Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 247-255

ELENA GRASSINI (*)

Su un problema non lineare dell'idrodinamica (**)

1 - Sia Ω un insieme aperto, limitato e connesso dello spazio euclideo ad m dimensioni $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant 3$, e sia Γ la sua frontiera; sia inoltre Ω dotato della proprietà di cono. Indichiamo con $\boldsymbol{\nu}$ la normale a Γ diretta verso l'esterno e con $\boldsymbol{\tau}$ un qualsiasi versore tangente a Γ.

Detto μ il coefficiente di viscosità, $\boldsymbol{u}(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_m(x, t)\}$ la velocità, $p(x, t)$ la pressione, $\boldsymbol{f}(x, t) = \{f_1(x, t), \ldots, f_m(x, t)\}$ la forza di massa, le equazioni di Navier-Stokes che governano il moto del fluido, supposto incomprimibile e di densità unitaria, sono

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_j}{\partial t} - \mu \Delta u_j + \sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = f_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \\ &\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 , \end{aligned} \tag{1.1}$$

che possono essere scritte anche, in forma vettoriale

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu \Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 . \end{aligned} \tag{1.2}$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Politecnico, P.za Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto M.P.I. 60%: «Problemi di evoluzione e problemi mal posti della Fisica Matematica». — Ricevuto: 14-II-1983.

Consideriamo il moto di un fluido viscoso, incomprimibile, in un tubo cilindrico con parete permeabile e circondato dallo stesso fluido; si ha allora un flusso attraverso la parete, con velocità, diretta perpendicolarmente alla parete, che sperimentalmente si ricava essere proporzionale alla radice quadrata del salto di pressione.

Dette Γ_1 e Γ_2 le sezioni iniziale e finale del tubo, Γ_3 la parete, associamo al sistema (1.2) la seguente condizione iniziale

$$u(x,0) = z(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{1.3}$$

e le condizioni al contorno

$$\alpha_i(x,t) = p(x,t) + \tfrac{1}{2}|u(x,t)|^2 \qquad (x \in \Gamma_i;\ 0 \leqslant t \leqslant T;\ i = 1, 2)\,, \tag{1.4}$$

$$p(x,t) = \delta(x,t)\,|u(x,t)|\,u(x,t) \times \boldsymbol{\nu} \qquad (x \in \Gamma_3;\ 0 \leqslant t \leqslant T)\,, \tag{1.5}$$

$$u(x,t) \times \boldsymbol{\tau} = 0 \qquad (x \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)\,, \tag{1.6}$$

dove le $\alpha_i(x,t)$ sono funzioni date e $\delta(x,t)$ è il coefficiente di permeabilità, $\delta(x,t) \geqslant 0$.

Si interpretano le condizioni al contorno nel modo seguente: la (1.4) assegna l'energia del fluido sulle sezioni iniziale e finale del tubo; la (1.5) esprime analiticamente la legge idraulica sperimentale, che regola il flusso attraverso la parete Γ_3, posto che la pressione esterna sia 0; la (1.6) impone alla velocità di essere ortogonale alla frontiera Γ.

Analogo problema è stato trattato in $[4]_{1,2,3}$, dove si dimostra un teorema di esistenza e unicità in piccolo per $m = 2$ e in [**5**], dove si dimostra un teorema di esistenza e unicità in grande, sempre per $m = 2$.

Osserviamo che, non essendo le equazioni di Navier-Stokes relativistiche, la loro validità è soggetta alla condizione che la velocità del fluido non si avvicini alla velocità c della luce. Si può pensare allora di fissare in modo opportuno $M < c$ e ammettere che le soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes rappresentino il moto del fluido in un certo intervallo di tempo, finchè la velocità $u(x,t)$ si mantenga limitata.

