Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 143-150

LAURA NICOLO'-AMATI GORI (*)

Un metodo iterativo per la soluzione di un problema ai limiti con argomento deviato (**)

1 - Introduzione

In questo lavoro si considera un problema ai limiti per una equazione differenziale del 2° ordine non lineare, con argomento deviato, del tipo

$$(1.1)_1 \qquad x''(t) = f[t, x(t), x(h(t, x(t)))] \qquad 0 \leqslant t \leqslant a\,,$$

$$(1.1)_2 \qquad x(t) = \varphi_1(t) \qquad t \leqslant 0\,,$$

$$(1.1)_3 \qquad x(t) = \varphi_2(t) \qquad t \geqslant a\,.$$

Un notevole interesse è stato riservato, in anni recenti, allo studio di problemi di questo genere, poichè le equazioni con argomento deviato si prestano a fornire modelli matematici di processi in vari campi dell'applicazione.

Tra i lavori dedicati a questo argomento, ricordiamo, ad esempio [**2**], [**5**]$_1$, [**6**], [**11**]$_{1,2}$, dove vengono dati teoremi di esistenza ed unicità della soluzione, sia nel caso di equazioni lineari, che non lineari; per queste ultime risultati molto generali sono contenuti in [**5**]$_2$; in [**9**] viene dato un teorema di esistenza ed unicità della soluzione di un problema ai limiti, per un'equazione differenziale non lineare con argomento deviato, di ordine n.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Facoltà di Ingegneria, Via A. Scarpa 10, 00161 Roma, Italy.

(**) Ricevuto: 2-XI-1982.

Per la soluzione di problemi del tipo (1.1) è difficile fornire metodi numerici efficienti a causa della presenza dell'argomento deviato; risultati in questo senso sono contenuti, ad esempio, in [4] e in [10], limitatamente al caso che l'argomento $h(t, x(t))$ sia un argomento ritardato.

In questo lavoro verrà generalizzato un metodo iterativo dato in [1] e in [3], per problemi relativi ad equazioni differenziali ordinarie del primo e secondo ordine rispettivamente; si giungerà così a dare delle condizioni sufficienti per la convergenza di un metodo, atto alla valutazione numerica, che conduce, in pari tempo, alla esistenza ed unicità della soluzione di un problema del tipo (1.1).

2 - Alcune premesse

In questo paragrafo verranno premessi alcuni concetti, dei quali si farà uso in seguito, e che riguardano disequazioni differenziali non lineari, relative ai numeri derivati secondi (secondo Schwarz) ottenute in [7].

Una qualsiasi derivata di una funzione $x(t)$ sarà indicata con $D'x(t)$, la derivata seconda superiore secondo Schwarz ([8]) con $D''_B x(t)$. Per ogni funzione dotata di derivata seconda, risulta ([7])

$$D''_B x(t) \geqslant -\,|x''(t)|\,. \tag{2.1}$$

Una funzione $F[t, x(t)]$ si dice ([7]) *generalmente monotona in* $x(t)$, con $t \in [0, a]$, se, ammesso che l'equazione omogenea $x''(t) + \lambda_1(t)x'(t) + \lambda_2(t)x(t) = 0$ abbia una soluzione positiva in $[0, a]$ e detta $x(t)$ una soluzione della equazione

$$x''(t) + \lambda_1(t)x'(t) = F[t, x(t)]\,, \tag{2.2}$$

risulta valida la

$$F[t, x(t)] - F[t, \bar{x}(t)] \geqslant -\,\lambda_2(t)[x(t) - \bar{x}(t)]\,, \qquad x(t) > \bar{x}(t)\,. \tag{2.3}$$

Sussiste il seguente teorema, dimostrato in [7].

