Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10*** (1984), 15-22

JEAN LERAY (*)

Nouveaux prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire

En employant une précision que j'avais jadis apportée au théorème de Cauchy-Kowalewski [**4**], Y. Hamada et A. Takeuchi, d'abord seuls [**3**], puis avec ma collaboration [**1**] ont récemment effectué des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire. En perfectionnant nos procédés, je viens d'obtenir les résultats qui suivent; leurs démonstrations seront publiées en collaboration avec ces auteurs [**2**].

§ 1 - Les résultats

1 - Le problème étudié

Soit Ω une *variété analytique* complexe de dimension complexe n. Notons ω un point arbitraire de Ω et $x' = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées analytiques locales de ω.

Soit Σ une *surface de Riemann*, non compacte et simplement connexe. Notons σ un point arbitraire de Σ et x_0 une coordonnée analytique locale de σ. Un point α de Σ est donné. Notons $x = (\sigma, \omega) \in X = \Sigma \times \Omega$; x a donc les coordonnées locales $(x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Notons $\alpha \times \Omega = \{(\sigma, \omega) \in \Sigma \times \Omega;\ \sigma = \alpha\}$.

Soit a un *opérateur différentiel* d'ordre m, holomorphe dans X au voisinage de $\alpha \times \Omega$, opérant sur les fonctions holomorphes. Nous supposons *qu'aucune hypersurface* $\sigma \times \Omega$, *n'est, en aucun de ses points, caractéristique* pour l'opérateur a.

(*) Adresse: Collège de France, 11 Pl. Marcelin Berthelot, 75005 Paris, France.

Soient v et w *deux fonctions* numériques complexes, holomorphes au voisinage de $\alpha\times\Omega$.

Nous étudions le problème de Cauchy: trouver une fonction numérique, holomorphe, u, telle que

$$au = v; \quad u - w \text{ s'annule } m \text{ fois sur } \alpha\times\Omega . \tag{1}$$

Notre but est d'expliciter, *aussi simplement que possible, des voisinages de* $\alpha\times\Omega$, *aussi grands que possible, sur lesquels le problème* (1) *possède une solution.*

2 - Les principales définitions

La fonction $f\colon \Omega \to \dot{\boldsymbol{R}}_+ =]0, \infty[$ est une fonction de classe C^1, nulle à l'infini, qu'on choisit arbitrairement; nos résultats dépendent de ce choix. Notons $(\forall s \in \boldsymbol{R}_+)$ $\Omega_s = \{\omega \in \Omega;\, s < f(\omega)\}$. L'hypothèse que f s'annule à l'infini signifie ceci: $(\forall s > 0)$ $\overline{\Omega}_s$ est compact.

Donc f est borné supérieurement. En ω, notons $f' = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ le covecteur unique de Ω tel que

$$df = \mathrm{Re}\,\Big(\sum_{j=1}^{n} f_{x_j} dx_j\Big) . \tag{2.1}$$

Le polynôme caractéristique en $x \in X$ de l'opérateur a est noté $g\colon \xi \mapsto g(x;\xi)$, $\xi = (\xi_0, \xi')$, ξ_0 et ξ' étant des covecteur de X en x, de Σ en σ et de Ω en ω. Soit

$$\sum_{|\lambda|\leqslant m} a_\lambda(x) D^\lambda ,$$

où
$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \boldsymbol{N}^{n+1}, \qquad |\lambda| = \lambda_0 + \dots + \lambda_n ,$$
$$D^\lambda = D_0^{\lambda_0} \dots D_n^{\lambda_n}, \qquad D_k = \partial/\partial x_k ,$$

l'expression locale de l'opérateur a; par définition celle de son polynôme caractéristique g est

$$g(x;\xi) = \sum_{|\lambda|=m} a_\lambda(x)\xi^\lambda .$$

On a

$$g(x;\xi) = \sum_{r=0}^{m} g_r(x_0, \omega; \xi')\xi_0^r ,$$

g_r étant un polynôme en ξ', homogène de degré $m - r$; il dépend du choix de la coordonnée locale x_0. Par hypothèse l'hypersurface $\sigma\times\Omega$ n'est caractéristique en aucun de ses points; donc $(\forall x_0, \omega)\quad g_m(x_0, \omega)\neq 0$.