Il problema: *trovare le soluzioni* u *del sistema* (1.2) *nel cilindro* $Q = \Omega \times [0, T]$, $|u| \leqslant M$, *con le condizioni* (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) può allora essere riformulato nel modo seguente: *trovare* u *che soddisfi le condizioni* (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) *e inoltre*

$$\begin{aligned} &\int_0^t \big(u'(\eta) - \mu \Delta u(\eta) + (u(\eta)\cdot \mathrm{grad})\,u(\eta) \\ &\qquad\qquad + \mathrm{grad}\, p(\eta) - f(\eta),\ u(\eta) - \boldsymbol{\varphi}(\eta)\big)_{L^2} d\eta \leqslant 0 \\ &\mathrm{div}\, u = 0 \ \ (^1)\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1) Nella (1.7) si è posto $u(t) = \{u(x,t),\ x \in \Omega\}$; $u'(t) = \{\partial u(x,t)/\partial t,\ x \in \Omega\}$; $\Delta u(t) = \{\Delta u(x,t);\ x \in \Omega\}$; $f(t) = \{f(x,t),\ x \in \Omega\}$; $p(t) = \{p(x,t),\ x \in \Omega\}$.

imponendo alla $\boldsymbol{u}$ *e alle test-functions* $\boldsymbol{\varphi}$ *di appartenere ad un opportuno convesso* (2).

Dimostreremo in questo lavoro un teorema di esistenza e unicità in grande, valido per m qualsiasi, della soluzione del sistema (1.7) con le condizioni (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), generalizzando quanto dimostrato in $[4]_{4,5}$ per il problema di Dirichlet omogeneo.

2 – Diamo ora una formulazione precisa del problema in questione e la relativa definizione di soluzione. Allo scopo introduciamo alcune notazioni

$$\mathscr{N} = \{\boldsymbol{v} \in C^\infty(\Omega);\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0;\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ su } \Gamma\};$$

$$N^0 = \text{chiusura di } \mathscr{N} \text{ in } L^2(\Omega), \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{N^0} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{j=1}^m u_j v_j \, d\Omega;$$

$$N^s = \text{chiusura di } \mathscr{N} \text{ in } H^s(\Omega) \ (s > 0), \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{N^s} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{H_0^s(\Omega)};$$

$$K = \{\boldsymbol{v} \in N^0: |\boldsymbol{v}| \leqslant M \text{ q.o. in } \Omega\}; \quad K \text{ risulta convesso e chiuso in } N^0;$$

$$(N^s)' = \text{duale di } N^s, \quad \text{con } (N^0)' = N^0;$$

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = ((\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad})\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{N^0};$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \text{dualità tra } (N^1)' \text{ e } N^1.$$

Osserviamo che $N^0 \subset L^2(\Omega)$, $N^1 \subset H^1(\Omega)$ e che l'immersione di N^1 in N^0 è compatta.

Def. 1. $\boldsymbol{v}(t)$ *è soluzione debole in* $[0, T]$ *del sistema* (1.7) *relativa al convesso* K, *soddisfacente le condizioni* (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) se

(a) $\boldsymbol{v}(t) \in L^\infty(0, T; N^0) \cap L^2(0, T; K \cap N^1)$,

(b) $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa q.o. in $[0, T]$ la disequazione

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad & \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\|_{N^0}^2 - \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\varphi}(0)\|_{N^0}^2 + \int_0^t \{(\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\varphi})_{N^0} + \mu(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\varphi})_{N^1} \\ & + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\varphi}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\varphi} \rangle + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} (\alpha_i - \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\varphi}) \times \boldsymbol{\nu} \, d\Gamma_i \\ & + \int_{\Gamma_3} \delta |\boldsymbol{v}| (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\varphi}) \times \boldsymbol{\nu} \, d\Gamma_3\} \, d\eta \leqslant 0 \\ & \forall \boldsymbol{\varphi}(t) \in L^2(0, T; K \cap N^1) \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\varphi}'(t) \in L^2(0, T; N^0).\end{aligned}$$

---

(2) Per la verifica dell'equivalenza di tali formulazioni e per una discussione più approfondita del significato fisico dell'introduzione delle disequazioni, si veda ad esempio $[4]_{4,5}$.

Notiamo che la (2.1) è ottenuta dalle (1.7), applicando la formula di Green, tenendo presenti le condizioni (1.4), (1.5) e osservando che, come si può verificare, per la (1.6) e la seconda delle (1.7), risulta $\int_\Gamma \boldsymbol{u}\times(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}\Gamma = 0$.

3 – Dimostriamo il seguente teorema di esistenza e unicità in grande.

