Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 401-406

T. MANACORDA (*)

Risonanza nei fili elastici di massa variabile (**)

A LUIGI CAPRIOLI per il suo 70° compleanno

1 – L'azione di un debole vento costante perpendicolare ad un filo elastico teso tra due estremi fissi si manifesta come quella di una forza periodica che sollecita il filo a vibrazioni trasversali, perpendicolari al vento e al filo stesso. In tale situazione, naturalmente, si possono manifestare condizioni di risonanza quando una delle frequenze proprie del filo approssima la frequenza dell'azione del vento.

Se la massa del filo non è costante, come avviene, ad es., in presenza di un deposito di neve, può darsi che la risonanza si verifichi anche se inizialmente la frequenza eccitatrice è lontana da ogni frequenza propria del filo.

Questa nota intende indagare in modo elementare tale eventualità. Si proverà che le frequenze proprie del filo di massa variabile approssimano asintoticamente quelle del filo la cui massa tende ad un valore limite, sulle quali, quindi, si possono leggere le condizioni di risonanza. Ciò mette bene in evidenza la necessità di paragonare le frequenze proprie del filo di massa limite a quelle iniziali.

2 – Si prende in esame un filo elastico con gli estremi fissi, rettilineo nella configurazione di riferimento nella quale x, $0 \leqq x \leqq L$, è l'ascissa dei suoi punti, τ_0 la tensione, costante, ϱ_0 la densità. Nella configurazione istantanea, s è l'ascissa curvilinea, δ l'allungamento unitario, $\boldsymbol{\tau} = \tau \boldsymbol{T}$ la tensione, $\tau = \tau(\delta)$ e ϱ la den-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, via Bonanno 25 B, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 29-III-1984.

sità. Si suppone che, durante il moto, la massa cresca per acquisizione dall'ambiente, di modo che si possa scrivere

$$\varrho(1+\delta)=\varrho_0+\mu\,, \tag{2.1}$$

con μ funzione crescente di t, $\mu(0)=0$.

L'equazione di moto si ottiene subito dal bilancio della quantità di moto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{s'}^{s''}\varrho\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}s=\boldsymbol{\tau}(s')-\boldsymbol{\tau}(s'')+\int_{s'}^{s''}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}s \qquad s'<s''\,. \tag{2.2}$$

Poichè la massa varia, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{s'}^{s''}\varrho\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x'}^{x''}\varrho(1+\delta)\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}x=\int_{s'}^{s''}\frac{\partial}{\partial t}\big((\varrho_0+\mu)\boldsymbol{v}\big)\,\frac{\mathrm{d}s}{1+\delta}\,.$$

Si ottiene, quindi, l'equazione

$$\frac{1}{1+\delta}\,\frac{\partial}{\partial t}\big((\varrho_0+\mu)\boldsymbol{v}\big)=\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial s}+\boldsymbol{b}=\frac{1}{1+\delta}\,\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial x}+\boldsymbol{b}\,. \tag{2.3}$$

3 – Ci si interessa, qui, alle piccole vibrazioni trasversali. Per esse, dalla (2.3), si ottiene

$$(\varrho_0+\mu)y_{tt}+\mu_t y_t=\tau_0 y_{xx}+b_1\,. \tag{3.1}$$

Nel caso che ci occupa, b_1 può essere rappresentato da $A\operatorname{sen}\omega t$, con $A=A(x)>0$. Dividendo, allora, per $\varrho_0+\mu$, si perviene all'equazione

$$\begin{gathered} y_{tt}+\lambda(t)y_t-\frac{1}{c^2}\,y_{xx}=B\operatorname{sen}\nu t\,,\\ \lambda=\frac{\mu_t}{\varrho_0+\mu}\,,\quad c^2=\frac{\varrho_0+\mu}{\tau_0}\,,\quad B=\frac{A}{\varrho_0+\mu}\,. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Si fa l'ipotesi che μ sia una funzione del tempo continua con la sua derivata seconda, crescente, e, per di più, che

$$\lim_{t\to\infty}\mu=\mu_\infty\,,\qquad \lim_{t\to\infty}\mu_t=0\,. \tag{3.3}$$

Ne segue $\lambda > 0$, $\lim_{t\to\infty} \lambda = 0$, mentre $1/c^2$ e B sono funzioni positive e decrescenti di t, con $\lim_{t\to\infty} c^2 = c_\infty^2 > 0$, $\lim_{t\to\infty} B = B_\infty$. Si supporrà addirittura λ non crescente.

