Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 293-301

G. MATTEI (*)

Qualche contributo alla Meccanica dei fluidi elettroconduttori con effetto Hall (**)

A LUIGI CAPRIOLI per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

In questo lavoro si porta qualche contributo alla Meccanica dei fluidi elettroconduttori in presenza di effetto Hall, descritti dalle equazioni della magnetofluidodinamica (MFD) modificate da tale effetto. Seguendo una terminologia indicata in [7] indicheremo questi fluidi con la sigla HCF (1).

Gli argomenti specifici trattati nel lavoro sono indicati dai titoli dei paragrafi.

2 - Le equazioni fondamentali

Nel modello MFD per la costante dielettrica ε e per la permeabilità magnetica μ si assume sistematicamente il valore del vuoto e quindi, nel sistema di unità di misura di Gauss che noi adotteremo,

$$\varepsilon = 1\,, \qquad \mu = 1\,. \tag{2.1}$$

Per conseguenza è $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{E}$ campo elettrico, $\boldsymbol{D}$ vettore induzione dielettrica, $\boldsymbol{H}$ campo magnetico, $\boldsymbol{B}$ vettore induzione magnetica). Tut-

(*) Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 26-IV-1983.

(1) Per le equazioni di base descriventi un HCF (v. **2**), come pure per un'ampia bibliografia, cfr. per es. [**6**]$_{1,2,3}$.

tavia, per favorire il passaggio ad altri sistemi di misura, scriveremo, pur adottando le (2.1),

$$D = \varepsilon E\,, \qquad B = \mu H\,. \tag{2.2}$$

Come è noto dalla elettrodinamica relativistica, qualora non valessero le (2.1), le (2.2) in quanto *equazioni costitutive*, sarebbero valide solo nel riferimento locale di quiete del fluido (cioè per un osservatore mobile localmente col fluido). In virtù delle (2.1) però esse diventano valide anche nel generico sistema inerziale cui riferiremo le equazioni fondamentali descriventi il fluido.

Le equazioni fondamentali sono ([2])

(i) *Equazione di continuità di massa*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad (\boldsymbol{v} \text{ campo di velocità})\,. \tag{2.3}$$

(ii) *Equazione di moto.*

In assenza di viscosità e nella consueta circostanza MFD di trascurabilità della forza elettrica $\varrho_e \boldsymbol{E}$ rispetto a quella magnetica $\boldsymbol{J}/c \wedge \boldsymbol{B}$ (ϱ_e densità di carica elettrica, $\boldsymbol{J}$ vettore densità di corrente elettrica, c velocità della luce nel vuoto)

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \varrho \boldsymbol{f} - \operatorname{grad} p + \frac{\boldsymbol{J}}{c} \wedge \boldsymbol{B} \tag{2.4}$$

(ϱ densità di massa, $\varrho \boldsymbol{f}$ forza di massa di origine non elettromagnetica agente sull'unità di volume).

(iii) *Equazioni di Maxwell.*

Esse, come è ben noto dalla elettrodinamica relativistica, valgono in ogni sistema inerziale indipendentemente dal fatto che il conduttore sia in quiete od in moto rispetto al riferimento. Nella consueta circostanza MFD di tra-

([2]) Ci si riferisce esplicitamente al caso del fluido incomprimibile, anche se il contenuto di **3**, **4**, **5** e **8** del presente lavoro sussiste inalterato nel caso del fluido comprimibile.

scurabilità della corrente di spostamento rispetto a quella di conduzione e tenuto conto di quanto si è detto a proposito delle (2.2), esse si scrivono

$$\text{(2.5)} \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \boldsymbol{J}, \qquad \text{(2.6)} \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\text{(2.7)} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,, \qquad \text{(2.8)} \qquad \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\varrho_e\,.$$

(iv) *Equazione costitutiva per il vettore densità di corrente.*

Per un HCF essa si scrive

$$\text{(2.9)} \qquad \boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \wedge \boldsymbol{B} - \beta_H\, \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{B})\,,$$

dove σ è la conduttività elettrica e β_H il coefficiente di Hall.

