Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 257-267

GIOVANNA REMORINI (*)

Propagazione ondosa e instabilità in un plasma rotante anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate (**)

1 - Introduzione

Scopo del presente lavoro è quello di studiare gli effetti di una rotazione uniforme sulla stabilità e sulla propagazione ondosa in un fluido elettroconduttore anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate descritte dal modello introdotto in [**1**]; lo studio dell'instabilità gravitazionale in assenza di rotazione è stato fatto in $[\mathbf{4}]_2$.

Date in **3** le equazioni delle perturbazioni, in **4** si evidenzia dapprima un effetto di accoppiamento causato dalla rotazione. Successivamente, sempre in **4**, si trova che si ha sempre instabilità a meno che non si abbia propagazione ortogonale o parallela al campo magnetico, o complanare col campo magnetico e con la rotazione, oppure che gli indici di politropia siano tali da annullare i coefficienti dei termini di ordine dispari nell'equazione di dispersione. Si studiano quindi in **5** e in **6** gli effetti della rotazione sulla stabilità e sulla propagazione ondosa nel caso di propagazione ortogonale e parallela al campo magnetico. In **7** si determina la zona di instabilità nel caso che la propagazione sia complanare alla rotazione e al campo magnetico. Infine in **8** si dà il criterio per determinare i fluidi per i quali il valore critico del numero d'onda è indipendente dalla direzione di propagazione, calcolando tale valore e fornendo un esempio di fluido di tale tipo.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Facoltà di Ingegneria, Via Diotisalvi 2, 56100 Pisa, Italy.
(**) Ricevuto: 15-II-1983.

2 - Equazione di base

Le equazioni di base che descrivono il plasma nel modello introdotto in [**1**] (¹) sono: l'equazione di moto, l'equazione del campo magnetico, l'equazione di continuità di massa e l'equazione di Poisson se si tiene conto delle azioni gravitazionali.

Il tensore delle pressioni $\boldsymbol{P}$ è fornito da

$$\boldsymbol{P} = p_\perp \boldsymbol{I} + (p_\parallel - p_\perp)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\,, \tag{2.1}$$

dove $\boldsymbol{I}$ è il tensore fondamentale, $\boldsymbol{n}$ il versore del vettore induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ ($\otimes$ è il simbolo di prodotto tensoriale) e gli scalari $p_\parallel$ e $p_\perp$ sono rispettivamente le pressioni parallelamente e ortogonalmente ad $\boldsymbol{n}$. Si devono inoltre considerare le due equazioni di stato politropiche generalizzate introdotte in [**1**] n. 1, nella forma

$$p_\parallel \frac{B^\alpha}{\varrho^\beta} = c_\parallel\,, \qquad \frac{p_\perp}{\varrho^\varepsilon B^\gamma} = c_\perp, \tag{2.2}$$

essendo $c_\parallel$ e $c_\perp$ costanti, ϱ la densità di massa, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ indici politropici (costanti). Le (2.2) generalizzano equazioni di stato largamente usate nella fisica matematica dei plasmi.

3 - Equazioni delle perturbazioni

Si suppone il plasma nello stato imperturbato omogeneo e soggetto ad un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}/\mu$; le equazioni linearizzate delle perturbazioni (in unità di Gauss), con riferimento ad una terna di assi $T(0; x, y, z)$ rotante uniformemente con la velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ del plasma, sono

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{div}\,\delta\boldsymbol{P} + \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\,\mathrm{rot}\,(\delta\boldsymbol{B})\Lambda\boldsymbol{B} + \mathrm{grad}\,\delta U + 2\boldsymbol{v}\Lambda\boldsymbol{\Omega}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\Lambda\boldsymbol{B})\,, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta\varrho = -\,\varrho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}, \tag{3.3}$$

$$\nabla^2\delta U = -\,4\pi G\delta\varrho\,, \tag{3.4}$$

$$\frac{\delta p_\parallel}{p_\parallel} + \alpha\,\frac{\delta B}{B} = \beta\,\frac{\delta\varrho}{\varrho}\,, \quad \frac{\delta p_\perp}{p_\perp} = \varepsilon\,\frac{\delta\varrho}{\varrho} + \gamma\,\frac{\delta B}{B}\,. \tag{3.5}$$

(¹) Per la bibliografia sull'argomento cfr. [**4**]$_2$.

