Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 207-216

MARIO DE SALVO (*)

Gli (H, G) - ipergruppi (**)

1 – Ricordiamo alcune definizioni. Un ipergruppo $\langle H, \circ\rangle$ è *regolare* se ha almeno una identità bilatera e ogni elemento ha almeno un inverso bilatero [**4**]$_1$.

Un ipergruppo regolare H si dice *reversibile* se soddisfa alle seguenti condizioni $\forall(x, y, z) \in H^3$

(1) se $y \in a\circ x$, esiste un inverso a' di a tale che $x \in a'\circ y$,

(2) se $y \in x\circ a$, esiste un inverso a'' di a tale che $x \in y\circ a''$.

Sia A una parte non vuota di un semi-ipergruppo $\langle H, \circ\rangle$; A si dice *completa* se $\circ\Pi x_i \cap A \neq 0 \rightarrow \circ\pi x_i \subset A$.

Si dice *chiusura completa* di A in H e si denota con $\mathscr{C}_H(A)$, l'intersezione delle parti di H che sono complete e contengono A. Se $A = \{x\}$ si scrive $\mathscr{C}_H(x)$ al posto di $\mathscr{C}_H(\{x\})$.

Si denota con β^*_H, la *chiusura transitiva* della relazione β_H così definita: $x\beta_H y \leftrightarrow \exists n \in N^*$, $\exists(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in H^n$: $\{x, y\} \subset \circ\Pi z_i$.

Si dice che A è *parte ciclica* di H, se $\exists x \in A$ tale che $\forall a \in A$ $\exists n \in N^*$: $a \in \circ x^n$. L'elemento x si dice *generatore* di A.

Diciamo che il semi-ipergruppo $\langle H, \circ\rangle$ è *ciclico* se H è parte ciclica.

Se $\langle H, \circ\rangle$ e $\langle H', \circ'\rangle$ sono semi-ipergruppi, una funzione $f: H \rightarrow H'$ si dice *omomorfismo* se $\forall(x, y) \in H^2$ $f(x\circ y) \subset f(x)\circ' f(y)$; f si dice *omomorfismo buono* se $\forall(x, y) \in H^2$ $f(x\circ y) = f(x)\circ' f(y)$.

2 – Generalizzando il concetto di (H, A)-ipergruppo introdotto in [**7**]$_1$ costruiamo ipergruppi che chiameremo (H, G)-ipergruppi. Siano $\langle H, \circ\rangle$ un ipergruppo, G un gruppo con unità 1, $\{A_i\}_{i\in G}$ una famiglia di insiemi non vuoti a

---

(*) Indirizzo: Via Palermo 836, 98010 Scala Ritiro, Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 25-I-1983.

due a due disgiunti con $A_1 = H$. Poniamo $K = \bigcup_{i \in G} A_i$ e definiamo l'iperoperazione $*$ ponendo

$$\forall (x, y) \in H^2 \qquad x * y = x \circ y ;$$

$$\forall (x, y) \in A_i \times A_j \neq H \times H \qquad x * y = A_k \quad \text{se } i \cdot j = k .$$

Si verifica facilmente che $\langle K, * \rangle$ è un ipergruppo. Nel seguito l'ipergruppo sopra definito verrà denotato come *(H, G)-ipergruppo.* Inoltre indicheremo $G^* = G - \{1\}$.

Osservazione 1. Si noti che un (H, A)-ipergruppo è un (H, G)-ipergruppo, ove $|G| = 2$.

Si dimostra semplicemente per induzione il seguente lemma.