Eliminandovi $\boldsymbol{J}$ tramite la (2.5), l'equazione di moto si scrive

$$\text{(2.10)} \qquad \varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \varrho \boldsymbol{f} - \operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\mu} (\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}\,.$$

Anche $\boldsymbol{E}$ si elimina subito dal numero delle incognite. Infatti, prendendo il rotore di ambo i membri della (2.5) e tenendo conto di (2.6), (2.7) e (2.9), si ottiene *l'equazione del campo magnetico per un* HCF

$$\text{(2.11)} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) + \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B} + \beta \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B})\,,$$

dove

$$\text{(2.12)} \qquad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$$

è detta «viscosità magnetica» od anche «diffusività magnetica» e

$$\text{(2.13)} \qquad \beta = c^2 \beta_H / 4\pi\mu\,.$$

Il sistema di equazioni fondamentali descriventi un HCF (incomprimibile, omogeneo, non viscoso) è dunque costituito dalle (2.3), (2.10) e (2.11) (con la condizione (2.7)) nelle incognite $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$, p. Noti $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{J}$ è subito dato dalla (2.5) ed $\boldsymbol{E}$ dalla (2.9).

3 - Invarianza rispetto a trasformazioni di Galileo delle equazioni fondamentali

È noto (per una dimostrazione cfr. per es. [**6**]$_3$, n. 8) che le equazioni fondamentali della MFD sono invarianti rispetto a trasformazioni di Galileo. Tale circostanza è conseguenza del fatto che in MFD sussistono le (con un apice si indicano le grandezze relative al sistema locale di quiete)

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}\,, \qquad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \wedge \boldsymbol{B}\,, \qquad \boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}\,, \qquad \varrho_e' = \varrho_e - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J}\,. \tag{3.1}$$

Ora, tenendo conto che le equazioni fondamentali per un HCF differiscono da quelle MFD per il solo termine in β_H nella (2.9), e che dalle $(3.1)_1$ e $(3.1)_3$ segue $\boldsymbol{J}' \wedge \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{B}$, resta subito accertata l'invarianza rispetto a trasformazioni di Galileo delle equazioni fondamentali descriventi un HCF.

4 - Energia del campo elettromagnetico

Come è ben noto, per un HCF la densità d'energia elettrica $\varepsilon E^2/8\pi$ è trascurabile rispetto a quella magnetica $B^2/8\pi\mu$, cosicché l'energia elettromagnetica che compete ad un volume V fisso si scrive

$$\mathscr{E} = \frac{1}{8\pi\mu} \int_V B^2 \,\mathrm{d}V\,. \tag{4.1}$$

Da (4.1) segue usando (2.6)

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi\mu} \int_V \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \,\mathrm{d}V = -\frac{c}{4\pi\mu} \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B}) \,\mathrm{d}V - \frac{c}{4\pi\mu} \int_V \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}V\,. \tag{4.2}$$

Da (2.9) segue

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} + \frac{\boldsymbol{B}}{c} \wedge \boldsymbol{v} + \beta_H \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{B}\,, \tag{4.3}$$

e quindi per (2.5)

$$\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{J^2}{\sigma} + \frac{4\pi\mu}{c^2} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}\,. \tag{4.4}$$

Introdotto il *vettore di Poynting* $\boldsymbol{P} = (c/4\pi\mu)\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B}$, da (4.2) per (4.4) segue infine *l'equazione dell'energia per il campo elettromagnetico*

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} = -\int_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S - \int_V \frac{J^2}{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{v}\cdot(\frac{\boldsymbol{J}}{c}\wedge\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V\,, \tag{4.5}$$

la cui interpretazione fisica è palese ($\boldsymbol{n}$ normale esterna alla frontiera S di V).

Dunque *l'equazione dell'energia per il campo elettromagnetico per un HCF coincide con quella della MFD in assenza di effetto Hall* (cfr. per quest'ultima per es. [**2**], n. 1.4 e [**4**], n. 5).