In queste G è la costante gravitazionale, ϱ, $p_\parallel$ e $p_\perp$ rispettivamente i valori nello stato imperturbato della densità e della pressione parallelamente e ortogonalmente a $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{v}$, $\delta\boldsymbol{P}$, $\delta\boldsymbol{B}/\mu$, δU, $\delta\varrho$, $\delta p_\parallel$, $\delta p_\perp$ le perturbazioni del campo di velocità, del tensore delle pressioni, del campo magnetico, del potenziale gravitazionale, della densità e della pressione parallelamente e ortogonalmente a $\boldsymbol{B}$.

Dalla (2.1), tenendo conto della (3.5), si ha

$$\delta\boldsymbol{P} = \Big(\frac{\varepsilon p_\perp}{\varrho}\,\delta\varrho + \frac{\gamma p_\perp}{B}\,\delta B\Big)\,\boldsymbol{I} + \Big(\frac{\beta p_\parallel - \varepsilon p_\perp}{\varrho}\,\delta\varrho - \frac{\alpha p_\parallel + \gamma p_\perp}{B}\,\delta B\Big)\,\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + (p_\parallel - p_\perp)(\boldsymbol{n}\otimes\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})\,, \tag{3.6}$$

in cui $\delta\boldsymbol{n}$ si ricava dalla

$$\delta\boldsymbol{B} = \delta B\boldsymbol{n} + B\delta\boldsymbol{n}\,. \tag{3.7}$$

Le (3.1)-(3.6) si ottengono linearizzando le equazioni di base, tenuto conto degli effetti gravitazionali nel modello di Jeans.

Le (3.1)-(3.5), in cui $\delta\boldsymbol{P}$ è specificato dalla (3.6), costituiscono un sistema lineare di otto equazioni differenziali scalari alle derivate parziali nelle otto funzioni incognite scalari: $\delta\varrho$, δU, le tre componenti di $\boldsymbol{v}$, le tre componenti di $\delta\boldsymbol{B}$.

4 - Perturbazioni piane

Si studia la propagazione di piccole perturbazioni piane e la loro eventuale instabilità con particolare attenzione all'instabilità gravitazionale, cioè si assume che tutte le perturbazioni siano proporzionali ad $\exp[i(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})]$ essendo $\omega/2\pi$ la frequenza, $\boldsymbol{K}$ il vettore numero d'onda, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2 + z\boldsymbol{i}_3$.

Introdotta, senza ledere la generalità, la terna $T(0;\, x, y, z)$ tale che l'asse z sia parallelo al campo magnetico imperturbato e con la direzione di propagazione delle perturbazioni giacenti nel piano (x, z), cioè $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$, $\boldsymbol{K} = (K_x, 0, K_z)$, $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ ed indicate con b_x, b_y, b_z ($b_z = \delta B$) le componenti cartesiane di $\delta\boldsymbol{B}$, le equazioni delle perturbazioni in T si scrivono

$$0 = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \Big(\frac{\gamma p_\perp}{\varrho B} + \frac{B}{4\pi\mu\varrho}\Big)\frac{\partial b_z}{\partial x} + \Big(\frac{p_\parallel - p_\perp}{\varrho B} - \frac{B}{4\pi\mu\varrho}\Big)\frac{\partial b_x}{\partial z} + \varepsilon\,\frac{p_\perp}{\varrho^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\varrho - \frac{\partial}{\partial x}\,\delta U - 2(v_y\Omega_z - v_z\Omega_y), \tag{4.1}$$

$$(4.2)\qquad 0=\frac{\partial v_y}{\partial t}+\left(\frac{p_\parallel-p_\perp}{\varrho B}-\frac{B}{4\pi\mu\varrho}\right)\frac{\partial b_y}{\partial z}-2(v_z\Omega_x-v_x\Omega_z)\,,$$

$$(4.3)\qquad 0=\frac{\partial v_z}{\partial t}-\frac{\alpha p_\parallel}{\varrho B}\frac{\partial b_z}{\partial z}+\frac{\beta p_\parallel}{\varrho^2}\frac{\partial\delta\varrho}{\partial z}+\frac{p_\parallel-p_\perp}{\varrho B}\frac{\partial b_x}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\delta U-2(v_x\Omega_y-v_y\Omega_x)\,,$$

$$(4.4)\qquad 0=\frac{\partial b_x}{\partial t}-B\frac{\partial v_x}{\partial z}\,,\qquad 0=\frac{\partial b_y}{\partial t}-B\frac{\partial v_y}{\partial z}\,,\qquad 0=\frac{\partial b_z}{\partial t}+B\frac{\partial v_x}{\partial x}\,,$$

$$(4.5)\qquad 0=\frac{\partial}{\partial t}\delta\varrho+\varrho\frac{\partial v_x}{\partial x}+\varrho\frac{\partial v_z}{\partial z}\,,\qquad (4.6)\qquad 0=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta U+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta U+4\pi G\delta\varrho\,.$$