Lemma 1. *Se $\langle K, * \rangle$ è un (H, G)-ipergruppo, di sostegno $K = \bigcup_{i \in G} A_i$, allora $\forall n \in N^* - \{1\}$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ si possono verificare i seguenti casi*

(I) *$\exists i \in G$ tale che $* \prod_{i=1}^{n} x_i = A_i$,*

(II) *$\exists B \in \mathscr{P}(H) - \{\emptyset\}$ tale che $* \prod_{i=1}^{n} x_i = B$.*

Lemma 2. *Se $\langle K, * \rangle$ è un (H, G)-ipergruppo, di sostegno $K = \bigcup_{i \in G} A_i$, allora $\forall i \in G$, $\forall a \in A_i$, $\mathscr{C}_K(a) = A_i$.*

Dim. Per il Lemma 1, essendo gli insiemi A_i a due a due disgiunti, certamente $\forall i \in G$, A_i è parte completa di K. Per come è definita l'iperoperazione $*$, esistono coppie $(u, v) \in K^2$ tali che $\forall i \in G$ $A_i = u * v$, pertanto per il Lemma 3 di [**9**]$_2$, discende che $\forall a \in A_i$, $\mathscr{C}_K(a) = \mathscr{C}_K(A_i)$. Pertanto, essendo A_i parte completa di K, si ha $\mathscr{C}_K(a) = A_i$.

Discende facilmente dal Lemma 2 il seguente lemma.

Lemma 3. *Se $\langle K, * \rangle$ è un (H, G)-ipergruppo, di sostegno $K = \bigcup_{i \in G} A_i$, allora $\nexists (x, y) \in A_i \times A_j$, $i \neq j$, tale che $x \beta_K y$.* (1).

Lemma 4. *Se $\langle K, * \rangle$ è un (H, G)-ipergruppo, allora $\omega_K = H$ e $K/\beta_K^* \simeq G$* (2).

---

(1) Si ricordi che $x \mathscr{C}_K y \leftrightarrow x \in \mathscr{C}_K(y)$ è una equivalenza e si ha $x \mathscr{C}_K y \leftrightarrow x \beta_K^* y$ [**11**].

(2) Si indica con $\varphi \colon K \to K/\beta_K^*$ la proiezione canonica; ricordiamo che se K è un ipergruppo, K/β_K^* è un gruppo e in tal caso si definisce il cuore di K come nucleo di φ e lo si denota con ω_K ([**11**]).

Dim. Sia $K = \bigcup_{i \in G} A_i$. Dai lemmi 2 e 3 segue che $K/\beta_K^* = \{\varphi(A_i)/i \in G\}$. $\forall i \in G$ si ha $\varphi(A_1)\cdot\varphi(A_i) = \varphi(A_1 * A_i) = \varphi(A_i)$, quindi $\varphi(A_1) = 1_{K/\beta_K^*}$, da cui segue $A_1 \subset \omega_K$. Ma, per il Lemma 2, $\forall x \in A_1$ $\mathscr{C}_K(x) = A_1$ e pertanto $A_1 = \omega_K$, cioè $H = \omega_K$.

Definiamo una bigezione ϕ: $G \to K/\beta_K^*$ ponendo $\phi(i) = \varphi(A_i)$ $\forall i \in G$. ϕ è un omomorfismo di gruppi; infatti $\forall (i, j) \in G^2$, se $i \cdot j = k$, si ha

$$\phi(i \cdot j) = \phi(k) = \varphi(A_k)\,, \qquad \phi(i)\cdot\phi(j) = \varphi(A_i)\cdot\varphi(A_j) = \varphi(A_i * A_j) = \varphi(A_k)\,.$$

Teorema 1. *Siano $\langle K_1, *\rangle$ e $\langle K_2, *'\rangle$ rispettivamente (H_1, G_1)-ipergruppo e (H_2, G_2)-ipergruppo, allora $K_1 \simeq K_2$ implica $H_1 \simeq H_2$ e $G_1 \simeq G_2$* (3).

Dim. Sia f: $K_1 \to K_2$ un isomorfismo, allora $f(\omega_{K_1}) = \omega_{K_2}$ (v. (4) di [**2**]) e quindi, per il Lemma 4, $f(H_1) = H_2$. Sia g: $H_1 \to H_2$ una applicazione così definita: $\forall x \in H_1$ $g(x) = f(x)$. g è chiaramente bigettiva; mostriamo che è un omomorfismo buono; $\forall (x, y) \in H_1^2$, se $\circ_1$ e $\circ_2$ sono rispettivamente le operazioni in H_1 e H_2, si ha $g(x\circ_1 y) = f(x \circ_1 y) = f(x * y) = f(x) *' f(y) = f(x)\circ_2 f(y) = g(x)\circ_2 g(y)$.