Teorema. *Esiste in tutto* $[0, T]$ *una e una sola soluzione* (*nel senso precisato nella Def.* 1) *del sistema* (1.7), *soddisfacente la condizione iniziale* (1.3) *e le condizioni al contorno* (1.4), (1.5), (1.6), *nelle seguenti ipotesi*

$$\text{(I)}\quad \boldsymbol{f}(t)\in L^2(0, T; (N^1)')\,,$$

$$\text{(II)}\quad \alpha_i(t)\in L^2(0, T; L^2(\Gamma_i))\quad (i=1, 2)\,,$$

$$\text{(III)}\quad \delta(t)\in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))\,,\qquad \delta(x, t)\geqslant 0\qquad (x\in\Gamma_3,\ t\in[0, T]),$$

$$\text{(IV)}\quad \boldsymbol{z}\in N^0\,.$$

Dim. Dovremo dimostrare anzitutto che esiste almeno una funzione $\boldsymbol{v}(t)$ che soddisfa le condizioni (a) e (b) della Def. 1.

Sia β un operatore di penalizzazione relativo al convesso K. Indicando con P l'operatore proiezione su K, possiamo porre ([**3**], cap. 3, § 5.2)

$$\beta(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} - P\boldsymbol{w}\,; \tag{3.1}$$

β è monotono, emicontinuo da $L^2(0, T; N^0)$ in sè.

Sia s un numero maggiore di $m/2$ e consideriamo una base $\{\boldsymbol{g}_j\}$ in N^s, che supponiamo (cosa possibile) ortonormale in N^0. Posto

$$\boldsymbol{v}_n(t) = \sum_{j=1}^{n}\sigma_{jn}\boldsymbol{g}_j\,,\qquad \boldsymbol{f}_n(t) = \Pi_n\boldsymbol{f}(t)\,, \tag{3.2}$$

(dove Π_n è l'operatore proiezione sul sottospazio definito da $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$), consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned}&\big(\boldsymbol{v}_n'(t) - \mu\Delta\boldsymbol{v}_n(t) + n\beta(\boldsymbol{v}_n(t)) - \boldsymbol{f}_n(t), \boldsymbol{g}_j\big)_{N^0} + b\big(P\boldsymbol{v}_n(t), \boldsymbol{v}_n(t), \boldsymbol{g}_j\big)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_i}\big(\alpha_i(x, t) - \tfrac{1}{2}|P\boldsymbol{v}_n(x, t)|^2\big)\boldsymbol{g}_j(x)\times\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma_i\\ &\quad+\int_{\Gamma_3}\delta(x, t)\,|P\boldsymbol{v}_n(x, t)|\,\big(P\boldsymbol{v}_n(x, t)\times\boldsymbol{\nu}\big)\boldsymbol{g}_j(x)\times\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma_3 = 0\qquad (j=1, \ldots, n),\end{aligned} \tag{3.3}$$

con le condizioni iniziali

$$\boldsymbol{v}_n(0) = \Pi_n\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_n\,. \tag{3.4}$$

Il sistema (3.3) con la condizione (3.4) ammette in un intervallo $[0, t]$, con $t < T$, una e una sola soluzione, che indichiamo con $\boldsymbol{v}_n(t)$.

Per stabilire per $\boldsymbol{v}_n(t)$ delle maggiorazioni a priori, che, in particolare, ci permetteranno di garantire l'esistenza della soluzione in tutto $[0, T]$, moltiplichiamo le (3.3) per σ_{jn}, sommiamo e integriamo in $[0, t]$ $(0 < t \leqslant T)$. Otteniamo

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_n(t)\|^2_{N^0} - \tfrac{1}{2}\|\Pi_n \boldsymbol{z}\|^2_{N^0} + \int_0^t \{\mu\|\boldsymbol{v}_n(\eta)\|^2_{N^1} + n\big(\beta(\boldsymbol{v}_n(\eta)), \boldsymbol{v}_n(\eta)\big)_{N^0} \\
& - \big(\boldsymbol{f}_n(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta)\big)_{N^0} + b\big(P\boldsymbol{v}_n(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta)\big) \\
& + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} \big(\alpha_i(x, \eta) - \tfrac{1}{2}|P\boldsymbol{v}_n(x, \eta)|^2\big)\boldsymbol{v}_n(x, \eta) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_i \\
& + \int_{\Gamma_3} \delta(x, \eta)|P\boldsymbol{v}_n(x, \eta)|\big(P\boldsymbol{v}_n(x, \eta) \times \boldsymbol{\nu}\big)\boldsymbol{v}_n(x, \eta) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_3\}\, \mathrm{d}\eta = 0 .
\end{aligned}
$$

