Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 199-205

Anna Rosolini (*)

Un esempio sulla q-olomorfia (**)

Introduzione

Sia Ω un dominio di $\boldsymbol{C}^n$; si dice che una funzione $f\colon \Omega \to \boldsymbol{C}^n$, $f \in C^2(\Omega)$, è *q-olomorfa* ($q \in \boldsymbol{N}$) quando verifica l'equazione $\bar\partial f \wedge (\partial\bar\partial f)^q = 0$. Si dice che Ω è *q-olomorficamente convesso* quando per ogni compatto K di Ω l'inviluppo convesso di K rispetto allo spazio $O_q(\Omega)$ delle funzioni q-olomorfe su Ω è a sua volta compatto.

Introdotte queste nozioni, R. Basener in [**2**] ha dimostrato che se un dominio Ω di $\boldsymbol{C}^n$ è a bordo differenziabile e limitato allora la convessità q-olomorfa di Ω implica la q-pseudoconvessità al bordo.

È noto (v. [**5**]) che se Ω è a bordo regolare allora la q-pseudoconvessità al bordo è equivalente alla q-completezza (nel senso di Andreotti e Grauert); quest'ultima nozione ha senso anche quando $\partial\Omega$ non è necessariamente regolare. Si pone pertanto il problema di vedere se il teorema di Basener è valido anche per domini non necessariamente regolari al bordo, cioè se la convessità q-olomorfa implica la q-completezza.

In queste pagine, dopo aver provato alcune proprietà di carattere functoriale relative alla convessità q-olomorfa di varietà, mostriamo che la congettura precedente è falsa. Infatti per ogni $n > 1$ definiamo un semplice dominio di $\boldsymbol{C}^{2n+2}$ che è n-olomorficamente convesso ma non n-completo.

1 - Ricordiamo brevemente le definizioni di q-pseudoconvessità e di q-completezza.

(*) Indirizzo: Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachussetts, U.S.A.

(**) Ricevuto: 11-I-1983.

Def. 1.1. Siano Ω un aperto di $\boldsymbol{C}^n$, $f: \Omega \to \boldsymbol{R}$, $f \in C^2(\Omega)$. Si dice che f è *q-plurisubarmonica* (risp. *strettamente q-plurisubarmonica*) in Ω se per ogni $z_0 \in \Omega$ la forma di Levi di f in z_0

$$L(f, z_0)(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z_0) a_i \bar{a}_j \qquad a \in \boldsymbol{C}^n,$$

ha almeno $n - q$ autovalori non negativi (risp. positivi).

Sia Ω un aperto di $\boldsymbol{C}^n$ a frontiera di classe C^2; siano $z_0 \in \partial\Omega$ e U un intorno aperto di z_0. Sia $\varphi \in C^2(U)$ una qualsiasi funzione che definisce il bordo di Ω in z_0, cioè tale che $\Omega \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0,\ (\mathrm{d}\varphi)_{z_0} \neq 0\}$.

Def. 1.2. L'aperto Ω si dice *q-pseudoconvesso* (risp.: *strettamente q-pseudoconvesso*) *al bordo in* z_0 se la forma di Levi di φ in z_0, $L(\varphi, z_0)(a)$, ristretta all'iperpiano analitico complesso tangente a $\partial\Omega$ in z_0 ha almeno $n - q - 1$ autovalori non negativi (risp. positivi). Si dice poi che Ω è *q-pseudoconvesso* (risp. *strettamente q-pseudoconvesso*) *al bordo* se lo è in ogni punto del bordo.

Le nozioni introdotte si estendono naturalmente al caso di varietà complesse (v. [**1**]).

Def. 1.3. Sia Ω una varietà complessa. Si dice che Ω è *q-pseudoconvessa* (risp. *strettamente q-pseudoconvessa*) *in senso esaustivo* se esiste una funzione $f: \Omega \to \boldsymbol{R}$ q-plurisubarmonica (risp. strettamente q-plurisubarmonica) fuori da un compatto $K \subset \Omega$ tale che gli insiemi $B_c = \{x \in \Omega \mid f(x) < c\}$ siano relativamente compatti in Ω per ogni $c \in \boldsymbol{R}$.