Teorema 1. *Nell'intervallo* $[0, a]$ *la funzione* $F[t, x(t)]$ *sia continua e generalmente monotona in* $x(t)$, *la funzione* $y(t)$ *sia continua e soddisfi la disequazione differenziale*

$$D''_B y(t) + \lambda_1(t)D'y(t) \geqslant F[t, y(t)]\,, \tag{2.4}$$

con le condizioni

$$y(0) \leqslant \bar{x}(0)\,, \qquad y(a) \leqslant \bar{x}(a)\,, \tag{2.5}$$

dove $\bar{x}(t)$ *è soluzione di* (2.2). *Risulta allora, per* $t \in [0, a]$

$$y(t) \leqslant \bar{x}(t)\,. \tag{2.6}$$

3 - Metodo iterativo

In questo paragrafo sarà trattato il problema (1.1), supponendo che l'argomento deviato $h[t, x(t)]$ sia indipendente da $x(t)$. Posto

$$J_1 = (-\infty, 0]\,, \qquad I = [0, a]\,, \qquad J_2 = [a, +\infty]\,,$$

le funzioni $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ siano continue e limitate in J_1 e J_2 rispettivamente; posto poi

$$M = \max\left(\max_{t \in J_1} |\varphi_1(t)|\,, \max_{t \in J_2} |\varphi_2(t)|\right), \tag{3.1}$$

si definiscono gli insiemi

$$G = [-M, M]\,, \qquad H = [0, 2M]\,, \qquad D = I \times G \times G\,, \qquad E = I \times H \times H\,, \tag{3.2}$$

e si suppone che la funzione $h(t)$ sia continua in I, la funzione $f(t, x, y)$ sia continua in D e verifichi le seguenti ipotesi (α) e (β):

(α) il problema $x''(t) = f[t, x(t), g(t)]$, $x(0) = \varphi_1(0)$, $x(a) = \varphi_2(a)$

ammetta un'unica soluzione $x(t)$, per ogni fissata $g(t) \in G$;

(β) risulti, in D, $|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})| \leqslant F(t, |x - \bar{x}|, |y - \bar{y}|)$,

con $F(t, x, y)$, continua in E, non decrescente in y, e generalmente monotona in x, per qualsiasi $y = g(t)$, con $g(t) \in H$.

In base alle ipotesi su $F(t, x, y)$, e al Teorema 1 è intanto possibile dimostrare il seguente

Teorema 2. *Si supponga che:* (γ) *il problema ai limiti*

$$x''(t) + F[t, x(t), g(t)] = 0 \qquad t \in I,\ x(0) = 0\,,\ x(a) = 0 \tag{3.3}$$

abbia un'unica soluzione $x(t) \in H$, *per ogni fissata* $g(t) \in H$;

(δ) *il problema*

$$x''(t) + F[t, x(t), x(h(t))] = 0 \qquad t \in I,\ x(t) \equiv 0\ t \notin I\,, \tag{3.4}$$

abbia unicamente la soluzione banale [1]; *allora la successione* $(w_n(t))$ *di funzioni soluzioni dei problemi*

$$\begin{aligned} &w_n''(t) + F[t, w_n(t),\ w_{n-1}(h(t))] = 0 \qquad && t \in I\,, \\ &w_n(0) = w_n(a) = 0 && (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{3.5}$$

con

$$w_0(t) \equiv 2M \qquad \forall t,\quad w_n(t) \equiv 0,\ \ t \notin I \quad (n = 1, 2, \ldots)\,, \tag{3.6}$$

risulta non crescente e uniformemente convergente a zero.

Dim. Dalle (3.5), (3.6) segue che, per $t \in I$, $w_1(t)$ è soluzione del problema (del tipo (3.3))

$$w_1''(t) + F[t, w_1(t), 2M] = 0\,, \qquad w_1(0) = w_1(a) = 0\,;$$

essa è unica; risulta inoltre $0 \leqslant w_1\,(t) \leqslant 2M$ per $t \in I$, $w_1(t) \equiv 0$ per $t \notin I$; essendo quindi $0 \leqslant w_1(h(t)) \leqslant 2M$, si ha

