Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984), 407-413

AUGUSTO MURACCHINI (*)

Esistenza ed unicità di soluzioni periodiche per sistemi quasi lineari dotati di simmetria (II) (**)

A LUIGI CAPRIOLI per il suo 70° compleanno

1 – Nella prima parte [1] di questa nota abbiamo dimostrato l'esistenza e l'unicità di soluzioni periodiche, soddisfacenti ad opportune condizioni iniziali, della equazione differenziale non lineare

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x, \dot{x}, t; \alpha) \tag{1}$$

e del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + a_1 x = e_1(t) + f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta)\,, \\ &\ddot{y} + a_2 y = e_2(t) + f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

quando le funzioni di perturbazione f, f_1, f_2 soddisfacciano ad opportune condizioni di simmetria (cfr. [1]). Stabiliremo ora risultati analoghi a quelli ottenuti in [1] per altri casi di simmetria a cui soddisfacciano le funzioni f, f_1, f_2. Rimandiamo il lettore alla nota precedente per i dettagli relativi alle notazioni che useremo e per quelle ipotesi generali sulla struttura dei sistemi (1) e (2) che abbiamo detto in [1] doversi sempre presupporre e che ammetteremo anche nel corso di ciò che segue.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Sede staccata di Via Vallescura 2, 40136 Bologna, Italy.
(**) Ricevuto: 5-IV-1984.

2 – Sia data l'equazione

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x, \dot{x}, t; \alpha) . \tag{3}$$

La funzione di perturbazione, τ-periodica in t, non contenga $\dot{x}$ e soddisfi ad entrambe le condizioni

$$f(x, t; \alpha) = f(x, -t; \alpha) , \tag{4}$$

$$f\left(x, t - \frac{\tau}{4}; \alpha\right) = -f\left(-x, -t - \frac{\tau}{4}; \alpha\right) . \tag{4$'$}$$

Inoltre $e(t)$ sia τ-periodica, pari con $e(0) \neq 0$ ed $e(t - \tau/4)$ sia dispari con $\dot{e}(-\tau/4) \neq 0$.

Indicheremo anche in questo caso con $F(t)$ l'unica soluzione periodica di (1) per $\alpha = 0$. Risulta dalle ipotesi indicate sopra che $F(t)$ è pari, τ-periodica ed $F(t - \tau/4)$ dispari; anche ora si può supporre che risulti $F(0) = k \neq 0$, $\dot{F}(0) = 0$.

Ciò premesso vale il seguente

Lemma 4. *Sia $x^*(t)$ la soluzione di* (3) *con le condizioni iniziali $x^*(0) = x_0$, $\dot{x}^*(0) = 0$. Allora $x^*(t)$ è una funzione pari.*

Inoltre, se $x^*(t)$ soddisfa a $x^*(\tau/4) = 0$, allora $x^*(t)$ è anche τ-periodica. Inversamente, se la soluzione $x^*(t)$ della (3) *con le condizioni iniziali indicate è τ-periodica, risulta $x^*(\tau/4) = 0$.*

Dim. Per dimostrare che $x^*(t)$ è una funzione pari si procede come per il Lemma 1 (cfr. [1]) dato che le ipotesi attuali sono le stesse che occorrono per l'applicabilità di quel lemma.

Consideriamo poi la funzione

$$z(t) = x^*\left(t - \frac{\tau}{4}\right) . \tag{5}$$

Si ha, dato che $x^*(-\tau/4) = x^*(\tau/4) = 0$, che

$$z(0) = x^*(-\tau/4) = 0 , \qquad z(\tau/2) = x^*(\tau/4) = 0 . \tag{6}$$

Inoltre si ha

$$\dot{z}(t) = \dot{x}^*\left(t - \frac{\tau}{4}\right) , \qquad \ddot{z}(t) = \ddot{x}^*\left(t - \frac{\tau}{4}\right) , \tag{7}$$

e quindi

$$\dot{z}(0) = \dot{x}^*(-\tau/4) = -\dot{x}^*(\tau/4)\,. \tag{8}$$

Per ipotesi la $x^*(t)$ è soluzione della (3), ossia

$$\ddot{x}^*(t) + ax^*(t) = e(t) + f[x^*(t), t; \alpha]\,, \tag{9}$$

ovvero, con la trasformazione $t \to t - \tau/4$ e tenendo conto di (5) e (7)

$$\ddot{z}(t) + az(t) = e(t - \frac{\tau}{4}) + f\,[z(t), t - \frac{\tau}{4}; \alpha]\,. \tag{10}$$

Ricordando (4)′, le ipotesi relative alla funzione $e(t - \tau/4)$, le (6) e le (8) si può applicare a $z(t)$ il Lemma 2 di [**1**]. Si conclude così che $z(t)$ è τ-periodica e quindi lo è anche, ovviamente, $x^*(t)$.

