x \in t_1$, $t_i \cap t_{i+1} \neq \emptyset$ per $i = 1, 2, \ldots, p - 2$,$t_{p-1} \cap y \neq \emptyset$. Esiste allora in G_T la catena $\mathscr{C}_T(x, y)$ di vertici x, t_1, $t_1 \cap t_2$, $t_2, \ldots, t_i$, $t_i \cap t_{i+1}$, $t_{i+1}, \ldots$, $t_{p-1} \cap y, y$, di lunghezza $2p - 1 < 2s$. Dunque in ogni caso $d(x, y) \leqslant 2s$.

Sia, adesso, $d(x, y) = p \leqslant 2s$ in G_T. Se $x, y \in V$ (risp. $x, y \in S$) necessariamente p è pari. Se $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sono gli spigoli di una catena di lunghezza p di G_T con $x \in t_1$, $y \in t_p$, esiste in G la catena $\mathscr{C}(x, y)$ di vertici $x, t_2 \cap t_3$, $t_4 \cap t_5$,

$\ldots, t_{p-2} \cap t_{p-1}, y$ (risp. $t_1 \cap t_2, t_3 \cap t_4, \ldots, t_{p-1} \cap t_p$, con $t_1 \cap t_2 \in x$, $t_{p-1} \cap t_p \in y$) di lunghezza $p/2$. Se $x \in V$, $y \in S$, necessariamente è p dispari. Dunque se $d(x, y) = p \leqslant 2s$, è $p \leqslant 2s - 1$. Esiste in G_T una catena $\mathscr{C}_T(x, y)$ avente per spigoli $t_1, t_2, \ldots, t_p$ con $x \in t_1$, $y \in t_p$. Segue che $x, t_2 \cap t_3$, $t_4 \cap t_5, \ldots, t_{p-1} \cap t_p$ sono i vertici di una catena di G di lunghezza $(p-1)/2$, con $t_{p-1} \cap t_p \in y$. Si ha pertanto $\theta(x, y) = (p-1)/2 + 1 = (p+1)/2 \leqslant s$ in G. Da cui la tesi.

Lemma II. *Sia $G(V, S)$ un grafo e G_T il grafo ad esso T-associato. Si ha:* (*i*) *se K è una colorazione T_s di G, allora K è una colorazione L_{2s} di G_T, e viceversa*; (ii) $\tau_s(G) = \gamma_{2s}(G_T)$.

Per il Lemma I, se $K\colon V \cup S \to C$ allora

$$\big(\theta(x, y) \leqslant s \text{ in } G \Rightarrow K(x) \neq K(y)\big) \Leftrightarrow \big(d(x, y) \leqslant 2s \Rightarrow K(x) \neq K(y)\big)\,,$$

da cui la (i). La (ii) segue immediatamente dalla (i).

3 – Detto δ il diametro di $I(G)$, se $\delta \geqslant s$ risulta $p = |I(G)| \geqslant 2s + 1$ e quindi $\tau_s \geqslant 2s + 1$. Invece:

Teorema I. *Fissato $r \leqslant 2s$, si ha $\tau_s = r$ se e solo se* $\max\limits_J |I(J)| = r$, *con J componente connessa di G.*

Infatti, per il Lemma II, se $\tau_s(G) = r$ allora $\gamma_{2s}(G_T) = r$. Da $\gamma_{2s}(G_T) = r$, $r \leqslant 2s$, per il Teorema II di [**8**]$_2$, segue $\max |V(X)| = r$, dove X è una componente connessa di G_T, e quindi $\max\limits_J |I(J)| = r$. In modo analogo si ottiene il viceversa.

Esauriti i casi per cui $\tau_s \leqslant 2s$, il massimo *significativo* di τ_s non è inferiore a $2s + 1$. Determiniamo ora i grafi per cui $\tau_s = 2s + 1$.

Teorema II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè, per un grafo G, sia $\tau_s = 2s + 1$ è che ogni sua componente connessa sia di almeno uno dei seguenti tipi*: (a) *abbia al piú $2s + 1$ elementi*; (b) *sia un tronco*; (c) *sia un ciclo di lunghezza $n(2s + 1)$, $n \in \mathbf{N}$; e inoltre vi sia una componente connessa con almeno $2s + 1$ elementi.*

Infatti, per il Lemma II, da $\tau_s(G) = 2s + 1$ segue $\gamma_{2s}(G_T) = 2s + 1$; da $\gamma_{2s}(G_T) = 2s + 1$ e $2s \geqslant 2$, per il Teorema II di [**8**]$_2$, segue che G_T ha almeno una componente connessa con almeno $2s + 1$ vertici e che ogni sua componente connessa o ha al più $2s + 1$ vertici, o è un tronco, o è un ciclo di lunghezza (pari, per la natura di G_T) multipla di $2s + 1$. Da ciò segue che ogni componente connessa di G è del tipo (a), o (b), o (c) e che G ha almeno una componente connessa con almeno $2s + 1$ elementi. In modo analogo si dimostra il viceversa.