$$F[t, w_2(t), w_1(h(t))] \leqslant F[t, w_2(t), 2M]\,,$$

e pertanto per la funzione $w_2(t)$ valgono le

$$w_2''(t) + F[t, w_2(t), 2M) \geqslant 0\,, \qquad w_2(0) = w_2(a) = 0\,.$$

Le funzioni $w_1(t), w_2(t)$ sono dunque nell'ipotesi del Teorema 1; se ne deduce quindi che risulta $0 \leqslant w_2(t) \leqslant w_1(t)$ per $t \in I$. È allora facile concludere, procedendo per induzione ed applicando il Teorema 1, che la successione di funzioni non negative $\{w_n(t)\}$ è non crescente, per $t \in I$ (con $w_n(t) \equiv 0$ per $t \notin I$) e quindi convergente. Rimane da dimostrare che essa converge uniformemente a zero. Detta infatti $G(t, s)$ la funzione di Green relativa all'operatore $Tx = -\,x''$, $x(0) = x(a) = 0$, si può scrivere

$$w_n(x) = \int_0^a G(t, s)\, F[s, w_n(s), w_{n-1}(h(s))]\, \mathrm{d}s \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

---

[1] Circa l'unicità della soluzione di questo tipo di problemi si veda ad esempio **[5]**$_2$.

Passando al limite per $n \to \infty$, e posto $w(t) = \lim_{n\to\infty} w_n(t)$, si ha che $w(t)$ è soluzione di un problema (3.4) e pertanto $\lim_{n\to\infty} w_n(t) = 0$, la convergenza risultando uniforme per il noto teorema del Dini sulla convergenza delle successioni monotone.

Preso ora in esame il problema ai limiti che si vuole risolvere

$$
(3.7) \qquad \begin{aligned} & x''(t) = f[t, x(t), x(h(t))] && t \in I\,, \\ & x(t) \;= \varphi_i(t) && t \in J_i \quad (i = 1, 2)\,, \end{aligned}
$$

si considerino i problemi ai limiti associati

$$
(3.8) \qquad \begin{aligned} & x_n''(t) = f[t, x_n(t), x_{n-1}(h(t))] && t \in I\,, \\ & x_n(0) = \varphi_1(0)\,, \quad x_n(a) = \varphi_2(a) && (n = 1, 2, \ldots)\,, \end{aligned}
$$

con

$$
(3.9) \qquad x_0(t) = \varphi_1(0)\,, \quad x_n(t) = \varphi_i(t) \quad t \in J_i \quad (i = 1, 2\,;\; n = 1, 2, \ldots)\,.
$$

Questi problemi, per l'ipotesi (α), ammettono soluzione unica; in **4** verrà dimostrato che la successione $\{x_n(t)\}$ risulta convergente all'unica soluzione di (3.7).

4 - Convergenza del metodo iterativo

La convergenza della successione $\{x_n(t)\}$ sopra introdotta sarà dimostrata nel teorema seguente, nel quale viene anche trattato il comportamento della successione degli errori $\varepsilon_n(t) = |x_n(t) - x(t)|$.

Teorema 3. *Nelle ipotesi* (α), (β), (γ), (δ), *il problema* (3.7) *ammette una ed una sola soluzione* $x(t)$; *la successione* $\{x_n(t)\}$ *definita dalle* (3.8), (3.9) *risulta convergente a tale soluzione*; *inoltre, posto* $\varepsilon_n(t) = |x_n(t) - x(t)|$ *risulta*

$$
(4.1) \qquad \varepsilon_n(t) \leqslant w_n(t)\,,
$$

dove $\{w_n(t)\}$ *è la successione definita da* (3.5), (3.6).