Le (4.1)-(4.6) costituiscono un sistema lineare di otto equazioni scalari nelle otto incognite $v_x, v_y, v_z, b_x, b_y, b_z, \delta\varrho, \delta U$.

Dalla (4.2) si riconosce che $\mathbf{\Omega}$, quando Ω_x e Ω_z non sono contemporaneamente nulli, produce accoppiamento; infatti se $\Omega_x=\Omega_z=0$ (cioè se l'asse di rotazione è ortogonale al vettore numero d'onda) dalle (4.2) e $(4.4)_2$ si ha che v_y e b_y sono indipendenti dalle altre e soddisfano l'equazione

$$(4.7)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{h}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\qquad\qquad (h=2p_m+p_\perp-p_\parallel)\,,$$

avendo indicato con $p_m=B^2/8\pi\mu$ la pressione magnetica; si osservi che la (4.7) è indipendente dalla rotazione e dalla gravità.

Se è $h>0$, le perturbazioni v_y e b_y si propagano con velocità di fase reale $u=\omega/K$ data da

$$(4.8)\qquad u^2=\left(A^2+\frac{p_\perp-p_\parallel}{\varrho}\right)\cos^2\theta\,,$$

dove $A^2=B^2/4\pi\mu\varrho$ è il quadrato della velocità di Alfvén e θ è l'angolo tra $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{B}$.

La (4.8) caratterizza le onde di Alfvén modificate per effetto dell'anisotropia nel tensore delle pressioni (quando la pressione è isotropa si ha $u=\pm A$).

Se è $h<0$, u diventa immaginaria; si presenta così il fenomeno di instabilità dovuto all'anisotropia. La condizione $h<0$ coincide con la condizione che caratterizza la comparsa della instabilità *hose* nei plasmi non rotanti. Si può quindi osservare che l'instabilità *hose* si presenta anche per il plasma rotante purchè sia $2p_m+p_\perp-p_\parallel<0$. Nel seguito assumeremo $h>0$ ([2]).

([2]) Tali risultati generalizzano quanto trovato per il plasma di Chew, Goldberger e Low, detto per brevità plasma C.G.L. (cfr. $[4]_1$).

Qualunque sia la direzione di $\boldsymbol{\Omega}$, le equazioni (4.1)-(4.6), procedendo nel modo ben noto, conducono alla seguente equazione di dispersione

$$0 = \omega^6 + a_2\omega^4 + a_3\omega^3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 , \tag{4.9}$$

con

$$a_2 = 4\pi\varrho G - 4\Omega^2 - K^2\{A^2 + \frac{p_\perp}{\varrho}(\gamma+\varepsilon) + [A^2 + \frac{p_\perp}{\varrho}(2-\gamma-\varepsilon) + \frac{p_\parallel}{\varrho}(\beta-2)]\cos^2\theta\},$$

$$a_3 = 2i\Omega_y K_x K_z [\frac{p_\parallel}{\varrho}(\alpha-\beta+1) + \frac{p_\perp}{\varrho}(\varepsilon-1)], \qquad a_5 = -\frac{h}{\varrho}a_3 ,$$