Si dice che Ω è *q-completa* se $K \neq \emptyset$ e f è strettamente q-plurisubarmonica.

In [**5**] (Theorem 3.3.1) Vigna Suria dimostra che per aperti a frontiera regolare le nozioni di q-pseudoconvessità al bordo e di q-completezza si equivalgono.

Le seguenti nozioni di q-olomorfia e di convessità q-olomorfa sono state introdotte da Basener in [**2**].

Def. 1.4. Sia Ω una varietà analitica complessa di dimensione n. Una funzione $f: \Omega \to \boldsymbol{C}$, $f \in C^2(\Omega)$, si dice *q-olomorfa*, con $q \in \overline{\boldsymbol{N}}$, $0 \leqslant q < n$, se $\bar{\partial} f \wedge (\partial\bar{\partial} f)^q = 0$.

L'insieme delle funzioni q-olomorfe su Ω si indica con $O_q(\Omega)$; questo insieme risulta non essere un'algebra, dal momento che non è chiuso rispetto alla moltiplicazione e alla somma, come è provato in [**2**].

Si può introdurre in modo naturale una nozione di convessità q-olomorfa.

Def. 1.5. Siano Ω una varietà complessa, dim $\Omega = n$, $q \in \bar{N}$, $0 \leqslant q < n$. Se $K \subset \Omega$ si pone $\hat{K}_{O_q(\Omega)} = \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leqslant \sup_K |f|, \ \forall f \in O_q(\Omega)\}$.

Si dice che Ω è *q-olomorficamente convesso* se per ogni K compatto di Ω, $\hat{K}_{O_q(\Omega)}$ è compatto.

In [2] è dimostrata una relazione trà la nozione di convessità q-olomorfa e quella di q-pseudoconvessità, in analogia con quanto accade per i domini olomorficamente convessi. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.6. *Sia $\Omega \subset C^n$ un dominio limitato a frontiera differenziabile. Allora*

(i) *se Ω è q-olomorficamente convesso, è q-pseudoconvesso al bordo;*

(ii) *se Ω è strettamente q-pseudoconvesso al bordo, per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto U di x tale che $\Omega \cap U$ è q-olomorficamente convesso.*

2 – La convessità q-olomorfa, così come altre proprietà degli spazi complessi (quali la convessità olomorfa e la q-pseudoconvessità) si conserva attraverso particolari procedimenti per costruire nuovi spazi. Dimostriamo allora alcune di tali functorialità.

Proposizione 2.1. *Siano Ω_i, $i = 1, \ldots, r$, domini q-olomorficamente convessi di $\boldsymbol{C}^n$. Allora $\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$ è q-olomorficamente convesso.*

Dim. Sia $K \subset \Omega$ compatto; per ogni $i \leqslant r$ vale

$$\hat{K}_{O_q(\Omega)} \subset \hat{K}_{O_q(\Omega_i)} , \qquad \mathrm{dist}\,(\hat{K}_{O_q(\Omega)}, \partial\Omega_i) \geqslant \mathrm{dist}\,(\hat{K}_{O_q(\Omega_i)}, \partial\Omega_i) > 0 ,$$

poichè $\hat{K}_{O_q(\Omega_i)}$ è compatto. Sia ora $z \in \partial\Omega$; esiste j_z, $1 \leqslant j_z \leqslant r$ tale che $z \in \partial\Omega_{j_z}$; quindi

$$\mathrm{dist}\,(\hat{K}_{O_q(\Omega)}, z) \geqslant \min_{w \in \partial\Omega} \mathrm{dist}\,(\hat{K}_{O_q(\Omega)}, \partial\Omega_{j_w}) = c > 0 .$$

Ne segue allora che nessun punto di $\partial\Omega$ può essere di accumulazione per $\hat{K}_{O_q(\Omega)}$.