Sia ora G un grafo finito con $p = |I(G)|$. Il massimo di τ_s, per un valore fissato di p, si ottiene per quei grafi nei quali, in una colorazione T_s, è necessario attribuire ad ogni elemento di $I(G)$ (vertice o spigolo) un colore diverso da tutti gli altri. Ciò accade certamente se $p \leqslant 2s$. Esaminiamo, allora, i grafi in cui si ha $p > 2s$.

Teorema III. *Se $p > 2s$, si ha $\tau_s = p$ (valore massimo di τ_s compatibile con p) se e solo se il θ-diametro del grafo è minore o uguale a s.*

Infatti, per il Lemma II, da $\tau_s(G) = p$ segue $\gamma_{2s}(G_T) = p$; da $\gamma_{2s}(G_T) = p$, $p > 2s$, per il Teorema III di [**8**]$_2$ segue diam $(G_T) \leqslant 2s$ e quindi, per il Lemma I, θ - diam $(G) \leqslant s$. Analogamente si prova il viceversa.

4 – In questo numero determineremo i valori di τ_s per alcuni grafi particolari.

(A) Sia $G(V, S)$ un grafo. Posto

$$\theta_s(G) = \max\{|X| : X \subseteq V \cup S,\ \theta - \operatorname{diam} X \leqslant s\}\ , \qquad \text{si ha}$$

Teorema IV. *Per ogni albero $G(V, S)$ risulta $\tau_s = \theta_s(G)$.*

Se G è un albero anche il grafo G_T ad esso T-associato è un albero. Per il Teorema 2.4 di [**4**] si ha pertanto $\gamma_{2s}(G_T) = d_{2s}(G_T)$, dove $d_{2s}(G_T) = \max\{|X| :$ $X \subseteq V \cup S$, diam $X \leqslant 2s$ in $G_T\}$.

Essendo allora $d_{2s}(G_T) = \theta_s(G)$ e $\gamma_{2s}(G_T) = \tau_s$, risulta $\tau_s = \theta_s(G)$.

(B) Sia $G(V, S)$ un ciclo di lunghezza l. Si ha $|I(G)| = 2l$. Nel caso $2l > 2s + 1$, posto $R = R(2l, 2s + 1)$ e $Q = Q(2l, 2s + 1)$ da $R(2l, 2s + 1) = 0$ segue $2l = (2s + 1) \cdot Q(2l, 2s + 1)$ e quindi, per il Teorema II, $\tau_s = 2s + 1$. Invece

Teorema V. *Se G è un ciclo di lunghezza l, con $l > 2s + 1$, e $k \in N$ è tale che $kQ < R \leqslant (k + 1)Q$, risulta $\tau_s = 2s + 2 + k$.*

Infatti, poichè $2l = (2s + 1)Q + R = (2s + 2 + k)(R - kQ) + (2s + 1 + k)$ $\cdot [(k + 1)Q - R]$ è possibile ripartire i $2l$ elementi di $I(G)$ in $R - kQ > 0$ raggruppamenti $\varrho_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$ di $2s + 2 + k$ elementi ciascuno e in $(k + 1)$ $\cdot Q - R$ raggruppamenti $\varrho'_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots\}$ di $2s + 1 + k$ elementi ciascuno, in modo che il sottografo generato dagli elementi di ogni raggruppamento sia connesso. Se $C\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ è un insieme di $2s + 2 + k$ colori e $C' = C - \{\alpha_{2s+2+k}\}$

definiamo l'applicazione $K\colon V \cup S \to C$ con $K(a_{ij}) = \alpha_j$, per ogni $a_{ij} \in \varrho_i$, e $K(b_{ij}) = \alpha_j$, per ogni $b_{ij} \in \varrho_i'$ e $\alpha_j \in C'$; si verifica immediatamente che K è una colorazione di G mediante $2s + 2 + k$ colori. È pertanto $\tau_s \leqslant 2s + 2 + k$. Non è possibile però che sia $\tau_s < 2s + 2 + k$. Se infatti esistesse una colorazione T_s di G mediante $2s + 1 + k$ colori, ciascuno di questi potrebbe al più essere associato a Q elementi di $I(G)$. Ne seguirebbe $2l \leqslant Q\cdot(2s + 1 + k) = Q(2s + 1) + kQ$ e, essendo $2l = Q(2s + 1) + R$, $R \leqslant kQ$, contro l'ipotesi $R > kQ$.

Si conclude che $\tau_s = 2s + 2 + k$.

(C) Sia G un grafo completo con $|V| = v$, cioè $G = K_v$.