$$a_4 = \{-\frac{h}{\varrho}\cos^2\theta + [\frac{4\pi G\varrho}{K^2} - \frac{p_\perp}{\varrho}(\gamma+\varepsilon) - \frac{2p_m}{\varrho}]\operatorname{sen}^2\theta\}$$
$$(-\frac{h}{\varrho} + \frac{4\pi G\varrho}{K^2} - \beta\frac{p_\parallel}{\varrho})\cdot K^4\cos^2\theta$$
$$+ (\frac{4\pi G\varrho}{K^2} - \beta\frac{p_\parallel}{\varrho})(-\frac{h}{\varrho}K^2\cos^2\theta - 4\Omega_z^2)K^2\cos^2\theta - (\frac{4\pi G\varrho}{K^2} - \varepsilon\frac{p_\perp}{\varrho})[\frac{4\pi G\varrho}{K^2}$$
$$+ \frac{p_\parallel}{\varrho}(\alpha-\beta+1) - \frac{p_\perp}{\varrho}]K^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + 4\frac{h}{\varrho}(\Omega_x^2+\Omega_y^2)K^2\cos^2\theta + 4\Omega_x^2[\frac{2p_m}{\varrho}$$
$$+ \frac{p_\perp}{\varrho}(\gamma-\varepsilon) - \frac{4\pi G\varrho}{K^2}]K^2\operatorname{sen}^2\theta ,$$

$$a_6 = \frac{h}{\varrho}K^6\cos^4\theta\{(\frac{4\pi G\varrho}{K^2} - \frac{\varepsilon p_\perp}{\varrho})[\frac{4\pi G\varrho}{K^2} + \frac{p_\parallel}{\varrho}(\alpha-\beta+1) - \frac{p_\perp}{\varrho}]\operatorname{sen}^2\theta$$
$$+ (\frac{4\pi G\varrho}{K^2} - \beta\frac{p_\parallel}{\varrho})\frac{h}{\varrho}\cos^2\theta + (\frac{4\pi G\varrho}{K^2} - \beta\frac{p_\parallel}{\varrho})[\frac{2p_m}{\varrho} + \frac{p_\perp}{\varrho}(\gamma+\varepsilon) - \frac{4\pi G\varrho}{K^2}]\operatorname{sen}^2\theta\} .$$

Si osservi che se è $a_3 \neq 0$ si ha instabilità qualunque sia $\boldsymbol{K}$ poichè la (4.9) ammette almeno una radice complessa ω_h con parte immaginaria negativa (3). Tale circostanza non si verifica mai per i modelli di fluido più noti come quelli del plasma MFD ($\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \varepsilon = c_p/c_v$, $c_\perp = c_\parallel$), del plasma C.G.L. ($\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\varepsilon = \gamma = 1$), del fluido con equazione di stato isoterma per entrambe le

(3) La (4.9) ammette almeno una radice ω_h complessa, essendo $a_3(= -\sum \omega_i\omega_j\omega_p)$ immaginario; inoltre, essendo nella (4.9) nullo il coefficiente $a_1(=\sum_{h=1}^{6}\omega_h)$ di ω^5, ne segue che la (4.9) ha almeno due radici complesse di cui una almeno con parte immaginaria negativa.

pressioni ($\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \varepsilon = 1$) o per la sola $p_\parallel$ ($\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \varepsilon = 1$) in quanto per tali fluidi risulta

$$(4.10) \qquad 0 = p_\parallel(\alpha - \beta + 1) + p_\perp(\varepsilon - 1) \qquad \text{e quindi } a_3 = a_5 = 0 \quad \forall \mathbf{\Omega}\,.$$

Se $a_3 = a_5 = 0$, posto $\eta = \omega^2$, la (4.9) si scrive

$$(4.11) \qquad 0 = \eta^3 + a_2\eta^2 + a_4\eta + a_6\,,$$

per cui, considerando K assegnato reale, vi sono in generale tre modi di propagazione in una data direzione (θ) e, se $\omega_1/2\pi$, $\omega_2/2\pi$, $\omega_3/2\pi$ sono le frequenze di questi tre modi, è

$$(4.12) \qquad \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2 = -\,a_6.$$

Il coefficiente a_6 può essere positivo sia per la presenza dei termini gravitazionali sia a seconda dei valori assunti dagli indici di politropia.

Esamineremo i vari casi per cui risulta $a_3 = a_5 = 0$ nei successivi numeri sia tenendo conto degli effetti gravitazionali, sia nel caso in cui tali effetti possano essere trascurati.

5 - Propagazione in direzione ortogonale al campo magnetico

Se $\theta = \pi/2$, cioè $K_z = 0$, si ha $\partial/\partial z = 0$; dalla $(4.4)_1$ e dall'equazione $\operatorname{div}\delta\boldsymbol{B} = 0$ si ha $b_x = \text{cost}$; inoltre dalla $(4.4)_2$ si ha $\partial b_y/\partial t = 0$, pertanto si può non prendere in considerazione b_y.