Proposizione 2.2. *Siano X, Z varietà analitiche complesse e Y una sottovarietà aperta di Z. Sia $u: X \to Z$ una applicazione olomorfa. Se X e Y sono q-olomorficamente convesse, allora anche $X_u = \{x \in X \mid u(x) \in Y\}$ è q-olomorficamente convessa.*

Dim. Sia $K \subset X_u$ compatto; allora $u(K) \subset Y$ è compatto. Siano $\zeta \in \hat{K}_{O_q(X_u)}$, $f \in O_q(Y)$.

Poichè $f \circ u$ è q-olomorfa su X_u (v. [2], Proposition 1) si ha

$$|f(u(\zeta))| \leqslant \sup_{x \in K} |f(u(x))| = \sup_{w \in u(K)} |f(w)| ,$$

quindi $u(\zeta) \in K' := \widehat{u(K)}_{O_q(Y)}$.

Indicando con C la chiusura di $\hat{K}_{O_q(X_u)}$ in X si ha, poichè Y è q-olomorficamente convessa $u(C) \subset K' \subset Y$ e quindi $C \subset X_u$; dunque $\hat{K}_{O_q(X_u)}$ è chiuso in X e pertanto è compatto, essendo contenuto in $\hat{K}_{O_q(X)}$.

Proposizione 2.3. *Siano Ω una varietà analitica complessa q-olomorficamente convessa e $f \in O_q(\Omega)$; sia $A = \{z \in \Omega \,|\, f(z) = 0\}$. Allora $V = \Omega \setminus A$ è q-olomorficamente convessa.*

Dim. Sia $K \subset V$ compatto. Basta provare che $\hat{K}_{O_q(V)}$ è chiuso in Ω. Vediamo dunque che nessun punto di A è di accumulazione per $\hat{K}_{O_q(V)}$.

Poichè $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in V$, si ha che $\mu = \min_{x \in K} f(x) > 0$. Sia $y \in A$. Poichè f è continua, esiste un intorno U di y tale che $\sup_{x \in U} f(x) < \mu$.

Sia $g(x) = 1/f(x)$; g è definita e q-olomorfa su V; inoltre se $w \in U \setminus A$, $|g(w)| > 1/\mu = \max_{x \in K} g(x)$, quindi $w \notin \hat{K}_{O_q(V)}$.

Poichè $\hat{K}_{O_q(V)} \cap (U \setminus A) = \phi$, y non è di accumulazione per $\hat{K}_{O_q(V)}$.

Proposizione 2.4. *Siano Ω_1, Ω_2 due varietà complesse. Sia Ω_1 p-olomorficamente convessa, Ω_2 q-olomorficamente convessa. Allora $\Omega_1 \times \Omega_2$ è s-olomorficamente convessa con $s = \max\{p, q\}$.*

Dim. Siano $\pi_1 \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_1$, $\pi_2 \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2$ le proiezioni canoniche. Se $f \in O_p(\Omega_1)$, $g \in O_q(\Omega_2)$ siano $f' = f \circ \pi_1$, $g' = g \circ \pi_2$; per la Proposition 1 di [2] si ha che $f' \in O_p(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $g' \in O_q(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Sia $K \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ un compatto; $\pi_1(K)$ e $\pi_2(K)$ sono quindi compatti di Ω_1 e Ω_2 rispettivamente. Si ha $\|f'\|_K = \|f\|_{\pi_1(K)}$ e $\|g'\|_K = \|g\|_{\pi_2(K)}$.

Posto $s = \max\{p, q\}$ siano $(z_0, w_0) \in \hat{K}_{O_s(\Omega_1 \times \Omega_2)}$ e $f \in O_p(\Omega_1)$; poichè $f' \in O_p(\Omega_1 \times \Omega_2) \subset O_s(\Omega_1 \times \Omega_2)$ si ha $|f(z_0)| = |f'(z_0, w_0)| \leqslant \|f'\|_K = \|f\|_{\pi_1(K)}$.