Tenendo conto delle ipotesi (I), (II), (III), del fatto che $|P\boldsymbol{v}_n| \leqslant M$ e utilizzando teoremi di immersione e di traccia, otteniamo

$$(3.6)\qquad \big(\beta(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n\big)_{N^0} \geqslant 0 , \qquad\qquad (3.7)\qquad |(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}_n)_{N^0}| \leqslant \|\boldsymbol{f}_n\|_{(N^1)'}\|\boldsymbol{v}_n\|_{N^1} ,$$

$$(3.8)\qquad |b(P\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n)| \leqslant M\|\boldsymbol{v}_n\|_{N^0}\|\boldsymbol{v}_n\|_{N^1} \leqslant M\big(\varepsilon\|\boldsymbol{v}_n\|^2_{N^1} + \delta(\varepsilon)\|\boldsymbol{v}_n\|^2_{N^0}\big) ,$$

$$(3.9)\qquad \Big|\int_{\Gamma_i} \big(\alpha_i(x, t) - \tfrac{1}{2}|P\boldsymbol{v}_n(x, t)|^2\big)\boldsymbol{v}_n(x, t) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_i\Big| \leqslant c_1\|\boldsymbol{v}_n\|_{L^2(\Gamma_i)} \leqslant c_2\|\boldsymbol{v}^n\|_{N^1} ,$$

$$(3.10)\qquad \Big|\int_{\Gamma_3} \delta(x, t)|P\boldsymbol{v}_n(x, t)|\big(P\boldsymbol{v}_n(x, t) \times \boldsymbol{\nu}\big)\boldsymbol{v}_n(x, t) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_3\Big| \leqslant c_3\|\boldsymbol{v}_n\|_{N^1} .$$

Sostituendo le (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) nella (3.5) e tenendo conto della (3.6), otteniamo

$$
\begin{aligned}
(3.11)\qquad & \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_n(t)\|^2_{N^0} + \int_0^t \mu\|\boldsymbol{v}_n(\eta)\|^2_{N^1}\, \mathrm{d}\eta \\
& \leqslant \tfrac{1}{2}\|\Pi_n \boldsymbol{z}\|^2_{N^0} + \int_0^t \{c_4\|\boldsymbol{v}_n\|^2_{N^0} + M\varepsilon\|\boldsymbol{v}_n\|^2_{N^1} + c_5\|\boldsymbol{v}_n\|_{N^1}\}\, \mathrm{d}\eta .
\end{aligned}
$$

Prendendo $\varepsilon < \mu/M$, dalla (3.11) segue che

$$(3.12)\qquad \|\boldsymbol{v}_n(t)\|_{N^0} \leqslant M_1 , \qquad \int_0^T \|\boldsymbol{v}_n(t)\|^2_{N^1}\, \mathrm{d}t \leqslant M_2 ,$$

con M_1 e M_2 costanti indipendenti da n.

Allora la soluzione esiste in tutto $[0, T]$; inoltre dalla successione $\{\boldsymbol{v}_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione (che indichiamo ancora con $\{\boldsymbol{v}_n\}$) tale che

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{v}_n(t) = \boldsymbol{v}(t) \quad \text{in } L^\infty(0, T; N^0) \text{ debole star}, \tag{3.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{v}_n(t) = \boldsymbol{v}(t) \quad \text{in } L^2(0, T; N^1) \text{ debole}. \tag{3.14}$$

Per mostrare che $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa la condizione (a) rimane da verificare che $\boldsymbol{v} \in K$. Osserviamo ora che dalle (3.5), (3.13), (3.14) si ottiene

$$\int_0^T n(\beta(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n)_{N^0}\,\mathrm{d}t \leqslant c_6; \qquad \text{pertanto} \tag{3.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (\beta(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n)_{N^0}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{3.16}$$

Di conseguenza $\|\beta(\boldsymbol{v}_n)\|_{L^2(0,T;N^0)}$ può essere resa piccola a piacere, quindi ([**3**], cap. 3, § 5.3) risulta

$$\|\beta(\boldsymbol{v}(t))\|_{L^2(0,T;N^0)} = 0 \Rightarrow \beta(\boldsymbol{v}(t)) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}(t) \in L^2(0, T; K) \tag{3.17}$$

e la condizione (a) è completamente verificata.

