Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 177-182

M. Gabriella Murciano (*)

Sulle strutture algebriche estendenti il concetto di gruppo FC (**)

Introduzione

Un gruppo si dice FC se ogni suo elemento possiede un numero finito di coniugati. Tali gruppi sono stati introdotti e studiati da R. Baer e successivamente da B. H. Neumann ed altri (v. [7]). U. Felgner, in un articolo dedicato allo studio di proprietà model-teoretiche dei gruppi FC, osserva (cfr. [4], p. 409) che un gruppo è FC se e solo se esso è sottogruppo normale di ogni sua ultrapotenza.

In questa nota si dà una definizione generale di algebra (struttura algebrica) FS e si prova (Proposizione 1.3) che tale nozione nel caso dei gruppi è la stessa di gruppo FC. Si dà poi una caratterizzazione delle algebre FS (Teorema 2.2) che estende quella di Felgner per i gruppi.

Si presuppongono noti i principali concetti di algebra universale (v. [6]) quali quello di tipo di un'algebra, termine, formula di congruenza ed in particolare il basilare Lemma di Mal'cev (v. [6], [2] pag. 221). Si assume inoltre che al lettore siano familiari il concetto di ultrapotenza e il Teorema di Łoś (v. [1], [3]).

Infine, si ringrazia vivamente il Prof. S. Tulipani per aver seguito la preparazione di questo articolo.

1 - Definizione di Algebra FS

Def. 1.1. Si dice che un'algebra A di tipo $\mathscr{F}$ *soddisfa finitamente le formule di congruenza principale* se $\forall a, c, d \in A$ e per ogni termine in $k+1$ va-

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Arnesano, 73100 Lecce, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 9-XII-1983.

riabili $p(x, w_1, \ldots, w_k)$ l'insieme

$$B(a, c, d, p) = \left\{b \mid \exists e_1, \ldots, e_k \in A \ \begin{cases} a = p(c, e_1, \ldots, e_k) \\ b = p(d, e_1, \ldots, e_k) \end{cases}\right\}$$

è finito. In breve si dirà che A è *un'algebra FS*.

La definizione data sopra viene chiarita dal seguente

Lemma 1.2. *Se A è un'algebra FS allora per ogni formula di congruenza principale $\pi(x, y, u, v)$ e per ogni $a, c, d \in A$ l'insieme $B(a, c, d, \pi) = \{b \mid A \models \pi(a, b, c, d)\}$ è finito.*

Dim. Proviamo l'asserto per induzione sul numero n dei termini p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ che compaiono nella formula π.

Per $n = 1$ il lemma è vero perchè $\{b \mid A \models \pi(a, b, c, d)\}$ coincide con $B(a, c, d, p)$ della Def. 1.1.

Supposto il lemma vero per n, proviamolo per $n + 1$.

Sia $\pi(x, y, u, v)$ una formula di congruenza principale del tipo

$$\exists \boldsymbol{w}(x = p_1(z_1, \boldsymbol{w}) \;\&\; p_1(z_1', \boldsymbol{w}) = p_2(z_2, \boldsymbol{w}) \ldots p_n(z_n', \boldsymbol{w})$$
$$= p_{n+1}(z_n, \boldsymbol{w}) \;\&\; p_{n+1}(z_{n+1}', \boldsymbol{w}) = y) \,.$$

Definiamo ora due formule di congruenza principale come segue

$$\varphi(x, t, u, v) \equiv \exists \boldsymbol{w}(x = p_1(z_1, \boldsymbol{w}) \;\&\; p_1(z_1', \boldsymbol{w}) = p_2(z_2, \boldsymbol{w}) \ldots p_n(z_n', \boldsymbol{w}) = t)$$

con t nuova variabile, $\psi(t, y, u, v) \equiv \exists \boldsymbol{w}(t = p_{n+1}(z_n, \boldsymbol{w}) \;\&\; p_{n+1}(z_{n+1}', \boldsymbol{w}) = y)$.