Analogamente si ottiene $|g(w_0)| < \|g\|_{\pi_2(K)}$. Dunque

$$\hat{K}_{O_s(\Omega_1 \Omega_2)} \subset \widehat{\pi_1(K)}_{O_p(\Omega_1)} \times \widehat{\pi_2(K)}_{O_q(\Omega_2)} \subset \Omega_1 \times \Omega_2 .$$

Allora $\hat{K}_{O_s(\Omega_1 \times \Omega_2)}$ è compatto.

Proposizione 2.5. *Siano X, Y varietà analitiche complesse. Sia $\varphi\colon Y \to X$ olomorfa, suriettiva, propria. Allora se X è q-olomorficamente convessa anche Y lo è.*

Dim. Sia $K \subset Y$ compatto; $\varphi(K)$ è compatto in X e quindi $\varphi^{-1}(\widehat{\varphi(K)}_{O_q(X)})$ è compatto, poichè φ è propria. Inoltre se $x \in \hat{K}_{O_q(Y)}$ e $g \in O_q(X)$, risulta

$$|g(\varphi(x))| \leqslant \sup_{y \in K} |(g \circ \varphi)(y)| = \sup_{z \in \varphi(K)} |g(z)|\,.$$

Quindi $\hat{K}_{O_q(Y)} \subset \varphi^{-1}(\widehat{\varphi(K)}_{O_q(X)})$ e perciò $\hat{K}_{O_q(Y)}$ è compatto.

Proposizione 2.6. *Siano X una varietà complessa q-olomorficamente convessa e $Y \subset X$ una sottovarietà chiusa; allora Y è q-olomorficamente convessa.*

Dim. Se $K \subset Y$ è compatto, $\hat{K}_{O_q(Y)} \subset \hat{K}_{O_q(X)}$ è chiuso in Y e quindi anche in X.

3 – Diamo ora per ogni n un esempio di dominio $(n-1)$-olomorficamente convesso.

Esempio 3.1. *Sia $D = \{z \in \mathbf{C}^n \,|\, |z_j| < 1, j = 1, \ldots, n\}$. Posto $D^* = D \setminus \{0\}$, D^* è $(n-1)$-olomorficamente convesso.*

Infatti, siano $\Omega = \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, K un compatto di Ω e $\hat{K} = \hat{K}_{O_{n-1}(\Omega)}$. $\hat{K}$ è chiuso in Ω e limitato; vediamo che $0 \notin \hat{K}$ e quindi che $\hat{K}$ è compatto.

La funzione $f(z) = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n)(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{-1}$ è $(n-1)$-olomorfa (v. Example 5 in [**2**]).

Se per assurdo esistesse una successione $\{z^{(n)} \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ in $\hat{K}$, con $\lim_{n\to\infty} z^{(n)} = 0$, si avrebbe $|f(z^{(n)})| \leqslant \sup_K |f| < +\infty$, per ogni $n \in \mathbf{N}$, che è assurdo, poichè $\lim_{n\to\infty} f(z^{(n)}) = +\infty$. Quindi Ω è $(n-1)$-olomorficamente convesso.

Il policilindro D è certo $(n-1)$-olomorficamente convesso. Ne segue dunque che $D^* = D \cap \Omega$ è $(n-1)$-olomorficamente convesso per 2.1.

Esempio 3.2. *Sia $n \geqslant 2$; con le notazioni dell'Esempio 3.1, $D^* \times D^*$ è un dominio di $\mathbf{C}^{2n}$ limitato, $(n-1)$-olomorficamente convesso ma non $(n-1)$-completo.*

Dall'esempio precedente e dalla Proposizione 2.4 segue che $D^* \times D^*$ è $(n-1)$-olomorficamente convesso. Mostriamo ora che $D^* \times D^*$ non è $(n-1)$-completo.