La parte inversa segue senza difficoltà ragionando come già fatto nei lemmi 1 e 2, ma su ciò non ci soffermiamo perchè inessenziale per quanto segue.

Teorema 4. *Sia $\lambda > 0$ e si supponga che* (3) *abbia una soluzione unica di punto iniziale $\mathscr{P}_0(x_0, 0)$ per ogni x_0 con $|x_0 - k| < \lambda$. Esiste $\bar{\alpha} > 0$ tale che* (3) *abbia per ogni valore di α con $|\alpha| < \bar{\alpha}$ una ed una sola soluzione τ-periodica $x^*(t, \alpha)$ con $|x^*(0; \alpha) - k| < \lambda, \dot{x}^*(0; \alpha) = 0$. Inoltre $\lim\limits_{\alpha \to 0} x^*(t; \alpha) = F(t)$.*

Dim. Per $\alpha = 0$ l'equazione (3) diventa

$$\ddot{x} + ax = e(t)\,, \tag{11}$$

che ha una ed una sola soluzione τ-periodica $F(t)$ con $F(0) = k \neq 0$. La soluzione della (11) di punto iniziale $\mathscr{P}(k + u, 0)$ è

$$x(t, u) = \begin{cases} u \cos \sqrt{a}\, t + F(t) & \text{per } a > 0 \\ u \cosh \sqrt{-a}\, t + F(t) & \text{per } a < 0\,. \end{cases} \tag{12}$$

Segue che

$$x\,(\frac{\tau}{4}, u) = \begin{cases} u \cos \dfrac{\tau\sqrt{a}}{4} = C'u & \text{per } a > 0 \\[2ex] u \cosh \dfrac{\tau\sqrt{-a}}{4} = C''u & \text{per } a < 0\,, \end{cases} \tag{13}$$

avendosi, per le ipotesi fatte su $e(t)$, $F(\tau/4) = 0$. Sia ora $x(t, u; \alpha)$ la soluzione (unica per $|u| < \lambda$ secondo l'ipotesi) di (3) con il punto iniziale $\mathscr{P}(k + u, 0)$ e poniamo $x(\tau/4, u; \alpha) = \varphi(u; \alpha)$; quindi $x(\tau/4, u) = \varphi(u, 0)$. Ragionando a questo punto come nel caso dei teoremi 1 e 2 e sfruttando le (13) si conclude che esiste un $\bar{\alpha}$ (> 0) tale che, se $|\alpha| < \bar{\alpha}$, $\varphi(u; \alpha)$ cambia segno al variare di u in $(-\lambda, \lambda)$. Esiste dunque $u_0 \in (-\lambda, \lambda)$ per cui risulta $\varphi(u_0; \alpha) = x(\tau/4, u_0; \alpha) = 0$ (e tale u_0 risulta poi unico). Applicando il Lemma 3 si può concludere che $x^*(t; \alpha) = x(t, u_0; \alpha)$ è τ-periodica. Sono chiaramente soddisfatte anche le rimanenti affermazioni del teorema.

3 – Esaminiamo ora il sistema (2).

Ferme restando tutte le ipotesi generali (cfr. [**1**]) su cui si basa ciò che segue, supponiamo dapprima che le due funzioni di perturbazione abbiano le seguenti proprietà di simmetria

$$f_i(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta) = -f_i(-x, -y, \dot{x}, \dot{y}, -t; \alpha, \beta) \quad \forall \alpha, \beta; \, i = 1, 2 . \tag{14}$$

Inoltre $e_1(t), e_2(t)$ siano funzioni dispari con $\dot{e}_1(0) \neq 0$, $\dot{e}_2(0) \neq 0$.

Sussiste ora il seguente

Lemma 5. *Sia $\{x^*(t), y^*(t)\}$ la soluzione del sistema* (2) *con le condizioni iniziali $x^*(0) = y^*(0) = 0$, $\dot{x}^*(0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}^*(0) = \dot{y}_0$. Allora $x^*(t)$, $y^*(t)$ sono funzioni dispari. Inoltre se $x^*(t)$ ed $y^*(t)$ soddisfano a $x^*(\tau/2) = y^*(\tau/2) = 0$, allora le funzioni $x^*(t), y^*(t)$ sono anche τ-periodiche. Inversamente, se la soluzione $\{x^*(t), y^*(t)\}$ di* (2) *con le condizioni iniziali indicate è τ-periodica, risulta $x^*(\tau/2) = y^*(\tau/2) = 0$.*

Per la dimostrazione si può usare il Lemma 2 (cfr. [**1**]) valido nel caso della singola equazione. Si procede infatti con le opportune (ed ovvie) modifiche in modo del tutto analogo a quello.