$K_1 \simeq K_2$ implica (*v.* **3** di [4]$_6$), $K_1/\beta_{K_1}^* \simeq K_2/\beta_{K_2}^*$; ma, per il Lemma 4, $K_1/\beta_{K_1}^* \simeq G_1$ e $K_2/\beta_{K_2}^* \simeq G_2$, pertanto $G_1 \simeq G_2$.

Teorema 2. *Siano $\langle K_1, *\rangle$ e $\langle K_2, *'\rangle$ rispettivamente (H_1, G)-ipergruppo e (H_2, G')-ipergruppo, con $K_1 = \bigcup_{i \in G} A_i$, $K_2 = \bigcup_{j' \in G'} B_{j'}$, e sia $\forall (i, j') \in G^* \times (G')^*$ $|A_i| = |B_{j'}| = n$, allora $K_1 \simeq K_2$ se, e solo se, $H_1 \simeq H_2$ e $G \simeq G'$.*

Dim. Per il Teorema 1, basta provare l'implicazione $\Leftarrow$. Esiste un isomorfismo f: $G \to G'$ ed una bigezione ψ: $\{A_i\}_{i \in G} \to \{B_{j'}\}_{j' \in G'}$ indotta dalla f nel modo seguente: $\psi(A_i) = B_{j'}$ se, e solo se, $f(i) = j'$. Se $\psi(A_i) = B_{j'}$, poichè per ipotesi $|A_i| = |B_{j'}| = n$, è possibile considerare una bigezione $f_{ij'}$: $A_i \to B_{j'}$. Sia $f_{11'}$: $H_1 \to H_2$ un isomorfismo e siano $\circ_1$ e $\circ_2$ le operazioni rispettivamente in H_1 e H_2. Definiamo una applicazione ϕ: $K_1 \to K_2$ nel modo seguente: $\forall x \in A_i$ se $\psi(A_i) = B_{j'}$ allora $\phi(x) = f_{ij'}(x)$. Proviamo che ϕ è un isomorfismo; poichè ϕ è certamente una bigezione, basta dimostrare che è anche un omomorfismo buono.

$\forall (x, y) \in K_1^2$ vi sono due possibilità:

(i) $(x, y) \in H_1 \times H_1$; (ii) $(x, y) \in A_i \times A_k \neq H_1 \times H_1$.

---

(3) Si ricorda che un omomorfismo bigettivo di semi-ipergruppi è un isomorfismo se, e solo se, è buono.

(i) $\phi(x * y) = \phi(x \circ_1 y) = f_{11'}(x \circ_1 y) = f_{11'}(x) \circ_2 f_{11'}(y) = \phi(x) \circ_2 \phi(y) = \phi(x) *' \phi(y)$.

(ii) Sia $i \cdot k = s$, $f(i) = j'$, $f(k) = h'$, $f(s) = t'$, allora $\phi(x * y) = \phi(A_s) = f_{st'}(A_s) = B_{t'}$ e $\phi(x) *' \phi(y) = f_{ij'}(x) *' f_{kh'}(y) = B_{j'h'} = B_{t'}$.

Teorema 3. *Se $\langle K, \circ \rangle$ è un ipergruppo in cui K, ω_K e K/β_K^* hanno rispettivamente n, m, $n - m + 1$ elementi, allora K è un (H, G)-ipergruppo, di sostegno $K = \bigcup_{i \in G} A_i$, ove H ha m elementi, $\forall i \in G^* \, |A_i| = 1$, $G = K/\beta_K^*$.*