L'equazione di dispersione si scrive

$$(5.1)\ \ 0 = \omega^4 - \omega^2(M + 4\Omega^2) + 4\Omega_x^2 M\,, \qquad (5.2)\ \ M = [A^2 + \frac{p_\perp}{\varrho}(\gamma + \varepsilon)]\,K^2 - 4\pi G\varrho.$$

Dalla (5.1) si riconosce che per $\Omega_x \neq 0$ si ha instabilità per $K < K_\perp$, con

$$(5.3) \qquad K_\perp = [\frac{4\pi G\varrho}{A^2 + (p_\perp/\varrho)(\gamma + \varepsilon)}]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Chiaramente $K_\perp$ non è influenzato dalla rotazione $\mathbf{\Omega}$, ma solo dal campo magnetico $\boldsymbol{B}$. Inoltre, poichè il discriminante della (5.1) è positivo per $M > 0$, si ha che per $K > K_\perp$ vi è sempre stabilità.

Se $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\Omega} = 0$, il numero di onda critico diviene

$$K_\perp^* = \left[\frac{4\pi G\varrho - 4\Omega^2}{A^2 + (p_\perp/\varrho)(\gamma+\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.4}$$

e per $K > K_\perp^*$ si ha sempre stabilità. Dalla (5.4) segue che per $\Omega_x = 0$ il numero di onda critico è influenzato anche dalla rotazione $\boldsymbol{\Omega}$ oltre che da $\boldsymbol{B}$ ([4]).

Se si trascurano gli effetti gravitazionali, essendo ora $M = [A^2 + p_\perp(\gamma+\varepsilon)/\varrho]K^2$ sempre positivo, per ogni K si hanno due modi stabili di propagazione e la rotazione $\boldsymbol{\Omega}$ in ciascuno di questi introduce un effetto dispersivo.

Nel caso $\Omega = 0$ l'equazione di dispersione si scrive $\omega^2(\omega^2 - M) = 0$, pertanto si ha un solo modo di propagazione del tipo magnetoacustico che è sempre stabile e ha velocità di fase

$$u = \pm \left[A^2 + \frac{p_\perp}{\varrho}(\gamma+\varepsilon)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

Considerando onde di prefissata frequenza, dall'equazione di dispersione si ha

$$K^2 = \frac{\varrho\omega^2}{2p_m + p_\perp(\gamma+\varepsilon)}\,\frac{4\Omega^2 - \omega^2}{4\Omega_x^2 - \omega^2}, \tag{5.6}$$

quindi si ha propagazione per $\omega^2 < 4\Omega_x^2$ o per $\omega^2 > 4\Omega^2$, mentre non si ha propagazione per $4\Omega_x^2 < \omega^2 < 4\Omega^2$.

Se $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{K} = 0$ l'equazione di dispersione si scrive $\omega^2[\omega^2 - (M + 4\Omega^2)] = 0$; pertanto per onde di data lunghezza c'è un solo modo di propagazione che è sempre stabile con velocità di fase

$$u = \pm \left[A^2 + \frac{p_\perp}{\varrho}(\gamma+\varepsilon) + \frac{4\Omega^2}{K^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

Dalle (5.5) e (5.7) si ha che la rotazione fa crescere la velocità di fase con un termine dipendente da K.

Se l'asse di rotazione è parallelo alla direzione di propagazione ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{i}_1$), l'equazione di dispersione ammette come radici $\omega^2 = [A^2 + (p_\perp/\varrho)(\gamma+\varepsilon)]K^2$ come nel caso non rotante, ed $\omega^2 = 4\Omega^2$. Le (4.2) e (4.3) si scrivono rispettivamente $0 = (\partial v_y/\partial t) - 2v_z\Omega$, $0 = (\partial v_z/\partial t) + 2v_y\Omega$ per cui v_y e v_z sono

(4) Per $\gamma = 0$ $\varepsilon = c_p/c_v$ si ritrovano come casi particolari i risultati ottenuti in MFD (cfr. [**2**], [**3**]); per $\varepsilon = \gamma = 1$ si ritrovano in particolare i risultati ottenuti per il plasma C.G.L. (cfr. [**4**]$_1$ n. 4 e la (29) del [**4**]$_2$).

disaccoppiate e soddisfano all'equazione $(\partial^2/\partial t^2) f = -4\Omega^2 f$. In particolare, qualunque sia K, si ha la soluzione $v_y = \bar{v}_y \exp[i(\omega t - Kx)]$ con $\omega^2 = 4\Omega^2$ e per le rimanenti $v_x, b_z, \delta\varrho$ si ha $\omega^2 = [A^2 + (p_\perp/\varrho)(\gamma + \varepsilon)]K^2$.