Sia ora $\boldsymbol{\psi}$ una funzione qualunque di $H_0^1(0, T; N^s)$, con $\boldsymbol{\psi}_n = \Pi_n \boldsymbol{\psi} = \sum_{j=1}^n \varrho_{jn} \boldsymbol{g}_j$; moltiplichiamo la (3.3) per ϱ_{jn}, sommiamo e integriamo in $[0, T]$. Ricaviamo

$$\begin{aligned}\int_0^T \{(\boldsymbol{v}_n', \boldsymbol{\psi}_n)_{N^0} &- \mu(\Delta \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{\psi}_n)_{N^0} + n(\beta(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{\psi}_n)_{N^0} - (\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{\psi}_n)_{N^0} \\ &+ b(P\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{\psi}_n) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} (\alpha_i - \tfrac{1}{2}|P\boldsymbol{v}_n|^2)\boldsymbol{\psi}_n \times \boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma_i \\ &+ \int_{\Gamma_3} \delta |Pv_n| (P\boldsymbol{v}_n \times \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\psi}_n \times \boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Gamma_3\}\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Tenendo conto del fatto che la base $\{\boldsymbol{g}_j\}$ è ortonormale in N^0, dalla (3.18) si ricava

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T (\boldsymbol{v}_n', \boldsymbol{\psi})_{N^0}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^T (\boldsymbol{v}_n', \boldsymbol{\psi}_n)_{N^0}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mu \|\boldsymbol{v}_n\|_{L^2(0,T;N^1)} \|\boldsymbol{\psi}_n\|_{L^2(0,T;N^1)} \\ &+ \|\boldsymbol{f}_n\|_{L^2(0,T;(N^1)')} \|\boldsymbol{\psi}_n\|_{L^2(0,T;N^1)} + c_7 \|\boldsymbol{v}_n\|_{L^2(0,T;N^1)} \|\boldsymbol{\psi}_n\|_{L^2(0,T;N^0)} \\ &+ c_8 \|\boldsymbol{\psi}_n\|_{L^2(0,T;N^1)} + \left|\int_0^T n(\beta(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{\psi}_n)_{N^0}\,\mathrm{d}t\right|.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Osserviamo ora che, per la definizione dell'operatore β, risulta $\beta(\boldsymbol{v}_n)=0$ quando $|\boldsymbol{v}_n|\leqslant M$ e $\beta(\boldsymbol{v}_n)\times\boldsymbol{v}_n=|\beta(\boldsymbol{v}_n)||\boldsymbol{v}_n|$. Allora dalla (3.15) si ricava

$$c_6\geqslant\int_0^T n(\beta(\boldsymbol{v}_n),\boldsymbol{v}_n)_{N^0}\,\mathrm{d}t=n\int_Q|\beta(\boldsymbol{v}_n)|\,|\boldsymbol{v}_n|\,\mathrm{d}Q\geqslant M\cdot n\int_Q|\beta(\boldsymbol{v}_n)|\,\mathrm{d}Q\,. \tag{3.20}$$

Tenendo conto che, per $s>m/2$, l'immersione di N^s in L^∞ è continua, sostituendo nella (3.19), risulta

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T(\boldsymbol{v}_n',\boldsymbol{\psi})_{N^0}\,\mathrm{d}t\Big|&\leqslant c_9\|\boldsymbol{\psi}_n\|_{L^2(0,T;N^1)}+\frac{c_6}{M}\|\boldsymbol{\psi}_n\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}\\&\leqslant c_{10}\|\boldsymbol{\psi}\|_{L^\infty(0,T;N^s)}\leqslant c_{11}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H_0^{(1/2)+\varepsilon}(0,T;N^s)}\,.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Essendo lo spazio delle $\boldsymbol{\psi}$, $H_0^1(0,T;N^s)$, denso in $H_0^{\frac12+\varepsilon}(0,T;N^s)$, dalla (3.21) si deduce che

$$\|\boldsymbol{v}_n'(t)\|_{H^{-(1/2)-\varepsilon}(0,T;(N^s)')}\leqslant c_{12}\,, \tag{3.22}$$

da cui

$$\|\boldsymbol{v}_n(t)\|_{H^{(1/2)-\varepsilon}(0,T;(N^s)')}\leqslant M_3\,. \tag{3.23}$$