Teorema VI. *Per ogni K_v e per ogni $s \geqslant 2$ si ha* $\tau_s = \binom{v+1}{2}$.

Facilmente si prova che in un grafo completo K_v si ha $\theta(x, y) \leqslant 2$ per ogni $x, y \in I(K_v)$. Essendo $|I(K_v)| = \binom{v+1}{2}$, segue $\tau_s = \binom{v+1}{2}$.

Per $s = 1$ è stato dimostrato in [3] che $\tau_1(K_v) = 2[v/2] + 1$.

4 – Osserviamo che ogni colorazione T_{s+1} è anche una colorazione T_s, e $\tau_s \leqslant \tau_{s+1}$. Cerchiamo ora i grafi per i quali ogni colorazione T_s è anche una colorazione T_{s+1}.

Dimostriamo il seguente

Teorema VII. *Condizione necessaria e sufficiente perchè in un grafo G ogni colorazione T_s sia anche una colorazione T_{s+1} è che il θ-diametro di ogni componente connessa di G non sia superiore a s.*

Supponiamo che il θ-diametro di ogni componente connessa non superi s; allora se K è una colorazione T_s di G, per ogni componente connessa J di G si ha $K(I(J)) = |I(J)|$. Segue facilmente che K è anche una colorazione T_{s+1} di G.

Viceversa, supponiamo che per G ogni T_s sia anche una T_{s+1}. In tal caso non vi possono essere in una componente connessa di G due elementi a distanza $s + 1$. Infatti se esistessero in una componente connessa J di G due elementi $x, y \in I(J)$ a distanza $s + 1$, ponendo $K(x) = K(y) = \alpha$ e $K(z_i) = \alpha_i \neq \alpha$ per ogni $z_i \neq x, y$ e $z_i \in I(J)$, K sarebbe una colorazione T_s di G ma non una colorazione T_{s+1}.

Dal teorema dimostrato seguono facilmente i seguenti corollari.

Corollario I. *Se in un grafo G ogni colorazione T_s è anche una colorazione T_{s+1}, per ogni componente connessa J di G si ha $\tau_s(J) = |I(J)|$, e la colorazione è pure una T_t, per ogni $t \geqslant s$.*

Corollario II. *Per un grafo connesso, condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni colorazione totale sia una colorazione T_s ($s \in N$ prefissato) è che il θ-diametro del grafo sia $\leqslant 1$.*

Dal Teorema VII segue anche che in un grafo, nel quale ogni componente connessa ha θ-diametro $\leqslant s$, si ha $\tau_s = \tau_{s+1}$. Vi sono però grafi per i quali $\tau_s = \tau_{s+1}$ con colorazioni T_s che non sono T_{s+1}. Ciò accade, ad esempio, in un ciclo di lunghezza $l = Q(2s+3)$, con $4Q < 2s+1$. In tal caso, per il Teorema V, si ha $\tau_s = \tau_{s+1} = 2s+3$, mentre non è vero che ogni T_s è una T_{s+1}. Infatti, ordinando i $2l = 2Q(2s+3)$ elementi del ciclo in $2Q$ sequenze di $2s+1$ elementi ciascuna ed in una sequenza di $4Q$ elementi e attribuendo i colori distinti $C_0, C_1, \ldots, C_{2s}$ nell'ordine agli elementi di ciascuna delle prime e altri colori distinti $C_1', C_2', \ldots, C_{4Q}'$ agli elementi dell'ultima sequenza, si ottiene una T_s che non è una T_{s+1}.

Bibliografia

[1] M. Behzad, *The total chromatic number of a graph: A survey*, Combinatorial Mathematics and its Application, Academic Press, London 1971.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] R. J. Cook, *Complementary graphs and total chromatic numbers*, SIAM **27**, n. 4 (1974), 626-628.

[4] M. Gionfriddo, *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15**-A (1978), 444-454.

[5] A. Lizzio e S. Milici, *Determinazione di $v_3(1)$, $v_3(2)$, $v_4(1)$ in un grafo e condizioni sufficienti per $\Delta_s = 0$*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 379-386.

[6] M. C.Marino e L. Puccio, *Sul parametro $\Delta_s(G)$ d'un grafo planare*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 9-13.

[7] J. C. Meyer, *Nombre chromatique total d'un hypergraphe*, J. Comb. Th. (B) **24** (1978), 44-50.

[8] F. Speranza: [•]$_1$ *Numero cromatico, omomorfismi e colorazioni d'un grafo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **102** (1975), 359-367; [•]$_2$ *Colorazioni di specie superiore d'un grafo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12**, suppl. fasc. 3 (1975). 53-62.

Summary

In this paper we introduce the concept of total T_s-colourings of an undirected graph and the corresponding notion of total s-chromatic number τ_s. Further, we characterize the graphs having a prescribed significative number τ_s and we determine τ_s for some fundamental classes of graphs.

* * *