Dalle (5.3)-(5.7) si nota che entrambi gli indici di politropia γ ed ε relativi all'equazione di stato per $p_\perp$ hanno un ruolo per la stabilità e per la velocità di fase della propagazione ondosa.

6 - Propagazione in direzione del campo magnetico

Se $\theta = 0$, cioè $K_x = 0$, si ha $\partial/\partial x = 0$; dalla $(4.4)_3$ e dalla equazione $\operatorname{div} \delta\boldsymbol{B} = 0$ si ha $b_z =$ cost. Scelta, senza ledere la generalità, la terna di riferimento in modo che sia $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, 0, \Omega_z)$, l'equazione di dispersione è la (4.11) con

$$a_2 = -2\,\frac{h}{\varrho}K^2 - 4\Omega^2 - N\,, \qquad a_4 = \left(\frac{h}{\varrho}K^2\right)^2 + \frac{h}{\varrho}K^2(4\Omega_x^2 + 2N) + 4\Omega_z^2 N\,,$$
$$a_6 = -\left(\frac{h}{\varrho}K^2\right)^2 N\,, \qquad N = \frac{\beta}{\varrho}p_\parallel K^2 - 4\pi G\varrho\,. \tag{6.1}$$

Si riconosce che, sia presente o no l'instabilità *hose* $(h \lessgtr 0)$, qualunque sia $\boldsymbol{\Omega}$ si ha instabilità gravitazionale per $K < K_\parallel$ con

$$K_\parallel = \left[\frac{4\pi G\varrho}{\beta p_\parallel/\varrho}\right]^{\frac{1}{2}}\,, \tag{6.2}$$

cioè la rotazione non influenza il $K_\parallel$ (cfr. la (32) del $[4]_2$).

Per $h > 0$, se $K > K_\parallel$, posto $p = a_4 - a_2^2/3$, $q = 2a_2^3/27 - a_2 a_4/3 + a_6$, con ragionamenti analoghi a quelli fatti in $[4]_1$ (n. 5) si ha che la (4.11) ammette tre radici reali positive se risulta

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\,, \tag{6.3}$$

e quindi per $h > 0$ la (6.3) assicura che si ha stabilità per $K > K_\parallel$ [5].

Se si trascurano gli effetti gravitazionali la $(6.1)_4$ diviene $N = (\beta/\varrho)p_\parallel K^2$. Per $h > 0$, qualunque sia K è $a_2 < 0$, $a_4 > 0$, $a_6 < 0$ e quindi se è verificata

---

[5] Per $\beta = c_p/c_v$ si ottiene il caso analogo MFD (cfr. [2], [3]); per $\beta = 3$ si ottiene il caso analogo per il plasma C.G.L. (cfr. la (5.3) del $[4]_1$).

la (6.3) per ogni K si hanno tre modi stabili di propagazione. Si riconosce facilmente che la (6.3) è verificata per $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{i}_3$ ed $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{i}_1$. Si estendono le considerazioni fatte per il plasma C.G.L. in $[4]_1$ (n. 9) al caso del fluido in esame ma non si riportano qui i calcoli per brevità, facendo presente che si ottengono espressioni analoghe al n. 9 del $[4]_1$ sostituendo al numero 3 il valore dell'indice di politropia β.

Dalla (6.2) e dai calcoli non riportati per brevità si ha che, nel caso che la direzione di propagazione sia parallela al campo magnetico, dei due indici di politropia β ed α relativi all'equazione di stato per $p_\parallel$, solo β interviene per la stabilità e la velocità di fase della propagazione ondosa.

7 - Caso in cui Ω, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{K}$ sono complanari

Se $\Omega_y = 0$ ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \boldsymbol{i}_1 + \Omega_z \boldsymbol{i}_3$), l'equazione di dispersione è la (4.11); considerando K reale assegnato, vi sono in generale tre modi di propagazione in una data direzione (specificata da θ) e, se $\omega_1/2\pi$, $\omega_2/2\pi$ ed $\omega_3/2\pi$ denotano le relative frequenze, si ha: $\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2 = -a_6$.