Dim. Poniamo $H = \langle \omega_K, \circ \rangle$. Sia $K - \omega_K = \{x_2, x_3, \dots, x_{n-m+1}\}$; allora, per le ipotesi, $K/\beta_K^* = \{\varphi(\omega_K), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \dots, \varphi(x_{n-m+1})\}$. Poniamo $G = K/\beta_K^*$, $A_1 = \omega_K$, $A_i = \{x_i\}$ per $1 < i \leqslant n - m + 1$. Sia $\langle \overline{K}, * \rangle$ un (H, G)-ipergruppo e proviamo che $\langle K, \circ \rangle = \langle \overline{K}, * \rangle$. Certamente i sostegni K e $\overline{K}$ coincidono. Inoltre $\forall (x, y) \in \omega_K^2$ si ha, per definizione, $x * y = x \circ y$. Sia $(x_i, x_j) \in A_i \times A_j \neq \omega_K \times \omega_K$; allora, se $\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_j) = \varphi(x_k) \neq \varphi(\omega_K)$, si ha, per definizione, $x_i * x_j = A_k = \{x_k\}$. Proviamo che $x_i \circ x_j = \{x_k\}$. $\varphi(x_k) = \varphi(x_i) \cdot \varphi(x_j) = \{\varphi(x) / x \in x_i \circ x_j\}$, quindi $\forall x \in x_i \circ x_j \; x_k \beta_K^* x$; allora $x \in K - \omega_K$. Quindi $x = x_k$, perchè in caso contrario si avrebbe $|K/\beta_K^*| < n - m + 1$, contro le ipotesi. Se invece $\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_j) = \varphi(\omega_K)$, per definizione, si ha $x_i * x_j = \omega_K$. Poichè $\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_j) = \varphi(x_i \circ x_j) = \varphi(\omega_K)$ segue che $\forall u \in x_i \circ x_j$ $u \in \omega_K$, cioè $\mathscr{C}_K(u) = \omega_K$ e pertanto $x_i \circ x_j = \mathscr{C}_K(x_i) \circ \mathscr{C}_K(x_j) = \mathscr{C}_K(x_i \circ x_j) = \mathscr{C}_K(u) = \omega_K$. Infine sia $(x, x_j) \in \omega_K \times A_j$, allora, per definizione, $x * x_j = A_j = \{x_j\}$ ed inoltre $x \circ x_j \subset \omega_K \circ x_j = \mathscr{C}_K(x_j) = \{x_j\}$; pertanto $x \circ x_j = \{x_j\}$.

Teorema 4. *Il numero degli ipergruppi non isomorfi, in cui il sostegno, il cuore e il quoziente modulo β^*, hanno rispettivamente n, m, $n - m + 1$ elementi è uguale al prodotto del numero degli ipergruppi non isomorfi di cardinalità m, per il numero dei gruppi non isomorfi di cardinalità $n - m + 1$.*

Dim. Sia r il numero degli ipergruppi non isomorfi con m elementi, e sia s il numero dei gruppi non isomorfi con $n - m + 1$ elementi. Siano H_i per $i = 1, 2, \dots, r$, G_i per $i = 1, 2, \dots, s$, rispettivamente, r ipergruppi non isomorfi di cardinalità m e s gruppi non isomorfi di cardinalità $n - m + 1$. Siano $A_1, A_2 = \{x_2\}$, $A_3 = \{x_3\}, \dots, A_{n-m+1} = \{x_{n-m+1}\}$, $n - m + 1$ insiemi a due a due disgiunti, tali che $\exists p \in \{1, 2, \dots, r\}$ ed $\exists q \in \{1, 2, \dots, s\}$ per cui $A_1 = H_p$, $\{1, 2, \dots, n - m + 1\} = G_q$. Fissato un ipergruppo H_k, al variare dei gruppi G_i, per $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, si possono costruire s (H_k, G_i)-ipergruppi, di sostegno $\bigcup_{j \in \{1, 2, \dots, n-m+1\}} A_j$, in cui il sostegno, il cuore e il quoziente modulo β^* hanno rispettivamente $n, m, n - m + 1$ elementi. Per il Teorema 2 tali ipergruppi sono non isomorfi. Pertanto al variare di H_k, per $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, si ottengono sempre per il Teorema 2, $r \cdot s$ ipergruppi non isomorfi. Si noti che, per il Teorema 2, gli insiemi $A_2, A_3, \ldots, A_{n-m+1}$ possono essere variati, purchè siano sempre a due a due disgiunti ed abbiano ciascuno intersezione vuota con A_1, senza con ciò alterare il numero $r \cdot s$ di ipergruppi non isomorfi già determinato. Inoltre, per il Teorema 3, se K è un ipergruppo di cardinalità n, in cui ω_K e K/β^*_K hanno rispettivamente m e $n-m+1$ elementi, allora K è un (H, G)-ipergruppo di sostegno $\bigcup_{j \in G} A_j$, ove $|H| = m$, $|A_j| = 1$ $\forall j \in G^*$ e $|G| = n-m+1$, quindi $\exists u \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\exists v \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tali che $H \simeq H_u$ e $G \simeq G_v$; pertanto K, a meno di isomorfismi, è uno degli $r \cdot s$ ipergruppi già considerati.