Dalle (3.12) e (3.23) risulta $\|\boldsymbol{v}_n(t)\|$ limitata in $L^2(0,T;N^1)\cap H^{\frac12-\varepsilon}(0,T;(N^s)')$. Essendo l'immersione di tale spazio in $L^2(0,T;H^{\frac12+\varepsilon})$ completamente continua $\forall\varepsilon$, $0<\varepsilon<1/2$, dalla $\{\boldsymbol{v}_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione (detta ancora $\{\boldsymbol{v}_n\}$) convergente in $L^2(0,T;H^{\frac12+\varepsilon})$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{v}_n(t)=\boldsymbol{v}(t)\qquad\text{in } L^2(0,T;H^{(1/2)+\varepsilon})\text{ forte,} \tag{3.24}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\boldsymbol{v}_n(t)=P\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}(t)\qquad\text{in } L^2(0,T;H^{(1/2)+\varepsilon})\text{ forte}\,. \tag{3.25}$$

Essendo poi $|P\boldsymbol{v}_n|\leqslant M$, $|\boldsymbol{v}|\leqslant M$ q.o. in Q, dalla (3.25) si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v}\qquad\text{in } L^q(Q)\text{ forte, }\forall q\,. \tag{3.26}$$

Sia ora $\boldsymbol{\varphi}(t)$ una funzione di $H^1(0,T;N^s)$ con $|\boldsymbol{\varphi}(x,t)|<M$; sia

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^\infty\gamma_j(t)\boldsymbol{g}_j\,,\qquad\boldsymbol{\varphi}_p(t)=\sum_{j=1}^p\gamma_j(t)\boldsymbol{g}_j\,.$$

Poichè l'immersione di $H^1(0,T;N^s)$ in $C^0(\overline{Q})$ è completamente continua, allora esisterà un $\overline{p}$ tale che per $p\geqslant\overline{p}$ sia $|\boldsymbol{\varphi}_p|\leqslant M$. Supponiamo $\tau_j=\gamma_j$ per $j\leqslant p$,

$\tau_j = 0$ per $j > p$ e $p \geqslant \bar{p}$; supponiamo ancora $n \geqslant p$ e moltiplichiamo la (3.3) per $\sigma_{jn} - \tau_j$; sommando, otteniamo

$$(3.27)\quad \big(\boldsymbol{v}_n'(t), \boldsymbol{v}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}_p(t)\big)_{N^0} + \mu\big(\boldsymbol{v}_n(t), \boldsymbol{v}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}_p(t)\big)_{N^1} + n\big(\beta(\boldsymbol{v}_n(t)), \boldsymbol{v}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}_p(t)\big)_{N^0}$$
$$- \big(\boldsymbol{f}_n(t), \boldsymbol{v}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}_p(t)\big)_{N^0} + b\big(P\boldsymbol{v}_n(t), \boldsymbol{v}_n(t), \boldsymbol{v}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}_p(t)\big)$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} \big(\alpha_i(x, t) - \tfrac{1}{2}|P\boldsymbol{v}_n(x, t)|^2\big)\big(\boldsymbol{v}_n(x, t) - \boldsymbol{\varphi}_p(x, t)\big) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_i$$
$$+ \int_{\Gamma_3} \delta(x, t)\,|P\boldsymbol{v}_n(x, t)|\,\big(P\boldsymbol{v}_n(x, t) \times \boldsymbol{\nu}\big)\big(\boldsymbol{v}_n(x, t) - \boldsymbol{\varphi}_p(x, t)\big) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_3 = 0\,.$$

Essendo $|\boldsymbol{\varphi}_p| \leqslant M$, è $\beta(\boldsymbol{\varphi}_p) = 0$, quindi

$$(3.28)\qquad \big(\beta(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{\varphi}_p\big)_{N^0} = \big(\beta(\boldsymbol{v}_n) - \beta(\boldsymbol{\varphi}_p), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{\varphi}_p\big)_{N^0} \geqslant 0\,.$$