Supponendo $h > 0$, studiamo il segno di a_6, escludendo i casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ già esaminati in **5** e in **6**. Posto

$$X = \operatorname{sen}^2\theta\,, \qquad Y = \frac{4\pi G \varrho^2}{K^2}\,, \tag{7.1}$$

per studiare il segno di a_6 basta studiare nel dominio $\mathscr{D} = \{(X, Y): 0 < X < 1, Y > 0\}$ il segno della funzione

$$\begin{aligned} f(X, Y) = {} & Y\{h + X[p_\parallel(\alpha+2) - p_\perp(2-\gamma)]\} \\ & - X\{p_\perp p_\parallel(\alpha\varepsilon + \varepsilon + \beta\gamma - \beta) - \varepsilon p_\perp^2 + \beta p_\parallel^2\} - h\beta p_\parallel\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

(1) Se $p_\parallel(\alpha+2) - p_\perp(2-\gamma) = 0$, è $a_6 > 0$ (e quindi si ha instabilità) per

$$Y > \beta p_\parallel + X\,\frac{\beta p_\parallel^2 + p_\perp p_\parallel(\alpha\varepsilon + \varepsilon + \beta\gamma - \beta) - \varepsilon p_\perp^2}{h}\,. \tag{7.3}$$

(2) Se $p_\parallel(\alpha+2) - p_\perp(2-\gamma) \neq 0$, nel dominio $\mathscr{D}$ risulta sempre $\{h + X[p_\parallel(\alpha+2) - p_\perp(2-\gamma)]\} > 0$, pertanto è $a_6 > 0$ per

$$Y > \frac{aX + d}{X + d}\,, \tag{7.4}$$

$$a = \frac{p_\perp p_\parallel(\alpha\varepsilon + \varepsilon + \beta\gamma - \beta) - \varepsilon p_\perp^2 + \beta p_\parallel^2}{p_\parallel(\alpha+2) - p_\perp(2-\gamma)}\,, \quad b = \frac{\beta p_\parallel h}{p_\parallel(\alpha+2) - p_\perp(2-\gamma)}\,, \quad d = \frac{b}{\beta p_\parallel}\,. \tag{7.5}$$

In particolare se $b = ad$, cioè per $p_\perp = (\beta/\varepsilon)p_\parallel$ oppure $p_\perp = (\alpha + 1)p_\parallel$, risulta $a = \beta p_\parallel$ e la (7.4) si scrive $Y > a$, quindi è $a_6 > 0$ per $4\pi G\varrho^2/K^2 > \beta p_\parallel$, cioè si ha instabilità per $K < K_c$, con K_c indipendente da $\mathbf{\Omega}$ e dato da

$$K_c = [\frac{4\pi G\varrho^2}{\beta p_\parallel}]^{\frac{1}{2}} . \tag{7.6}$$

Esclusi i casi particolari $p_\perp = (\beta/\varepsilon)p_\parallel$ e $p_\perp = (\alpha + 1)p_\parallel$ su esaminati, la $Y = (aX + d)/(X + d)$ rappresenta una iperbole equilatera di asintoti $X = -d$, $Y = a$ e di semiasse trasverso $\sqrt{2|b - ad|}$; il suo grafico $Y(X)$ permette di determinare la regione di instabilità nei vari casi, notando che

(i) $Y(0) = \beta p_\parallel$,

(ii) $$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{-\beta p_\parallel h}{(X + d)^2[p_\parallel(\alpha + 2) - p_\perp(2 - \gamma)]^2}(p_\perp - \frac{\beta}{\varepsilon}p_\parallel)[p_\perp - (\alpha + 1)p_\parallel],$$

per cui $Y(X)$ è crescente per $p_\perp$ compreso tra $\beta p_\parallel/\varepsilon$ e $p_\parallel(\alpha + 1)$;

(iii) se $p_\parallel(\alpha + 2) - p_\perp(2 - \gamma) > 0$, b e d sono sempre positivi mentre, posto $D = p_\parallel[\alpha\varepsilon + \varepsilon + \beta\gamma - \beta + \sqrt{(\alpha\varepsilon + \varepsilon + \beta\gamma - \beta)^2 + 4\varepsilon\beta}]/2\varepsilon$, è $a_6 > 0$ per $0 < p_\perp < D$;

(iv) se $p_\parallel(\alpha + 2) - p_\perp(2 - \gamma) < 0$, b e d sono sempre negativi mentre è $a_6 > 0$ per $p_\perp > D$.