Teorema 5. *Sia $\langle K, * \rangle$ un (H, G)-ipergruppo, allora K è ciclico se, e solo se, G è un gruppo ciclico.*

Dim. Sia G ciclico con generatore i e mostriamo che $\forall x \in A_i$, x genera K. Sia $y \in K$, allora $\exists j \in G$ tale che $y \in A_j$. Certamente $\exists n \in N^*$ tale che $i^n = j$, da cui, per definizione di $*$, $* \, x^n = A_j$, cioè $y \in * \, x^n$.

Viceversa, sia K ciclico con generatore h; per definizione di $*$, h non può appartenere ad H, per cui $\exists i \in G^*$ tale che $h \in A_i$. Proviamo che i genera G. Sia $j \in G$; $\forall y \in A_j$ $\exists n \in N^*$ tale che $y \in * \, h^n$. Per il Lemma 1 e poichè gli insiemi A_i sono a due a due disgiunti segue che $* \, h^n = A_j$ e quindi, per definizione di $*$, $i^n = j$.

Corollario 1. *Il numero degli ipergruppi ciclici non isomorfi, in cui il sostegno, il cuore e il quoziente modulo β^*, hanno rispettivamente n, m, $n-m+1$ elementi è uguale al numero degli ipergruppi non isomorfi di cardinalità m.*

Dim. Segue subito dai teoremi 4 e 5 e dal fatto che tutti i gruppi ciclici di ordine $n-m+1$ sono isomorfi a Z_{n-m+1}.

Corollario 2. (I) *Il numero degli ipergruppi non isomorfi, in cui il sostegno, il cuore e il quoziente modulo β^*, hanno rispettivamente $n, 2, n-1$ elementi è uguale al prodotto del numero 8 per il numero dei gruppi non isomorfi di cardinalità $n-1$.* (II) *Gli ipergruppi ciclici non isomorfi, in cui il sostegno, il cuore e il quoziente modulo β^* hanno rispettivamente n, 2, $n-1$ elementi sono otto.*

Dim. Per il Teorema 6 di [**7**]$_1$, a meno di isomorfismi, gli ipergruppi di cardinalità due sono otto, pertanto dal Teorema 4 e dal Corollario 1, segue l'enunciato.

Corollario 3. *Se $\langle K, * \rangle$ è un ipergruppo di cardinalità 3, in cui il cuore*

ω_K ha 2 elementi, allora, a meno di isomorfismi, K ha una delle seguenti tabelle di moltiplicazione

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	a, b

	a	b	c
a	a, b	a, b	c
b	a, b	a	c
c	c	c	a, b

	a	b	c
a	a	a, b	c
b	a, b	a, b	c
c	c	c	a, b

	a	b	c
a	a	b	c
b	a, b	a, b	c
c	c	c	a, b

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a, b	c
c	c	c	a, b

	a	b	c
a	a	a, b	c
b	b	a, b	c
c	c	c	a, b

	a	b	c
a	a	a, b	c
b	a, b	b	c
c	c	c	a, b

	a	b	c
a	a, b	a, b	c
b	a, b	a, b	c
c	c	c	a, b

Dim. Per il Teorema 3, $\langle K, *\rangle$ è un (H, G)-ipergruppo, ove $|H| = 2$, $G = \{1, 2\}$, $K = A_1 \cup A_2$, $|A_2| = 1$. Quindi, per come è definita l'iperoperazione in un (H, G)-ipergruppo, per il Teorema 6 di **[7]**$_1$ e per il Teorema 2, si ha la tesi.