L'équation caractéristique sera, par définition, l'équation, d'inconnue ξ_0

$$\sum_{r=0}^{m} g_r(x_0, \omega; f')\xi_0^r = 0;$$

ses racines sont les racines caractéristiques. Rappelons comment elles dépendent du choix de la coordonnée x_0

$$\xi_0\, dx_0 \text{ est une forme différentielle de } \sigma, \tag{2.2}$$

c'est-à-dire est indépendante du choix de la coordonnée locale x_0.

Enonçons un résultat inédit de D. Schiltz [**5**]: Quand ces racines caractéristiques sont *distinctes* en un point $(\alpha, \omega)\in\alpha\times\partial\Omega_s$, où $s>0$, elles permettent de décrire en (α, ω) l'allure du domaine d'holomorphie de la solution u du problème (1), si la donnée w n'est holomorphe qu'au voisinage de $\alpha\times\Omega_s$ et si $\partial\Omega_s$ est de classe C^2.

La majorante $\varrho(x_0, \omega)$ du module des racines caractéristiques, définie ci-dessous, permettra de construire des domaines de X sur lesquels le problème (**1**) possède une solution holomorphe. Si $g_r(x_0, \omega; f')=0$ en (x_0, ω) pour $r=0, \dots, m-1$, alors $\varrho(x_0, \omega)=0$ par définition. Sinon $\varrho(x_0, \omega)$ est l'unique racine >0 de l'équation

$$\sum_{r=0}^{m-1} |g_r(x_0, \omega; f')|\,\varrho^r = |g_m(x, \omega)|\,\varrho^m . \tag{2.3}$$

La fonction $\varrho(.,.)$ est définie et continue sur le domaine d'holomorphie de g. La fonction $x_0\mapsto\varrho(x_0, \omega)$ est lipschitzienne au voisinage des points où elle ne s'annule pas. Vu (2.2), l'expression $\varrho(x_0, \omega)\,|dx_0|$ est indépendante du choix de la cordonnée locale x_0. La fonction $x_0\mapsto\log\varrho(x_0, \omega)$ est sous-harmonique ou identique à $-\infty$.

3 - Le principal résultat

Nous supposons le polynôme caractéristique g holomorphe sur X et la fonction

$$x_0\mapsto\varrho_{x_0}=\sup_{\omega\in\Omega}\varrho(x_0, \omega) \tag{3.1}$$

localement bornée. Elle a alors les propriétés suivantes, qui sont importantes:

Cette fonction est continue.

La fonction $x_0 \to 1/\varrho_{x_0}$, tronquée par une constante arbitraire, est localement lipschitzienne.

(3.2) L'expression $ds = \varrho_{x_0}|dx_0|$ est indépendante du choix de la coordonnée locale x_0.

La fonction $x_0 \mapsto \log \varrho_{x_0}$ est sous-harmonique ou identique à $-\infty$.

Par suite, ds^2 est *riemannien, conforme à la structure analytique complexe de* Σ et *à courbure* $\leqslant 0$ sur la partie de Σ où $\varrho_{x_0} \neq 0$; cette dernière propriété est essentielle.

Définissons sur Σ

$$\operatorname{dist}(\sigma, \alpha) = \inf \int_\alpha^\sigma ds; \tag{3.3}$$

l'inégalité du triangle est vérifiée; mais $\operatorname{dist}(\sigma, \alpha) = 0$ n'implique pas $\sigma = \alpha$.

Théorème I. (Solution holomorphe au-dessus de la boule de Σ: $\{\sigma \in \Sigma;\ \operatorname{dist}(\sigma, \alpha) < \max f\}$).

Sous les hypothèses précédentes, le problème (1) *possède une unique solution holomorphe sur le domaine*

$$\Delta = \{(\sigma, \omega) \in \Sigma \times \Omega;\ \operatorname{dist}(\sigma, \alpha) < f(\omega)\}\ , \tag{3.4}$$

si les données a et v du problème (1) *sont holomorphes sur ce domaine* Δ.

4 - Exemples

Corollaire 1. Faisons les hypothèses suivantes: $\Omega = \boldsymbol{C}^n$; la fonction $\omega \mapsto g_r(x_0, \omega; \xi')$ est un polynôme de degré $m - r$; $(\forall x_0)$, $g_m(x_0) \neq 0$; les données a et v sont holomorphes sur X.

Alors la solution du problème (1) est holomorphe sur X.