Se si trascurano gli effetti gravitazionali (per $h > 0$) è $a_6 > 0$ per $\beta p_\parallel h + \operatorname{sen}^2\theta[-\varepsilon p_\perp^2 + \beta p_\parallel^2 + p_\perp p_\parallel(\alpha\varepsilon + \varepsilon + \beta\gamma - \beta)] < 0$; ne segue che per $0 < p_\perp < D$ è sempre $a_6 < 0$, mentre per $p_\perp > D$ è $a_6 > 0$ per
$$\operatorname{sen}^2\theta > \frac{\beta p_\parallel h}{\varepsilon p_\perp^2 - p_\parallel p_\perp(\alpha\varepsilon + \varepsilon + \beta\gamma - \beta) - \beta p_\parallel^2} .$$

8 - Casi in cui è $p_\parallel(\alpha - \beta + 1) + p_\perp(\varepsilon - 1) = 0$

Di particolare interesse è il caso in cui $p_\parallel$, $p_\perp$ e gli indici di politropia sono tali che sia vera la (4.10). Con ragionamenti analoghi a quelli fatti in **7**, cioè posto $Y = 4\pi G\varrho^2/K^2$ e $X = \operatorname{sen}^2\theta$, si ha che per $h > 0$ risulta $a_6 > 0$ quando nel dominio $\mathscr{D} = \{(X, Y): 0 \leqq X \leqq 1,\ Y > 0\}$ è

$$\begin{aligned} &Y\{X[p_\perp(\gamma - 2) + p_\parallel(\alpha + 2)] + h\} \\ &\quad > \beta p_\parallel h + X(\beta^2 p_\parallel^2 - \varepsilon^2 p_\perp^2 + \beta\gamma p_\parallel p_\perp - \beta\alpha p_\parallel^2) . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Dalla (8.1), a seconda dei valori assunti dagli indici politropici e da $p_\parallel$ e $p_\perp$, si trovano le corrispondenti zone di instabilità.

Si osservi che i plasmi per i quali risulta contemporaneamente

$$(8.2)\qquad \begin{aligned} &0 = p_\parallel(\alpha - \beta + 1) + p_\perp(\varepsilon - 1)\,, \qquad 0 = p_\perp(\gamma - 2) + p_\parallel(\alpha + 2)\,, \\ &0 = \beta^2 p_\parallel^2 - \varepsilon^2 p_\perp^2 + \beta\gamma p_\parallel p_\perp - \beta\alpha p_\parallel^2\,, \end{aligned}$$

il valore critico per K è indipendente da θ e vale $K_c = [4\pi G\varrho^2/\beta p_\parallel]^{\frac{1}{2}}$, come per esempio per $\varepsilon = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $p_\perp = p_\parallel$ (fluido isotropo con legge di stato isoterma per entrambe le pressioni), oppure per $\varepsilon = 1$, $\alpha = \beta - 1$, $\beta = 1/(1-\gamma)$, $p_\parallel = p_\perp(1-\gamma)$.

Bibliografia

[1] B. Abraham-Shrauner, *Small amplitude hydromagnetic waves for a plasma with a generalized polytrope law*, Plasma Physics **15** (1973), 375-385.

[2] S. Chandrasekhar, *The gravitational instability on an infinite homogeneous medium when Coriolis force is acting and a magnetic fields is present*, Astrophysical Journal **119** (1954), 7-9.

[3] S. Chandrasekhar and E. Fermi, *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, Astrophysical Journal **118** (1953), 116-141.

[4] G. Mattei: [•]$_1$ *Waves propagation and instabilities in a rotating anisotropic plasma*, Meccanica J. Italian Assoc. Theoret. Appl. Mech. **3** (1968), 214-230; [•]$_2$ *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans di un plasma anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **64** (1978), 170-176.

Summary

In this paper the gravitational instability and the waves propagation for a rotating anisotropic plasma, whose state equations are described by the model introduced by B. Abraham-Shrauner, are studied. Several cases concerning the Jeans instability and waves propagation are considered.

* * *