3 – Teorema 6. *Se $\langle K, *\rangle$ è un (H, G)-ipergruppo di sostegno $K = \bigcup_{i \in G} A_i$, con H ipergruppo quasicanonico e $|A_i| = 1$ $\forall i \in G^*$, allora $\langle K, *\rangle$ è quasicanonico* (4).

Dim. Proviamo che K possiede una identità scalare. Sia « e » l'identità scalare di $\langle H, \circ\rangle$; allora $\forall x \in H$ si ha $x * e = x \circ e = \{x\}$ ed $e * x = e \circ x = \{x\}$;

(4) Un ipergruppo H è *quasicanonico* se è reversibile, ha una identità scalare e ogni elemento ha un unico inverso (**[1]**$_2$, **[2]**).

se $\{x\} = A_i$ $x * e = e * x = A_i = \{x\}$, quindi « e » è identità scalare di $\langle K, *\rangle$. Mostriamo che

$$(\cdot) \qquad \forall x \in K \quad \exists ! x' \in K \quad \text{tale che } x * x' \cap x' * x \ni e\,.$$

Se $x \in H$ certamente $\exists ! x' \in H$ tale che $x \circ x' \cap x' \circ x \ni e$, da cui, per definizione di $*$, segue $(\cdot)$.

Sia $\{x\} = A_i$. Certamente $\exists ! j \in G$ tale che $i \cdot j = j \cdot i = 1$. Posto $\{y\} = A_j$, dalla definizione di $*$, si ha $x * y = y * x = H \ni e$. Si noti che y è unico, perchè j è unico.

Resta da provare che $\langle K, *\rangle$ è reversibile. Sia $z \in x * y$. Se $(x, y) \in H^2$ certamente $\exists y' \in H$ tale che $x \in z \circ y'$ e quindi $x \in z * y'$. Se $(x, y) \in A_i \times A_j$ e $k = i \cdot j$, poichè $\exists ! s \in G$ tale che $i = k \cdot s$ con $s = j^{-1}$, posto $\{u\} = A_s$, si ha $x \in z * u$, con u inverso di y perchè $s = j^{-1}$.

Immediata conseguenza del Teorema 6 è il corollario seguente.

Corollario 4. *Se K è un (H, G)-ipergruppo, di sostegno $K = \bigcup_{i \in G} A_i$, con $|A_i| = 1$ $\forall i \in G^*$, allora*

(I) *Se H è canonico, si ha che K è quasicanonico.*
(II) *Se H è canonico e G è abeliano, si ha che K è canonico* (5).

Lemma 5. *Se $\langle K, *\rangle$ è un (H, G)-ipergruppo, di sostegno $K = \bigcup_{i \in G} A_i$, posto $(x/y)_H = \{u \in H / x \in u \circ y\}$ e $(x/y)_K = \{v \in K / x \in v * y\}$, si ha*

(1) $\forall (x, y) \in H^2 \quad (x/y)_K = (x/y)_H\,,$
(2) $\forall (x, y) \in A_i \times A_j \quad (x/y)_K = A_m$ *se* $m = i \cdot j^{-1}$.

Dim. (1) Dalla definizione di $*$ si ha che $\forall (x, y) \in H^2$ $x * y = x \circ y$, quindi $(x/y)_H \subset (x/y)_K$. Del resto non esiste alcun elemento $v \in K - H$ tale che $x \in v * y$, perchè in tal caso esisterebbe $i \in G^*$ tale che $v \in A_i$ e si otterrebbe $x \in H$, $x \in v * y = A_i$, cioè $H \cap A_i \neq \emptyset$, il che è in contrasto con la definizione di (H, G)-ipergruppo. Allora $(x/y)_H = (x/y)_K$.