Sussiste poi il seguente

Teorema 5. *Siano $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e* (2) *abbia una soluzione unica di punti iniziali $\mathscr{P}_1(0, \dot{x}_0)$, $\mathscr{P}_2(0, \dot{y}_0)$ nei piani $Ox\dot{x}$, $Oy\dot{y}$ rispettivamente, per ogni $\dot{x}_0, \dot{y}_0$ con $|\dot{x}_0 - B_1| < \lambda_1$, $|\dot{y}_0 - B_2| < \lambda_2$. Esistono $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\beta} > 0$ tali che il sistema* (2) *ha per ogni coppia di valori α, β con $|\alpha| < \bar{\alpha}$, $|\beta| < \bar{\beta}$ una ed una sola soluzione τ-periodica $\{x^*(t; \alpha, \beta), y^*(t; \alpha, \beta)\}$, con $|\dot{x}^*(0; \alpha, \beta) - B_1| < \lambda_1$, $|\dot{y}^*(0; \alpha, \beta) - B_2| < \lambda_2$, $x^*(0; \alpha, \beta) = y^*(0; \alpha, \beta) = 0$. Inoltre $\lim\limits_{\alpha,\beta \to 0,0} \{x^*(t; \alpha, \beta), y^*(t; \alpha, \beta)\} = \{F_1(t), F_2(t)\}$.*

Dim. La soluzione del sistema (2) con $\alpha = \beta = 0$ di punti iniziali $\mathscr{P}_1(0, B_1 + u)$, $\mathscr{P}_2(0, B_2 + v)$ è

$$(15)\qquad x(t, u) = \begin{cases} \dfrac{u}{\sqrt{a_1}} \operatorname{sen} \sqrt{a_1}\, t + F_1(t) & \text{per } a_1 > 0 \\[2ex] \dfrac{u}{\sqrt{-a_1}} \operatorname{senh} \sqrt{-a_1}\, t + F_1(t) & \text{per } a_1 < 0\,, \end{cases}$$

$$(16)\qquad y(t, v) = \begin{cases} \dfrac{v}{\sqrt{a_2}} \operatorname{sen} \sqrt{a_2}\, t + F_2(t) & \text{per } a_2 > 0 \\[2ex] \dfrac{v}{\sqrt{-a_2}} \operatorname{senh} \sqrt{-a_2}\, t + F_2(t) & \text{per } a_2 < 0\,. \end{cases}$$

Sia poi $\{x(t, u, v; \alpha, \beta), y(t, u, v; \alpha, \beta)\}$ la soluzione (unica per $|u| < \lambda_1$, $|v| < \lambda_2$ secondo l'ipotesi) di (2) con punti iniziali $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ e si ponga $x(\tau/2, u, v; \alpha, \beta) = \varphi(u, v; \alpha, \beta)$, $y(\tau/2, u, v; \alpha, \beta) = \psi(u, v; \alpha, \beta)$, $x(\tau/2, u) = \varphi_0(u)$, $y(\tau/2, v) = \psi_0(v)$. Segue allora, ragionando come nel caso della singola equazione, che

$$(17)\qquad \lim_{\alpha,\beta \to 0,0} \varphi(u, v; \alpha, \beta) = \varphi_0(u)\,, \quad \lim_{\alpha,\beta \to 0,0} \psi(u, v; \alpha, \beta) = \psi_0(v)\,,$$

$$(18)\qquad \lim_{\alpha,\beta \to 0,0} \frac{\partial \varphi(u, v; \alpha, \beta)}{\partial u} = \frac{d\varphi_0}{du} \begin{cases} = C_1'(\neq 0) & \text{per } a_1 > 0 \\ = C_1''(\neq 0) & \text{per } a_1 < 0\,, \end{cases}$$

$$(19)\qquad \lim_{\alpha,\beta \to 0,0} \frac{\partial \psi(u, v; \alpha, \beta)}{\partial v} = \frac{d\psi_0}{dv} \begin{cases} = C_2'(\neq 0) & \text{per } a_2 > 0 \\ = C_2''(\neq 0) & \text{per } a_2 < 0\,. \end{cases}$$

Si vede poi (cfr. Teorema 3 in [**1**]) che la funzione $\psi(u, v; \alpha, \beta)$ si annulla una ed una sola volta quando il punto (u, v) del piano Ouv si muove sull'arco $\varphi(u, v; \alpha, \beta) = 0$ e vi è pertanto uno ed uno solo punto $(u_0, v_0) \in D = \{|u| < \lambda_1,\ |v| < \lambda_2\}$ con

$$(20)\qquad \varphi(u_0, v_0; \alpha, \beta) = \psi(u_0, v_0; \alpha, \beta) = 0\,.$$

Il Lemma 5 permette allora di concludere che il sistema (2) ha una ed una sola soluzione τ-periodica conforme all'enunciato.