Vogliamo provare che l'insieme $B(a, c, d, \pi) = \{b \mid A \models \mathrm{p}(a, b, c, d)\}$ è finito. Allora $b \in B(a, c, d, \pi)$ implica che $\exists e \in A$ tale che

$$A \models \varphi(a, e, c, d) \,, \qquad A \models \psi(e, b, c, d) \,,$$

ossia $\quad b \in B(a, c, d, \pi) \Rightarrow \exists e \in A \quad \begin{cases} e \in B(a, c, d, \varphi) \\ b \in B(e, c, d, \psi) \,. \end{cases}$

Si ha allora che $B(a, c, d, \pi) \subseteq \bigcup\limits_{e \in B(a,c,d,\varphi)} B(e, c, d, \psi)$.

Poichè $B(e, c, d, \psi)$ e $B(a, c, d, \varphi)$ sono insiemi finiti per ipotesi induttiva, sarà finito anche $B(a, c, d, \pi)$ perchè incluso in un'unione finita di insiemi finiti. Il lemma è così completamente provato.

Facciamo vedere ora che la definizione di algebra FS è una generalizzazione di quella di gruppo FC (cfr. [4], pag. 408), ossia che vale la seguente

Proposizione 1.3. *G è un gruppo FC se e solo se è un gruppo FS.*

Premettiamo il seguente

Lemma 1.4. *Se G è un gruppo FC e $p(z, w_1, \ldots, w_k)$ è un termine in $k+1$ variabili e $a, b \in G$, allora l'insieme $H = \{h \mid \exists e_1, \ldots, e_k \in G,\ h = p(a, \boldsymbol{e}) \cdot p^{-1}(b, \boldsymbol{e})\}$ è finito, dove con $p^{-1}(z, \boldsymbol{w})$ si è indicato il termine $(p(z, \boldsymbol{w}))^{-1}$.*

Dim. Poichè un termine dei gruppi è un prodotto di un numero finito s di potenza ad esponente intero delle sue variabili, il numero s verrà chiamato la lunghezza del termine. Dimostreremo allora l'asserto del lemma per induzione sulla lunghezza del termine p in questione.

Per $s = 0$ il termine è costante ed è uguale all'unità del gruppo, allora H è certamente finito.

Supponiamo ora $s > 0$. Il termine p si potrà allora scrivere come $p = t^m \cdot q(z, w_1, \ldots, w_k)$ con $t \in \{z, w_1, \ldots, w_k\}$, con m numero intero e q termine di lunghezza $s - 1$.

Assumiamo allora, per ipotesi induttiva, che l'asserto valga per il termine q. Dunque al variare di $\boldsymbol{e}$ in G^k, l'insieme dei prodotti $q(a, \boldsymbol{e}) \cdot q^{-1}(b, \boldsymbol{e})$ rappresenta un insieme finito di elementi che denotiamo con H_0. Distinguiamo ora due casi.

Caso 1. $p = t^m q(z, w_1, \ldots, w_k)$ con $t = z$. Allora $p(a, \boldsymbol{e}) p^{-1}(b, \boldsymbol{e}) = a^m q(a, \boldsymbol{e}) \cdot q^{-1}(b, \boldsymbol{e}) b^{-m}$. Siccome H_0 è finito lo è pure $H = a^m H_0 b^{-m}$.

Caso 2. $p = t^m q(z, w_1, \ldots, w_k)$ con $t = w_j$ per qualche j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Allora $p(a, \boldsymbol{e}) p^{-1}(b, \boldsymbol{e}) = e_j^m q(a, \boldsymbol{e}) q^{-1}(b, \boldsymbol{e}) e_j^{-m}$, così $H \subseteq \bigcup_{g \in G} (g H_0 g^{-1})$.

Ora, essendo H_0 finito e G un gruppo FC, segue che H è finito.

Possiamo dimostrare ora la Proposizione 1.3.