Dim. Introdotte le funzioni

$$l(t) = \begin{cases} \varphi_i(t) & t \in J_i \quad (i = 1, 2) \\ \dfrac{\varphi_2(a) - \varphi_1(0)}{a}\, t + \varphi_1(0) & t \in I\,, \end{cases}$$

$$\bar{G}(t, s) = \begin{cases} G(t, s) & t \in I \\ 0 & t \notin I\,, \end{cases}$$

il problema (3.8), unitamente alla (3.9), è equivalente all'equazione integrale

$$x_n(t) = \int_0^a \bar{G}(t, s)\, f[s, x_n(s), x_{n-1}(h(s))]\, ds + l(t)\,.$$

Evidentemente, il $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$, se esiste, dà una soluzione del problema posto (3.7). Per provare la convergenza della successione $\{x_n(t)\}$, è sufficiente dimostrare che $\lim_{m,n\to\infty} u_{nm}(t) = 0$, dove si è posto

$$u_{n,m}(t) = |x_n(t) - x_m(t)|\,. \tag{4.2}$$

Si osservi che dalle (2.1), (3.8) segue la

$$D''_B u_{nm}(t) \geqslant -|x''_n(t) - x''_m(t)| = -|f[t, x_n(t), x_{n-1}(n(t))] - f[t, x_m(t), x_{m-1}(h(t))]|\,,$$

e quindi, per l'ipotesi (β), la

$$D''_B u_{nm}(t) + F[t, u_{nm}(t), u_{n-1,m-1}(h(t))] \geqslant 0\,. \tag{4.3}$$

Poichè dalla (4.2) e dall'ipotesi (α) segue che $u_{nm}(t) \leqslant 2M$, $\forall m, n$, si ha

$$D''_B u_{1m}(t) + F[t, u_{1m}(t), 2M] \geqslant 0\,, \qquad u_{1m}(0) = u_{1m}(a) = 0\,,$$

e dunque, dal Teorema 1 e dalla (3.5) si deduce $u_{1m}(t) \leqslant w_1(t)$ $t \in I$, risultando inoltre, per la (3.9), $u_{1m}(t) \equiv 0$ $t \notin I$.

Tenendo conto di (3.6) si può dunque concludere che $u_{1m}(t) \leqslant w_1(t)$ $\forall t$.

Procedendo per induzione, ammesso che risulti $u_{n-1,m-1}(t) \leqslant w_{n-1}(t)$ $(m > n)$, segue dalle (4.3), (3.8)

$$D''_B u_{nm}(t) + F[t, u_{n,m}(t), w_{n-1}(h(t))] \geqslant 0 \qquad t \in I\,, \qquad u_{nm}(0) = u_{nm}(a) = 0\,.$$

Ma $w_n(t)$ è l'unica soluzione del problema (3.5), quindi si può concludere che

$$u_{nm}(t) \leqslant w_n(t) \qquad t \in I\,, \qquad\qquad u_{nm}(t) \equiv 0 \qquad t \notin I\,,$$

dunque $\lim\limits_{n,m\to\infty} u_{nm}(t) = 0$; la successione $\{x_n(t)\}$ è allora convergente ed il suo limite $x(t)$ è soluzione del posto problema (3.7). Dalla (4.2) segue inoltre la (4.1).

Rimane da provare l'unicità della soluzione. A tale scopo, detta $y(t)$ una soluzione di (3.7) distinta da $x(t)$ e posto $z(t) = |y(t) - x(t)|$, ragionando in modo analogo a quanto già fatto si giunge alla

$$D''_B z(t) + F[t, z(t), z(h(t))] \geqslant 0 \qquad t \in I\,, \qquad\qquad z(t) \equiv 0 \qquad t \notin I\,;$$

da questa, dall'ipotesi (δ) e dal Teorema 2 segue dunque che $z(t) \equiv 0$.

5 - Un altro metodo iterativo

Verrà ora dato un altro teorema che conduce alla costruzione di un metodo iterativo convergente, provando al contempo l'esistenza e unicità della soluzione del problema (3.7). Si modifica l'ipotesi (β) con la seguente

(β') la funzione $f(t, x, y)$, continua in D, soddisfi ivi le seguenti condizioni

$$\operatorname{sign}(x - \bar{x})\,|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, y)| \leqslant F_2(t, |x - \bar{x}|)\,,$$
$$|f(t, x, y) - f(t, x, \bar{y})| \leqslant F_2(t, |y - \bar{y}|)\,,$$

dove $F_1(t, x)$ è generalmente monotona, $F_2(t, y)$ è non decrescente in y, e $F(t, x, y) = F_1(t, x) + F_2(t, y)$ verifica le ipotesi (γ) e (δ). Vale allora il