Nel caso poi in cui le due funzioni di perturbazione abbiano le seguenti proprietà di simmetria

$$\begin{aligned} &f_i(x, y, t; \alpha, \beta) = f_i(x, y, -t; \alpha, \beta) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \alpha, \beta; \quad i = 1, 2 \\ &f_i\left(x, y, t - \frac{\tau}{4}; \alpha, \beta\right) = -f_i\left(-x, -y, -t - \frac{\tau}{4}; \alpha, \beta\right), \end{aligned} \tag{21}$$

ed inoltre $e_1(t)$, $e_2(t)$ siano funzioni pari con $e_1(0) \neq 0$, $e_2(0) \neq 0$ ed $e_1(t - \tau/4)$, $e_2(t - \tau/4)$ funzioni dispari con $\dot{e}_1(-\tau/4) \neq 0$, $\dot{e}_2(-\tau/4) \neq 0$, sussistono un lemma ed un teorema di cui omettiamo la dimostrazione, che si può ormai svolgere senza difficoltà, con le ovvie modifiche, sulla base dei ragionamenti svolti per la dimostrazione del Lemma 4 e del Teorema 4.

Lemma 6. *Sia* $\{x^*(t), y^*(t)\}$ *la soluzione del sistema* (2) *con le condizioni iniziali* $x^*(0) = x_0$, $y^*(0) = y_0$, $\dot{x}^*(0) = \dot{y}^*(0) = 0$. *Allora* $x^*(t), y^*(t)$ *sono funzioni pari.*

Inoltre, se $x^*(t)$ *e* $y^*(t)$ *soddisfano a* $x^*(\tau/4) = y^*(\tau/4) = 0$, *allora le funzioni* $x^*(t), y^*(t)$ *sono anche* τ*-periodiche. Inversamente, se la soluzione* $\{x^*(t), y^*(t)\}$ *di* (2) *con le condizioni iniziali indicate è* τ*-periodica risulta* $x^*(\tau/4) = y^*(\tau/4) = 0$.

Teorema 6. *Siano* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ *e* (2) *abbia una soluzione unica di punti iniziali* $\mathscr{P}_1(x_0, 0)$, $\mathscr{P}_2(y_0, 0)$ *nei piani* $Ox\dot{x}$, $Oy\dot{y}$ *rispettivamente per ogni* x_0, y_0 *con* $|x_0 - k_1| < \lambda_1$, $|y_0 - k_2| < \lambda_2$. *Esistono* $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\beta} > 0$ *tali che il sistema* (2) *ha per ogni coppia di valori* α, β *con* $|\alpha| < \bar{\alpha}$, $|\beta| < \bar{\beta}$ *una ed una sola soluzione* τ*-periodica* $\{x^*(t; \alpha, \beta), y^*(t; \alpha, \beta)\}$ *con* $|x^*(0; \alpha, \beta) - k_1| < \lambda_1$, $|y^*(0; \alpha, \beta) - k_2| < \lambda_2$, $\dot{x}^*(0; \alpha, \beta) = \dot{y}^*(0; \alpha, \beta) = 0$. *Inoltre* $\lim_{\alpha,\beta \to 0,0} \{x^*(t; \alpha, \beta), y^*(t; \alpha, \beta)\} = \{F_1(t), F_2(t)\}$.

Bibliografia

[1] A. Muracchini e L. Colafranceschi, *Esistenza ed unicità di soluzioni periodiche per sistemi quasi lineari dotati di simmetria* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 339-349.

Summary

This paper is a sequel of a previous one (see [**1**]*). We prove some theorems concerning the existence and uniqueness of periodic solutions of the equation* $\ddot{x} + ax = e(t) + f(x, \dot{x}, t; \alpha)$ *and of the system* $\ddot{x} + a_1 x = e_1(t) + f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta)$, $\ddot{y} + a_2 y = e_2(t) + f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t; \alpha, \beta)$, *when the parameters* α, β *are sufficiently small and the functions* f, f_1, f_2 *satisfy proper conditions of symmetry.*

* * *