Sia G un gruppo FS, si prenda $p(z, w_1) = w_1 z w_1^{-1}$. Sia $g \in G$ e 1 l'unità di G, l'insieme

$$B(1, 1, g, p) = \left\{b \mid (\exists e_1 \in G) \left\{ \begin{matrix} 1 = e_1 1 e_1^{-1} \\ b = e_1 g e_1 \end{matrix} \right\} \right\} = \{b \mid (\exists e_1 \in G) \quad b = e_1 g e_1^{-1}\}$$

è finito perchè G è FS. Dunque ogni elemento g di G possiede un numero finito di coniugati per cui G è FC.

Viceversa se G è FC consideriamo $a, c, d \in G$ e p termine in $k+1$ variabili. Allora l'insieme

$$B(a, c, d, p) = \left\{ b \,|\, (\exists e \in G^k) \left\{ \begin{matrix} a = p(c, e) \\ b = p(d, e) \end{matrix} \right. \right\} = \{ b \,|\, (\exists e \in G^k)\, ab^{-1} = p(c, e) p^{-1}(d, e) \}$$

è finito per il Lemma 1.4.

2 - Caratterizzazione delle Algebre FS

Ci proponiamo ora di estendere alle algebre FS un teorema dimostrato da Felgner per i gruppi FC (cfr. [4], pag. 409). Per la Proposizione 1.3 ogni gruppo FC è anche FS, pertanto il teorema di Felgner risulta un caso particolare del nostro teorema. Abbiamo bisogno perciò della seguente

Def. 2.1. Se A' è una sottoalgebra di A, si dirà che A' è una *sottoalgebra normale* di A, e si scriverà $A' \trianglelefteq A$, se esiste in A una congruenza che possiede A' come classe. Se A^I/D è un'ultrapotenza (cfr. [3], pag. 164), si indicherà con $j: A \to A^I/D$ il monomorfismo canonico che manda ogni $a \in A$ nella classe $\tilde{a}/D$ determinata dalla funzione $\tilde{a}: I \to A$ costante di valore a.

Per semplicità di notazione supporremo che j sia un'inclusione, e scriveremo A al posto di $j(A)$.

Possiamo allora dimostrare il seguente

Teorema 2.2. *Data un'algebra A, sono equivalenti le seguenti proposizioni*: (i) *A è un'algebra FS*; (ii) *$A \trianglelefteq A^I/D$, per ogni ultrafiltro D su un qualsiasi insieme I.*

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii). Fissato un ultrafiltro D sull'insieme I, sia $\Phi(A)$ la minima congruenza di A^I/D tale che gli elementi di A stiano tutti in una stessa classe.

Proviamo che per ogni $a \in A$, $f/D \in A^I/D$, $(a, f/D) \in \Phi(A)$ implica $f/D \in A$.

Ciò equivale a dire che A è normale in A^I/D.

Prendiamo $a \in A$, $f/D \in A^I/D$ con $(a, f/D) \in \Phi(A)$. Poichè $\Phi(A) = \bigvee_{(c,d) \in A^2} \vartheta(c, d)$ (cfr. [6], pag. 55) esistono $t_0/D, t_1/D, \ldots, t_n/D \in A^I/D$ tali che (cfr. [6], pag. 18)

$a = t_0/D$, $f/D = t_n/D$, $t_s/D \equiv t_{s+1}/D(\vartheta(c_s, d_s))$ per certi c_s, $d_s \in A$ con $s = 0, \ldots, n-1$. Allora $(a, f/D) \in \bigvee_{i=0}^{n} \vartheta(c_i, d_i)$, $c_i, d_i \in A$.

Dimostriamo che $f/D \in A$ ragionando per induzione su n.

I caso: $n = 1$. Sia $(a, f/D) \in \vartheta(c_1, d_1)$. Allora per il lemma di Mal'cev (cfr. [**2**], pag. 221) esiste una formula di congruenza principale π per cui $A^I/D \models \pi(a, f/D, c_1, d_1)$. Ora, per il Teorema di Łoš (cfr. [**2**], pag. 210), risulta che $Y = \{i \mid A \models \pi(a, f(i), c_1, d_1)\} \in D$.