5 - Tasso di incremento del flusso magnetico attraverso una superficie materiale

Se S è una superficie materiale (di normale esterna $\boldsymbol{n}$) in un generico continuo in moto con campo di velocità $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ ed $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ un generico campo vettoriale, sussiste come è ben noto (cfr. per es. [**1**] n. 19, [**5**] eq. (3.1.2)) la

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_S [\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{5.1}$$

In particolare per il campo magnetico sussiste per un generico continuo la

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_S [\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{v})]\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{5.2}$$

Indicata con

$$\boldsymbol{F}_m = \frac{\boldsymbol{J}}{c}\wedge\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\mu}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B} \tag{5.3}$$

la forza magnetica per unità di volume, per un HCF da (5.2) tenuto conto di (2.11) segue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \nu_m\nabla^2\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S - 4\pi\mu\beta\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}_m\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{5.4}$$

Dalla (5.4) infine, tenuto conto di (2.5) e (2.12), segue la cercata *formula per* *il tasso di incremento del flusso magnetico attraverso una superficie materiale in un* HCF

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{c}{\sigma}\oint_l \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}P - 4\pi\mu\beta\oint_l \boldsymbol{F}_m\cdot\mathrm{d}P\,, \tag{5.5}$$

(l intero contorno di S orientato come nel teorema di Stokes). In particolare per $\nu_m = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -4\pi\mu\beta\oint_l \boldsymbol{F}_m\cdot\mathrm{d}P\,. \tag{5.6}$$

La (5.6), fra l'altro, mette chiaramente in evidenza che *per un HCF non vale, in generale, il teorema di Alfvén.* (Detto teorema per $\beta = 0$ si ritrova subito, come naturale, dalla (5.6) stessa). In particolare il teorema continua a valere per i $\boldsymbol{B}$ generatori di forze magnetiche conservative.

6 - Un effetto di congelamento

In questo numero, come nel successivo, assumiamo $\nu_m = 0$. Prendendo il rotore di ambo i membri della (2.10), nell'ipotesi standard di $\boldsymbol{f}$ conservativa, indicando con $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ il vortice, si ottiene la

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{B}\wedge\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\,. \tag{6.1}$$

Sommando alla (2.11) la (6.1) moltiplicata per $4\pi\mu\varrho\beta$ e posto

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + 4\pi\mu\beta\varrho\boldsymbol{\omega}\,, \tag{6.2}$$

si ottiene

$$\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\wedge\widetilde{\boldsymbol{B}}). \tag{6.3}$$

La (6.3) mette in evidenza un effetto di c o n g e l a m e n t o ([3]) in un HCF incomprimibile omogeneo con $\nu = 0$ e $\nu_m = 0$ per il vettore $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ (analogo a quello

([3]) Basta applicare la (5.1) al vettore $\widetilde{\boldsymbol{B}}$.

che si ha per $\boldsymbol{B}$ in MFD - teorema di Alfvén). Tale effetto è stato messo in luce da C. G. Gimblett e D. W. Allan in [3].

Aggiungiamo qui sull'argomento le considerazioni che seguono. Siccome in assenza di effetto Hall l'evoluzione temporale del campo magnetico è data dalla (nel caso $\nu_m = 0$)

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}), \tag{6.4}$$

per la (6.3) appare giustificato chiamare $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ campo magnetico modificato in un HCF.

Avendosi $\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{B}} = 0$ e sussistendo la (2.3), la (6.3) può scriversi nella forma equivalente

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} = \widetilde{\boldsymbol{B}} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} . \tag{6.5}$$

La soluzione generale della (6.5) è data dalla formula, analoga a quella di Cauchy,

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}_0 \cdot \operatorname{Grad} \boldsymbol{x} , \tag{6.6}$$

dove $\widetilde{\boldsymbol{B}}_0$ è il valore di $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ad un generico istante assunto come iniziale ($t = 0$) e $\operatorname{Grad} \boldsymbol{x}$ il gradiente lagrangiano del campo vettoriale $\boldsymbol{x}$ che dà la posizione attuale delle particelle del continuo.

Notiamo infine che l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} ,$$

di solito riferita come *equazione di Helmholtz* (cfr. [8], pag. 152, nota 1 a pié di pagina) è soddisfatta in assenza di dissipazione per un fluido omogeneo incomprimibile: (a) non elettroconduttore, nel qual caso $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{\omega}$, (b) elettroconduttore in assenza di effetto Hall, nel qual caso $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{B}$, (c) elettroconduttore in presenza di effetto Hall, nel qual caso $\boldsymbol{u} \equiv \widetilde{\boldsymbol{B}}$.