Detta $\psi(t)$ una qualunque funzione di $C^0[0, T]$, $\psi(t) \geqslant 0$, integrando la (3.27), si ha

$$(3.29)\quad \int_0^T \psi(t)\Big\{\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}_p(t)\|_{N^0}^2 - \tfrac{1}{2}\|\Pi_n \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\varphi}_p(0)\|_{N^0}^2 + \int_0^t \big[\big(\boldsymbol{\varphi}_p'(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta) - \boldsymbol{\varphi}_p(\eta)\big)_{N^0}$$
$$+ \mu\big(\boldsymbol{v}_n(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta) - \boldsymbol{\varphi}_p(\eta)\big)_{N^1} - \big(\boldsymbol{f}_n(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta) - \boldsymbol{\varphi}_p(\eta)\big)_{N^0}$$
$$+ b\big(P\boldsymbol{v}_n(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta), \boldsymbol{v}_n(\eta) - \boldsymbol{\varphi}_p(\eta)\big)$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} \big(\alpha_i(x, \eta) - \tfrac{1}{2}|P\boldsymbol{v}_n(x, \eta)|^2\big)\big(\boldsymbol{v}_n(x, \eta) - \boldsymbol{\varphi}_p(x, \eta)\big) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_i$$
$$+ \int_{\Gamma_3} \delta(x, \eta)\,|P\boldsymbol{v}_n(x, \eta)|\,\big(P\boldsymbol{v}_n(x, \eta) \times \boldsymbol{\nu}\big)\,\big(\boldsymbol{v}_n(x, \eta) - \boldsymbol{\varphi}_p(x, \eta)\big) \times \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Gamma_3\big]\, \mathrm{d}\eta\Big\}\, \mathrm{d}t \leqslant 0\,.$$

Facciamo ora tendere n all'infinito nella (3.29).

Osserviamo dapprima che $\boldsymbol{v} \in N^1 \cap K$, pertanto $\boldsymbol{v}$ ha traccia su Γ e per tale traccia $\gamma\boldsymbol{v}$ vale la relazione $|\gamma\boldsymbol{v}| \leqslant M$ q.o. In base a tale osservazione, con procedimento classico che utilizza noti teoremi di immersione e di traccia, tenendo conto delle relazioni (3.13), (3.14), (3.24), (3.25), (3.26), si dimostra che $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa la (2.1) per ogni $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_p(t)$. Facendo tendere p all'infinito e osservando che la classe delle funzioni $\boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(t)\boldsymbol{g}_j$ è densa nella classe delle funzioni-test $\boldsymbol{\varphi}(t)$ considerate nella condizione (b), possiamo concludere che $\boldsymbol{v}(t)$ soddisfa completamente la condizione (b) e il teorema di esistenza è dimostrato.

La dimostrazione dell'unicità segue uno schema classico ([**3**], cap. 3, § 6.3; cfr. $[\mathbf{4}]_{4,5}$), che utilizza le successioni regolarizzanti. Sfruttando ancora teoremi di immersione e di traccia, risultati di interpolazione tra spazi, si perviene alla tesi.

Bibliografia

[1] C. BAIOCCHI: $[\cdot]_1$ *Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n* (I), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **40** (1966), 1006-1009; $[\cdot]_2$ *Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n* (II), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **41** (1966), 41-46; $[\cdot]_3$ *Sulle soluzioni del sistema di Navier-Stokes in dimensione n* (III), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **41** (1966), 163-168.

[2] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat. **7** (1958), 102-137.

[3] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris 1969.

[4] G. PROUSE: $[\cdot]_1$ *On a non-linear mixed problem for the Navier-Stokes equations* (I), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **48** (1970), 26-32; $[\cdot]_2$ *On a non-linear mixed problem for the Navier-Stokes equations* (II), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **48** (1970), 170-179; $[\cdot]_3$ *On a non-linear mixed problem for the Navier-Stokes equations* (III), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **48** (1970), 293-296; $[\cdot]_4$ *On an inequality related to the motion, in any dimension, of viscous, incompressible fluids* (I), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **67** (1979), 191-196; $[\cdot]_5$ *On an inequality related to the motion, in any dimension, of viscous, incompressible fluids* (II), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **67** (1979), 282-288.

[5] A. ZARETTI, *Un teorema di esistenza in grande per un problema non lineare dell'idrodinamica*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **105** (1971), 742-755.

Riassunto

Si considera una disequazione associata al moto di un fluido viscoso incomprimibile; si dimostra per essa, in un numero qualunque di dimensioni, un teorema di esistenza e unicità di una soluzione «debole» di un problema misto non lineare.

* * *