(2) Se $x \in A_i$, $v * y = A_i$, da cui per definizione di $*$, supposto $v \in A_m$, si ha $m = i \cdot j^{-1}$. Viceversa se $v \in A_m$ con $m = i \cdot j^{-1}$, certamente $x \in v * y$, quindi $v \in (x/y)_K$.

---

(5) Un ipergruppo H è *canonico* se è quasicanonico ed è commutativo ([2], [13]).

Teorema 7. *Sia* $\langle K, *\rangle$ *un* (H, G)*-ipergruppo, allora* K *è uno Join Space se, e solo se,* H *è uno Join Space e* G *è abeliano* (6).

Dim. Sia K uno Join Space. Allora H e G sono commutativi. Sia $(x, y, z, t) \in H^4$ e $(x/y)_H \cap (z/t)_H \neq \emptyset$. Per il punto (1) del Lemma 5 segue $(x/y)_K \cap (z/t)_K \neq \emptyset$, da cui essendo K uno Join Space, si ha che $x * t \cap y * z \neq \emptyset$. Quindi $x \circ t \cap y \circ z \neq \emptyset$, cioè H è Join Space.

Viceversa sia G abeliano e H uno Join Space. Occorre provare che $\forall (x, y, z, t) \in K^4$ vale l'implicazione seguente

$$(\cdot) \qquad (x/y)_K \cap (z/t)_K \neq \emptyset \rightarrow x * t \cap y * z \neq \emptyset\,.$$

Se $(x, y, z, t) \in H^4$ la dimostrazione è analoga a quella della prima implicazione del teorema. Se $(x, y, z, t) \in H \times H \times H \times A_i$, allora per il Lemma 5 si ha $(x/y)_K = (x/y)_H$ e $(z/t)_K = A_j$ con $j = i^{-1}$. Pertanto il primo membro di $(\cdot)$ è vuoto.

Alla stessa conclusione si perviene quando (x, y, z, t) appartiene ai seguenti insiemi: $H \times H \times A_i \times H$, $H \times A_i \times H \times H$, $A_i \times H \times H \times H$. Sia $(x, y, z, t) \in H \times H \times A_i \times A_i$. Dal Lemma 5 segue che $(x/y)_K = (x/y)_H$ e $(z/t)_K = H$. Per come si è definito l'iperprodotto $*$ si ha $x * t = A_i = y * z$ e quindi vale $(\cdot)$. Se $(x, y, z, t) \in H \times H \times A_i \times A_j$, il primo membro di $(\cdot)$ risulta vuoto. Se $(x, y, z, t) \in H \times A_i \times A_j \times H$, allora $(x/y)_K = A_p$ con $p = i^{-1}$, $(z/t)_K = A_j$. $A_p \cap A_j \neq \emptyset$ implica $p = j$. Inoltre $x * t = x \circ t \subset H$, $y * z = H$ e $(\cdot)$ è verificata.

Con procedimenti analoghi ai precedenti si verificano facilmente tutti gli altri casi al variare della quaterna (x, y, z, t) in K^4.

Teorema 8. *Sia* $\langle K, *\rangle$ *un* (H, G)*-ipergruppo e sia* T_H *l'ipergruppo totale avente per sostegno* H*, allora* $\langle \Delta(K), \square\rangle$ *è* (T_H, G)*-ipergruppo* (7).

Dim. Sia $K = \bigcup_{i \in G} A_i$. Si sa che l'iperoperazione $*'$ in (T_H, G)-ipergruppo è così definita: $\forall (x, y) \in H^2$ $x *' y = H$, $\forall (x, y) \in A_i \times A_j \neq H \times H$ $x *' y = A_k$ se $i \cdot j = k$.

---

(6) Un ipergruppo commutativo H è uno *Join Space* se $\forall (x, y, z, t) \in H^4$ vale l'implicazione $(x/y)_H \cap (z/t)_H \neq \emptyset \rightarrow x \circ t \cap y \circ z \neq \emptyset$ ([5], [**14**]).