Si terrà anche conto di una resistenza di mezzo, di modo che, nell'ambito delle approssimazioni adottate, l'equazione del moto è

$$(3.2)' \qquad y_{tt} + (\lambda + l)y_t - \frac{1}{c^2}\, y_{xx} = B \operatorname{sen} \nu t,$$

con l costante positiva.

Prendo poi in esame, accanto alla (3.2)', l'equazione corrispondente ai valori limiti di c e B

$$(3.4) \qquad z_{tt} + l z_t - \frac{1}{c_\infty^2}\, z_{xx} = B_\infty \operatorname{sen} \nu t\,.$$

Alle (3.2)' e (3.4) vanno aggiunte le condizioni al contorno

$$(3.5) \qquad y(0, t) = y(L, T) = 0\,, \qquad z(0, t) = z(L, t) = 0\,,$$

ed opportune condizioni iniziali, che qui non interessa precisare.

Nel seguito ci si interesserà particolarmente alle soluzioni forzate delle (3.3) e (3.4) con le condizioni (3.5).

4 – Poichè $z(x, t)$ si annulla agli estremi, il suo sviluppo formale in serie di Fourier ha la forma

$$(4.1) \qquad z(x, t) = \Sigma\, a_n(t) \operatorname{sen} k_n x \qquad \left(k_n = \frac{n\pi}{L}\right),$$

dove le a_n sono funzioni solo di t. Si suppone poi anche per $B_\infty(x)$ valido uno sviluppo formale di Fourier del tipo

$$(4.2) \qquad B_\infty(x) = \Sigma\, b_n \operatorname{sen} k_n x\,,$$

con le b_n costanti.

Sostituendo nella (3.4) si trova che ogni a_n deve soddisfare all'equazione differenziale ordinaria

$$(4.3) \qquad \ddot{a}_n + l\dot{a}_n + \omega_n^2 a_n = b_n \operatorname{sen} \nu t \qquad (\omega_n = k_n/c_\infty)\,.$$

La condizione perchè, in corrispondenza della forza eccitatrice $b_n \operatorname{sen} \nu t$ si abbia risonanza è dunque

$$\omega_n^2 = \nu^2 + \frac{l^2}{2},$$

la quale richiede, tra l'altro, che l sia sufficientemente piccola. In queste condizioni, l'ampiezza della soluzione forzata $\bar{a}_n$ è massima.

Una operazione analoga sulla (3.2), ottenuta ponendo formalmente

$$y(x, t) = \Sigma\, \alpha_n(t) \operatorname{sen} k_n x\,, \qquad B(x) = \Sigma\, \beta_n(t) \operatorname{sen} k_n x\,, \tag{4.4}$$

implica che ogni α_n debba soddisfare all'equazione

$$\ddot{\alpha}_n + \big(l + \lambda(t)\big)\dot{\alpha}_n + \sigma_n^2(t)\alpha_n = \beta(t) \operatorname{sen} \nu t \qquad \Big(\sigma_n = \frac{k_n}{c}\Big)\,. \tag{4.5}$$

Si pone il problema di precisare le condizioni di risonanza per l'n-ma armonica di y.

5 – Si supponga che (4.3) e (4.5) ammettano soluzioni forzate $\bar{a}$ e $\bar{\alpha}$ (¹). Posto allora

$$w = \bar{\alpha} - \bar{a}\,, \tag{5.1}$$

si trova per w l'equazione

$$\ddot{w} + (\lambda + l)\dot{w} + \sigma^2 w = f(t)\,, \tag{5.2}$$

con

$$f(t) = (\beta - b) \operatorname{sen} \nu t - \lambda \dot{\bar{a}} - (\sigma^2 - \omega^2)\bar{a}\,. \tag{5.3}$$

Si indichino con w_1 e w_2 due soluzioni indipendenti della (5.2) resa omogenea (²). Dopo di che un'applicazione banale del metodo della variazione delle

(¹) Poichè il ragionamento si applica per qualunque n, si sopprime d'ora innanzi l'indice n per le grandezze in esame.