Corollaire 2. Le Théorème I vaut sous les hypothèses suivantes: la variété Ω est le revêtement universel d'un domaine de $\boldsymbol{C}^n$; on munit $\boldsymbol{C}^n$ de la norme hermitienne $|x'| = [\sum_{j=1}^n |x_j|^2]^{1/2}$; on choisit pour f une fonction de classe C^0, vérifiant localement la condition de Lipschitz

$$|f(\omega) - f(\bar\omega)| \leq |\omega - \bar\omega|; \tag{4.1}$$

par exemple, $f(\omega)$ peut être la distance de ω à $\partial\Omega$ pour la métrique qu'induit localement dans Ω celle de $\boldsymbol{C}^n$; on note

$$G_r(x_0, \omega) = \max_{\{\xi';|\xi'|=1\}} |g_r(x_0, \omega; \xi')| ; \tag{4.2}$$

dans la définition de $\varrho(x_0, \omega)$ on remplace l'équation (2.3) par l'équation

$$\sum_{r=0}^{m-1} G_r(x_0, \omega)\,\varrho^r = |g_m(x, \omega)|\,\varrho^m \tag{4.3}$$

ce qui a pour effet d'augmenter $\varrho(x_0, \omega)$, donc dist (σ, α).

Note. La métrique que (3.1) et (3.2) définissent sur Σ est toujours à courbure totale ≤ 0.

Cas particulier. Si $m = 2$ et si

$$g(x, \xi) = \xi_0^2 + c(x_0, \omega) \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 , \tag{4.4}$$

alors (4.3) définit

$$\varrho(x_0, \omega) = |c(x_0, \omega)|^{1/2} . \tag{4.5}$$

5 - Un autre résultat

Citons, sans l'énoncer, un Théorème II construisant des germes, solutions du problème (1), holomorphes au-dessus d'arcs de Σ ayant α pour origine.

§ 2 - Un apercu des preuves

Les preuves de ces deux théorèmes reposent sur la notion de germe holomorphe et sur la variante suivante du théorème de Cauchy-Kowalewski.

6 - Une variante du théorème de Cauchy-Kowalewski

Notations 6. Soit $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \boldsymbol{C}^{n+1}$.

Etant données $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, $\tau \in \dot{\boldsymbol{R}}_+ =]0, \infty[$, $\theta \in]0, 1[$, définissons le polydisque

$$\Pi = \{z \in \boldsymbol{C}^{n+1};\ \zeta_k |z_k| < \tau,\ k = 0, \ldots, n\} \tag{6.1}$$

et son homothétique dans le rapport θ

$$\Pi_\theta = \{z \in \boldsymbol{C}^{n+1};\ \zeta_k |z_k| < \theta\tau,\ k = 0, \ldots, n\} \subset \Pi\,. \tag{6.2}$$

Soit un opérateur différentiel, d'ordre m, holomorphe sur Π_θ, ne contenant pas la dérivation D_0^m

$$L(z, D) = \sum_{|\lambda| \leqq m} L_\lambda(z) D^\lambda\,, \tag{6.3}$$

où $$\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \boldsymbol{N}^{n+1}\,, \quad |\lambda| = \lambda_0 + \ldots + \lambda_n\,,$$

$$L_{(m,0,\ldots,0)} = 0\,, \quad D^\lambda = D_0^{\lambda_0} \ldots D_n^{\lambda_n}\,, \quad D_k = \partial/\partial z_k\,.$$

Supposons les coefficients principaux de L, c'est-à-dire les L_λ tels que $|\lambda| = m$, holomorphes et bornés sur Π; définissons la fonction spectrale de L

$$H_\Pi(\zeta) = \sum_{|\lambda| = m} \sup_{z \in \Pi} |L_\lambda(z)| \zeta^\lambda; \tag{6.4}$$

c'est donc un polynôme en ζ, homogène de degré m.

Proposition 6 (Cauchy-Kowalewski). Supposons l'opérateur L holomorphe sur Π_θ. Soient v et w deux fonctions holomorphes sur Π_θ. Soit à trouver une fonction numérique u, holomorphe à l'origine, telle que

$$\begin{cases} D_0^m u(z) = L(z, D) u(z) + v(z); \\ u(z) - w(z) \text{ s'annule } m \text{ fois avec } z_0\,. \end{cases} \tag{6.5}$$

Ce problème possède une unique solution u; elle est holomorphe sur le domaine

$$\Delta = \{z \in \boldsymbol{C}^{n+1};\ \sum_{k=0}^{n} \zeta_k |z_k| < \theta\tau\}\,, \tag{6.6}$$

si

$$H_\Pi(\zeta) \leqq (1 - \theta) \zeta_0^m\,. \tag{6.7}$$

Note. Si les hypothèses sont vérifiées sauf (6.7), elles le restent quand on augmente ζ_0, ce qui permet de satisfaire (6.7), puisque H_Π est de degré $m - 1$ en ζ_0.