7 - Una interessante formula per il tasso di incremento del campo magnetico modificato

Una interessante formula per il tasso di incremento del campo magnetico modificato $\tilde{\boldsymbol{B}}$ si ottiene usando la classica decomposizione del tensore grad $\boldsymbol{v}$

$$\text{grad}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Omega}\,, \tag{7.1}$$

come somma del *tensore velocità di deformazione* $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ e del *tensore di spin* $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{j,i} - v_{i,j})$: usando (7.1) da (6.5) segue infatti la

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{D} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\wedge\tilde{\boldsymbol{B}}\,. \tag{7.2}$$

8 - L'equazione del potenziale vettore del campo magnetico

L'equazione del campo magnetico (2.11), introdotto il potenziale vettore $\boldsymbol{A}$ definito dalla

$$\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}\,, \tag{8.1}$$

diventa

$$\text{rot}\,[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{v}\wedge\text{rot}\,\boldsymbol{A} - \beta\,\text{rot}\,\boldsymbol{A}\wedge\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A} - \nu_m\,\nabla^2\boldsymbol{A}] = 0\,.$$

Da questa segue *l'equazione del potenziale vettore del campo magnetico per un HCF*

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{v}\wedge\text{rot}\,\boldsymbol{A} - \text{grad}\,\varphi + \beta\,\text{rot}\,\boldsymbol{A}\wedge\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A} + \nu_m\,\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{8.2}$$

(φ funzione arbitraria della posizione e del tempo).

9 - Una osservazione

In statica le equazioni fondamentali per un HCF incomprimibile omogeneo si scrivono

$$\text{grad}\,p = \varrho\,\text{grad}\,U + \boldsymbol{F}_m\,, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nu_m\,\nabla^2\boldsymbol{B} - 4\pi\mu\beta\,\text{rot}\,\boldsymbol{F}_m\,, \tag{9.2}$$

con la condizione (2.7).

Da (9.1) si ha $\boldsymbol{F}_m = \text{grad}\, \Phi$, con $\Phi = p - \varrho U$. Ne segue che ogni soluzione della magnetoidrostatica in assenza di effetto Hall (in particolare ogni soluzione force-free, cioè a $\boldsymbol{F}_m = 0$) lo è anche per un HCF incomprimibile omogeneo.

Bibliografia

[1] R. Becker, *Teoria della elettricità*, I, trad. italiana, Sansoni, Firenze 1949.

[2] V. C. A. Ferraro and C. Plumpton, *An introduction to magneto-fluid-mechanics*, 2nd ed., Oxford 1966.

[3] C. G. Gimblett and D. W. Allan, *The electromotive force generated by driven plasma motions*, J. Plasma Physics **16** (1976), 389-398.

[4] A. Jeffrey, *Magnetohydrodynamics*, Oliver and Boyd, London 1966.

[5] A. Jeffrey and T. Taniuti, *Nonlinear wave propagation*, Academic Press 1964.

[6] G. Mattei: $[\cdot]_1$ *Sulla influenza dell'effetto Hall nella propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un fluido incomprimibile*, Ann. Mat. Pura Appl. **84** (1970), 1-32; $[\cdot]_2$ *Propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un plasma incomprimibile*, Ann. Mat. Pura Appl. **94** (1972), 315-344; $[\cdot]_3$ *Una introduzione allo studio dei modelli di tipo idrodinamico nella Fisica Matematica dei plasmi*, Boll. Un. Mat. Ital. **17** A (1980), 1-24.

[7] P. Rosenau, J. A. Tataronis and G. Conn, *Elements of magnetohydrodynamics with the Hall current*. Part I, *Nonlinear phenomena*, J. Plasma Physics **21** (1979), 385-399.

[8] J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, Hand. Phys. VIII/1 (1959), 125-263.

Summary

In this paper some contributions are given to the theory of the electrically conducting fluids described by the magnetofluid-dynamic equations in the presence of the Hall current. The specific subjects treated in the paper are indicated by the titles of the sections.

***