Poichè A è FS, l'insieme $B(a, c, d, \pi) = \{b \mid A \models \pi(a, b, c, d)\}$ è finito. Quindi si può scrivere $B(a, c, d, \pi) = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$.

Allora $Y = \bigcup_{j=1}^{k} Y_j$, dove $Y_j = \{i \mid i \in Y,\ f(i) = b_j\}$.

Poichè $Y \in D$ e D è un ultrafiltro, deve esistere un $r \in \{1, \ldots, k\}$ tale che $Y_r \in D$. Ma essendo $Y_r = \{i \mid f(i) = b_r\}$, segue che $f/D = b_r/D \in A$.

II caso: $n > 1$. Dunque $(a, f/D) \in (\bigvee_{i=0}^{n-1} \vartheta(c_i, d_i) \vee \vartheta(c_n, d_n))$. Allora devono esistere t_0/D, t_1/D, ..., t_r/D tali che $a = t_0/D$, $f/D = t_r/D$, $t_s/D \equiv t_{s+1}/D$ $(\bigvee_{i=1}^{n-1} \vartheta(c_i, d_i))$ se s è pari, $t_s/D \equiv t_{s+1}/D$ $(\vartheta(c_n, d_n))$ se s è dispari.

Allora per l'ipotesi induttiva $t_1/D \in A$, così $t_2/D \in A$ fino a concludere che $t_r/D \in A$; così $f/D \in A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Sia A sottoalgebra normale di A^I/D, per ogni insieme I e per ogni ultrafiltro D su I.

Se per assurdo A non fosse FS, esisterebbe una formula di congruenza principale $\pi(x, y, u, v)$ ed esisterebbero $a, c, d \in A$ tali che l'insieme $B(a, c, d, \pi) = \{b/A \models \pi(a, b, c, d)\}$ sarebbe infinito. Sia $\{b_i\}_{i \in N}$ un sottoinsieme infinito di $B(a, c, d, \pi)$ e sia D un ultrafiltro sull'insieme dei naturali N contenente il filtro di Fréchet (cfr. [**3**], pag. 164); quindi D non contiene sottoinsiemi finiti.

Consideriamo l'applicazione $f: N \to A$ definita da $f(i) = b_i$ per ogni $i \in N$. Allora $A^N/D \models \pi(a, f/D, c, d)$, per il Teorema di Łoś in quanto $N = \{i \mid A \models \pi(a, f(i), c, d)\}$. Ne segue che $(a, f/D) \in \vartheta(c, d)$ e a fortiori $(a, f/D) \in \Phi(A)$. Poichè A è sottoalgebra normale di A^I/D risulta che f/D è costante. Ma preso un qualunque $b \in A$ si ha che $|\{i \mid f(i) = b\}| \leqslant 1$, per come è definita la f. Se fosse $f/D = \tilde{b}/D$, dovrebbe essere $\{i \mid f(i) = b\} \in D$. Arriviamo così ad un assurdo perchè D non contiene insiemi finiti. Resta così provato che A è un'algebra FS.

Bibliografia

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson, *Models and ultraproducts, an introduction*, North Holland, Amsterdam 1969.

[2] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **78**, Springer-Verlag 1981.

[3] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam 1973.

[4] U. Felgner, *On $\aleph_0$-categorial extra-special p-groups*, Comptes Rendus de la Semaine d'Etude en Théorie des Modèles, Inst. Math. Univ. Catholique Louvain, Louvain-la-Neuve 1975.

[5] E. Fried, Q. Gratzer and R. Quackenbush, *Uniform congruence schemes*, Algebra Universalis **10** (1980), 176-188.

[6] G. Gratzer, *Universal Algebra*, Springer-Verlag, 2nd edition 1979.

[7] D. Robinson, *Finiteness properties*, Graduate Texts in Mathematics n. **80**, Springer-Verlag 1982.

* * *