Posto $P = D \times D \subset C^{2n}$, $P_1 = P \setminus \{z \in C^{2n} | z_{n+1} = \ldots = z_{2n} = 0\}$, $P_2 = P \setminus \{z \in C^{2n} | z_1 = \ldots = z_n = 0\}$, si ha che $P^* := P \setminus \{0\} = P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = D^* \times D^* = P \setminus (\{z_1 = \ldots = z_n = 0\} \cup \{z_{n+1} = \ldots = z_{2n} = 0\})$.

Per ogni fascio analitico coerente $\mathscr{F}$ su P possiamo considerare la successione di Mayer-Vietoris applicata alla terna $(P_1, P_2, D^* \times D^*)$

$$\ldots \to H^i(P_1, \mathscr{F}) \oplus H^i(P_2, \mathscr{F}) \to H^i(D^* \times D^*, \mathscr{F}) \to H^{i+1}(P^*, \mathscr{F}) \to$$
$$\to H^{i+1}(P_1, \mathscr{F}) \oplus H^{i+1}(P_2, \mathscr{F}) \to \ldots$$

per $i \geqslant 0$.

Poichè P_1 e P_2 sono $(n-1)$-completi vale $H^i(P_1, \mathscr{F}) = H^i(P_2, \mathscr{F}) = 0$ per $i \geqslant n$; ne segue un isomorfismo di connessione

$$H^i(D^* \times D^*, \mathscr{F}) \simeq H^{i+1}(P_2, \mathscr{F}), \qquad i \geqslant n.$$

Sia ora Ω^{2n} il fascio dei germi di forme olomorfe di grado $2n$ su P^*; si ha che $H^{2n-1}(P^*, \Omega^{2n}) \neq 0$. Infatti P^* è $(2n-1)$-completo (per (2.6) di [4]) quindi $H^{4n-1}(P^*, C) \simeq H^{2n, 2n-1}(P^*, C)$ per (4.1) di [4], dove $H^{p,q}(X, C)$ è l'insieme degli $\xi \in H^{p+q}(X, C)$ rappresentabili nell'isomorfismo di de Rham con una forma di tipo (p, q).

Poichè P^* è contraibile alla sfera S^{4n-1}, si ha $H^{4n-1}(P^*, C) \simeq H^{4n-1}(S^{4n-1}, C) \simeq C$.

$H^{2n, 2n-1}(P^*, C) \simeq H^{4n-1}(P^*, C) \simeq C$ è un quoziente di $H^{2n-1}(P^*, \Omega^{2n})$, quindi $H^{2n-1}(P^*, \Omega^{2n}) \neq 0$.

Ne segue allora che $H^{2n-2}(D^* \times D^*, \Omega^{2n}) \neq 0$ (poichè $H^{2n-2}(D^* \times D^*, \Omega^{2n}) \simeq H^{2n-1}(P^*, \Omega^{2n})$); dunque $D^* \times D^*$ non può essere $(n-1)$-completo.

Osserviamo che la dimostrazione precedente prova in realtà che $D^* \times D^*$ non è nemmeno q-completo per ogni $q < 2n - 2$. Di più, poichè (v. (1.5) di [3]) in un ambiente di Stein la q-pseudoconvessità esaustiva è equivalente alla q-completezza, si ha che $D^* \times D^*$ non è q-pseudoconvesso in senso esaustivo per alcun $q < 2n - 2$.

Bibliografia

[1] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. Franc. **90** (1962), 193-259.

[2] R. Basener, *Nonlinear Cauchy-Riemann equations and q-pseudoconvexity*, Duke Math. J. **43** (1976), 203-213.

[3] S. Coen, *Sull'omologia degli aperti q-completi di uno spazio di Stein*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **23** (1969), 289-303.

[4] G. Sorani and V. Villani, *q-complete spaces and cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. **125** (1966), 432-448.

[5] G. Vigna Suria, *q-cohomologically complete and q-pseudoconvex domains*, Dissertation for the degree of D. Phil. at the Univ. of Warwick 1979.

Abstract

In this paper we prove some properties of q-holomorphically convex complex manifolds and give an example of a domain in C^{2n-2} with a nonsmooth boundary which is n-holomorphically convex but not n-complete, for any $n > 1$.

* * *