(7) Si chiama ipergruppo *totale* (sull'insieme H), l'ipergruppo $\langle H, \circ\rangle$ tale che $\forall (x, y) \in H^2$, $x \circ y = H$.

Si denota con $\langle \Delta(K), \square\rangle$ il *completamento* dell'ipergruppo $\langle K, \circ\rangle$, cioè l'ipergruppo costruito sul sostegno K ponendo $\forall (x, y) \in K^2$ $x \square y = \mathscr{C}_K(x \circ y)$ ([**11**]).

Mostriamo che $\forall(x, y) \in K^2 \; x \square y = x *' y$.

Se $(x, y) \in H^2$, allora $x \square y = \mathscr{C}_K(x * y) = \omega_K * (x * y) = H * (x * y) = H * (x \circ y) = H \circ (x \circ y) = H$.

Se $(x, y) \in A_i \times A_j \neq H \times H$, allora posto $i \cdot j = k$ in G, si ha $x \square y = \mathscr{C}_K(x * y) = \mathscr{C}_K(A_k) = A_k$.

Bibliografia

[1] P. Bonansinga [•]$_1$ *Un teorema su gli ipergruppi canonici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (29) **57** (1981); [•]$_2$ *Sugli ipergruppi quasicanonici*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (in corso di stampa).

[2] P. Bonansinga e P. Corsini, *Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi*, Boll. Un. Mat. Ital. (1981).

[3] R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[4] P. Corsini: [•]$_1$ *Hypergroupes réguliers et hypermodules*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) **20** (1975), 121-135; [•]$_2$ *Hypergroupes d'associativité des quasigroupes mediaux*, Atti convegno su sistemi binari e loro applicazioni, Taormina (1978), 7-22; [•]$_3$ *Sur les semi-hypergroupes*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_4$ *Sur les semi-hypergroupes completes et les groupoides*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_5$ *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_6$ *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (in corso di stampa).

[5] P. Corsini e G. Romeo, *Hypergroupes completes et T-groupoides*, Atti convegno su sistemi binari e loro applicazioni, Taormina (1978), 129-146.

[6] M. De Salvo: [•]$_1$ *Omomorfismi di sd-ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_2$ *Sugli ipergruppi completi finiti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 269-280; [•]$_3$ *I K_H ipergruppi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **31** (1982), 113-122.

[7] M. De Salvo e D. Freni: [•]$_1$ *Semi-ipergruppi e ipergruppi ciclici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **30** (1981), 44-59; [•]$_2$ *Sugli ipergruppi ciclici e completi*, Matematiche, (Catania) **35** (1980).

[8] M. Dresher and O. Ore, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math. **60** (1938).

[9] D. Freni: [•]$_1$ *Semi-ipergruppi e equivalenze regolari*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **29** (1980), 276-293; [•]$_2$ *Su gli r-ipergruppi e gli ampliamenti*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1982); [•]$_3$ *Ipergruppi ciclici e torsione negli ipergruppi*, Matematiche (Catania) **35** (1980).

[10] T. Kepka, *A note on the associativity hypergroups of quasigroups and loops*. Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1980).

[11] M. Koskas, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures et Appl. **49** (1970), 155-192.

[12] A. Machi', *Introduzione alla teoria dei gruppi*, Feltrinelli, Milano 1974.

[13] J. Mittas, *Hypergroupes canoniques,* Math. Balkanica **2** (1972), 165-179.
[14] W. Prenowitz and J. Jantosciak, *Geometries and Join Spaces,* J. Reine Angew. Math. **257** (1972), 100-128.
[15] R. Roth, *Character and conjugacy class hypergroups of a finite group,* Ann. Mat. **20** (1975), 295-311.
[16] Y. Sureau, *These de doctorat d'état,* Université de Clermont II (1980).

Summary

One knows the construction of a hypergroup K having, as core a fixed hypergroup H $([4]_1, [7]_1)$. In this paper, the aforesaid construction is generalized to a large class of hypergroups obtained from a group and from a family of fixed sets, and its properties are analysed especially in the finite case.

* * *