La seule conséquence de la Proposition 6 que nous emploierons est le lemme suivant, qui utilise les Notations 6.

Lemme 6. Soit un opérateur L et une fonction v holomorphes sur Π. Soit un germe w holomorphe dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$ sur le polydisque de dimension n

$$\Pi'_0 = \{z \in \boldsymbol{C}^{n+1};\ z_0 = 0,\ \zeta_j |z_j| < \theta\tau,\ \ j = 1, \dots, n\}\ . \tag{6.8}$$

Il existe alors un germe u, solution du problème (6.5), holomorphe sur le disque

$$\{z \in \boldsymbol{C}^{n+1};\ \zeta_0 |z_0| < \theta\tau,\ z_1 = \dots = z_n = 0\}\ , \tag{6.9}$$

si la condition (6.7) est satisfaite.

7 - Elimination de la fonction spectrale H_Π et introduction de la racine $\varrho > 0$ de l'équation (2.3)

Notations 7.1. Soit une partie compacte Γ de Σ et une application continue $s\colon \Gamma \to \dot{\boldsymbol{R}}_+ =]0, \infty[$.
Notons $S = \{(\gamma, \omega) \in X;\ \gamma \in \Gamma,\ s(\gamma) < f(\omega)\}$ et $\bar{S}$ son adhérence: $\bar{S} = \{(\gamma, \omega) \in X;\ \gamma \in \Gamma,\ s(\gamma) \leqq f(\omega)\}$.

Notations 7.2. Un couple $(\bar{\varepsilon}, \eta)$ est constitué par: une constante $\bar{\varepsilon} > 0$; une fonction continue, croissante, nulle à l'origine $\eta\colon [0, \bar{\varepsilon}] \to \boldsymbol{R}_+$.

Notations 7.3. D'après H. Poincaré, Σ peut être identifié soit à $\boldsymbol{C}$, soit à un disque de $\boldsymbol{C}$. A la seule fin de simplifier les formules, nous faisons cette identification: nous identifions $\sigma \in \Sigma \subset \boldsymbol{C}$ à son affixe dans $\boldsymbol{C}$.

Proposition 7. La donnée de f, Γ et s, à valeurs > 0, et la donnée de a et v, holomorphes sur $\bar{S}$, définit un couple $(\bar{\varepsilon}, \eta)$ ayant la propriété suivante: Pour tout $\alpha \in \Gamma$, tout $\varepsilon > 0$ et tout germe w holomorphe dans X sur

$$\alpha \times \{\omega \in \Omega;\ s(\alpha) < f(\omega)\}$$

il existe une unique solution du problème (1) holomorphe sur la partie ouverte de X

$$\Delta = \{(\sigma, \omega) \in X;\ \ |\sigma - \alpha| < \varepsilon, [\varrho(\alpha, \omega) + \eta(\varepsilon)]\cdot|\sigma - \alpha| < f(\omega) - s(\alpha)\}\ .$$

Note. Pour que Δ soit défini, il faut que $0 < \varepsilon \leqq \bar{\varepsilon}$ et que $s(\alpha) < f(\omega)$.

Preuve. On applique le Lemme 6 dans un repère local hermitien subissant un déplacement approprié. On construit d'abord des germes solutions du problème (1), holomorphe chacun sur un segment rectiligne d'extrémités (α, ω) et $(\sigma, \omega) \in \Delta$. On déduit la Proposition 7 de l'existence de ces germes.

8 - Fin de la preuve des théorèmes I et II

On applique la Proposition 7 en déplaçant α sur un arc compact $\Gamma \subset \Sigma$ et l'on établit le Théorème II. On en déduit le Théorème I en traçant dans Δ des arcs, issus de $\alpha \times \Omega$, sur lesquels le Théorème II définit des germes holomorphes, solutions du problème (1).

Bibliographie

[1] Y. Hamada, J. Leray et T. Takeuchi, *Prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire*, C. R. Acad. Sc. Paris (1) **296** (1983), 435-437.

[2] Y. Hamada, J. Leray et T. Takeuchi, J. Math. Pures Appl. (à paraître).

[3] Y. Hamada et T. Takeuchi, *Sur le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy*, C. R. Acad. Sc. Paris (1) **295** (1982), 329-332.

[4] J. Leray, *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 389-429.

[5] D. Schiltz, (à paraître).

* * *