(²) Nel nostro caso, w_1 e w_2 sono limitate. Si ha infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}\dot{w}^2 + \tfrac{1}{2}\sigma^2 w^2\right) = \dot{w}(\ddot{w} + \sigma^2 w) + \sigma\dot{\sigma} w^2 = -(l + \lambda)\dot{w}^2 + \sigma\dot{\sigma} w^2\,,$$

dove $\dot{\sigma}$ è negativa e $(l + \lambda)$ strettamente positiva.

costanti arbitrarie porta a concludere che soluzione particolare di (5.2) é

$$\overline{w}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{w_1(t)w_2(\xi) - w_1(\xi)w_2(t)}{W(\xi)} f(\xi)\,d\xi\,, \tag{5.4}$$

con W wronskiano di w_1 e w_2.

Si effettui nella (5.2), resa omogenea

$$\ddot{w} + (l + \lambda)\dot{w} + \sigma^2(t)w = 0\,, \tag{5.2$'$}$$

il cambiamento di funzione incognita definito da

$$w = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{l+\lambda}{2}\,d\xi\right]\varphi(t)\,; \tag{5.5}$$

φ soddisfa all'equazione

$$\ddot{\varphi} + \left[-\frac{\dot{\lambda}}{2} + \sigma^2 - \frac{(l+\lambda)^2}{4}\right]\varphi = 0\,. \tag{5.6}$$

Nella (5.6), la funzione $\sigma^2 - (l+\lambda)^2/4$ è positiva (³) e a variazione limitata mentre la funzione $-\dot{\lambda}/2$ è integrabile tra t_0 e $+\infty$. Un noto teorema (⁴) consente di affermare che ogni soluzione di (5.6) è limitata.

Se ora si ricorre alla formula di Liouville

$$W(t) = W_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t}(l+\lambda)\,d\xi\right] \qquad W_0 = W(t_0)\,, \tag{5.7}$$

tenuto conto della posizione (5.5), si vede che $\overline{w}$ resta espresso da

$$\overline{w}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)\varphi_2(t)}{W_0} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\int_{\xi}^{t}(l+\lambda)\,d\eta\right] f(\xi)\,d\xi\,, \tag{5.8}$$

con $W_0 = W(t_0)$ e φ_1 e φ_2 soluzioni linearmente indipendenti della (5.6), limitate in virtù del teorema citato. Da (5.8) segue dunque

$$\overline{w} \leqq K \exp\left[-\tfrac{1}{2}lt\right]\int_{t_0}^{t} \exp\left[\tfrac{1}{2}l\xi\right]|f(\xi)|\,d\xi\,, \tag{5.9}$$

dove K è un'opportuna costante.

(³) Ciò è certo se $(l+\lambda)/2 < \omega$, $\lambda/2 < \omega - l/2$. Si ricordi che è $\omega - l/2 > 0$ e $\lim_{t\to\infty} \lambda = 0$.

(⁴) Vedi ad es. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Vol. II, cap. VII, § 4.

Si ricordi ora che, in accordo con la sua definizione (cfr. la (5.3)) $f(t)$ tende a zero per $t \to \infty$. Per t_0 sufficientemente grande è dunque $|f(t)| < \varepsilon$, $t \geqq t_0$, $\varepsilon > 0$ e si ottiene

$$|\overline{w}| \leqslant \frac{2}{l} K\varepsilon - \frac{2}{l} K\varepsilon \exp\left[-\tfrac{1}{2} l(t-t_0)\right], \tag{5.10}$$

la quale dimostra che $\overline{w}$ è piccola quanto si vuole per t_0 sufficientemente grande [5].

Si ritorna al problema fisico dal quale si è partiti. Si supponga che la risonanza abbia luogo per l'n-ma armonica dell'equazione limite, $\omega_n^2 = \nu^2 + l^2/2$. Si considera, poi, la successione degli autovalori ω_{0n} della equazione che si ottiene da (3.2)′ ponendo $c^2 = c^2(0) = \varrho_0/\tau_0$, $\lambda = 0$; si ha $\sigma_n^2(0) = \omega_{0n}^2$. Se dunque $\omega_{n+1} > \omega_{0n} > \omega_n$ al tendere di t all'infinito, σ_n tende decrescendo ad ω_n e si eccita la risonanza di y sull'armonica ennesima.

Summary

The occurrence of the resonance in a string of growing mass is investigated.

It's proved that the resonance frequencies of the string coincide in the limit with those of an suitally written limit equation.

* * *

[5] Si osserva che il wronskiano di w_1 e w_2 non differisce, per $t = t_0$, da quello di φ_1 e φ_2, e che quest'ultimo è certamente diverso da zero per ogni t_0.