Teorema 4. *Sia dato il problema* (3.7), *sotto le ipotesi* (α), (β'), (γ), (δ): *si consideri la successione* $\{x_n(t)\}$ *definita dalle*

$$x''_n(t) = f[t, x_n(t), x_{n-1}(h(t))] \qquad t \in I\,,$$
$$x_n(0) = \varphi_1(0)\,, \qquad x_n(a) = \varphi_2(a)\,,$$

con $x_0(t) \equiv \varphi_1(0)$ $\forall t$, $x_n(t) = \varphi_i(0)$ $t \in J_i$ $(i = 1, 2)$.

Tale successione risulta convergente ad una funzione $x(t)$, *soluzione unica di* (3.7), *risultando inoltre* $\varepsilon_n(t) = |x_n(t) - x(t)| \leqslant w_n(t)$, *dove* $\{w_n(t)\}$ *è la successione non crescente e uniformemente convergente a zero delle soluzioni dei problemi*

$$w''_n(t) + F_1[t, w_n(t)] + F_2[t, w_{n-1}(t)] = 0 \qquad t \in I\,, \qquad\qquad w_n(0) = w_n(a) = 0\,,$$

con $w_0(t) \equiv 2M$ $\forall t$, $w_n(t) \equiv 0$ $t \notin I$.

La dimostrazione di questo teorema procede in modo analogo a quelle dei teoremi 2 e 3, utilizzando le proprietà delle funzioni $F_1(t, x)$ e $F_2(t, y)$, nonchè i risultati del Teorema 1.

La possibilità di estendere i risultati qui ottenuti al caso più generale, in cui l'argomento deviato sia anche funzione di $x(t)$, è allo studio e sarà oggetto di un prossimo lavoro.

Bibliografia

[1] G. F. Aliev, *An integral process for the solution of a boundary value problem,* Differents. Uravnenija (3) **7** (1971), 530-533.

[2] R. M. Aliev, *On a boundary value problem for second order linear differential equations with retarder argument,* Proc. Second Scientific Conference at Moscow's People's Friendship University 1966.

[3] O. Ashirov and J. D. Mamedov, *An iteration process for the solution of ordinary differential equations,* Differents. Uravnenija (12) **5** (1970), 871-876.

[4] K. De Never and K. Schmitt, *An application of the shooting method to boundary value problems for second order delay equations,* J. Math. Anal. Appl. **36** (1971), 588-597.

[5] L. J. Grimm and K. Schmitt: $[\cdot]_1$ *Boundary value problems for delay differential equations,* Bull. Amer. Mat. Soc. **74** (1968), 997-1000; $[\cdot]_2$ *Boundary value probems for differential equations with deviating arguments,* Aequationes Math. **4** (1970), 176-190.

[6] G. A. Kamenskii, *Boundary value problems for nonlinear equations with perturbed arguments,* Dokl. Vyssh. Shkoly Fiz. Mat. Nauki **2** (1958), 60-66.

[7] M. A. Krasnoselskii, A. J. Levin and J. D. Mamedov, *On the estimates of solutions of second order differential equations,* UMZh (1) **18** (1966).

[8] I. P. Natanson, *Theory of function of a real variable,* F. Ungar. Publ., New York 1964.

[9] L. Nicolò-Amati Gori e V. Sciamplicotti, *Su un problema ai limiti per un'equazione differenziale con argomento deviato,* Pubbl. I.M.A.

[10] H. J. Oberle and H. J. Pesch, *Numerical treatment of delay differential equations by Hermite interpolation,* Numer. Math. **37** (1981), 235-255.

[11] K. Schmitt: $[\cdot]_1$ *On solutions of nonlinear differential equations with deviating arguments,* SIAM J. Appl. Math. **17** (1969), 1171-1176; $[\cdot]_2$ *Comparison theorems for second order delay differential equations,* Rocky Mountain J. Math. **1** (1971), 459-467.

* * *