Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10*** (1984), 41-46

BENO ECKMANN (*)

Sur les groupes fondamentaux des surfaces closes

Cet exposé traite d'une caractérisation homologique des groupes fondamentaux des surfaces closes, due à l'auteur et à plusieurs de ses collaborateurs (voir [**7**] et [**8**] ainsi que d'autres références y citées). L'énoncé peut se faire en termes élémentaires, mais la démonstration se base sur des résultats profonds: d'un côté sur des théories de structure et de décomposition de groupes, initiées par Stallings et poursuivies par d'autres; et de l'autre côté sur diverses notations de «rang» pour les modules projectifs de type fini (sur l'anneau $\boldsymbol{Z}G$ d'un groupe G) et sur la caractéristique Eulerienne de G correspondante. Le premier aspect sera mentionné brièvement, le deuxième un peu plus en détail, en relation avec des théorèmes de Kaplansky et de Bass.

Une application seule sera donnée, concernant les extensions finies des groupes fondamentaux des surfaces closes; pour plus de détails et pour d'autres applications nous renvoyons à [**7**], [**8**] et [**9**].

1 - Les surfaces closes

Nous rappelons d'abord quelques propriétés élémentaires et bien connues des surfaces closes (= compactes sans bord) en nous bornant, uniquement pour simplifier l'exposé, au cas orientable. Σ_g désigne une surface de genre g, déterminée à l'homéomorphisme près par g; nous supposons toujours $g \geqslant 1$.

(a) Σ_g est un complexe cellulaire (CW-complexe) fini. Sa caractéristique Eulerienne $\chi(\Sigma_g) =$ somme alternée $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ des nombres α_i de 0-, 1-, et 2-cellules est égale à $2 - 2g$.

(*) Adresse: Eidgenössische Technische Hochschule, 101 Rämistrasse, 8092 Zurich, Schweiz.

(b) Le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_g)$ admet la présentation finie $\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1 \rangle$. Tout groupe G isomorphe à $\pi_1(\Sigma_g)$ pour g convenable sera dit « groupe de surface »; G rendu Abélien est libre de rang $2g$, donc $\cong \boldsymbol{Z}^{2g}$. Le groupe $\pi_1(\Sigma_g)$ n'a pas de torsion.

(c) La premier nombre de Betti $\beta_1(\Sigma_g)$ est égal à $2g$. Comme $\beta_0(\Sigma_g) = \beta_2(\Sigma_g) = 1$ on retrouve $\chi(\Sigma_g)$ par la formule d'Euler-Poincaré $\chi(\Sigma_g) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 2 - 2g$.

(d) Le revêtement universel $\tilde{\Sigma}_g$ de Σ_g est le plan $\boldsymbol{R}^2$, et le groupe de revêtement, isomorphe a $\pi_1(\Sigma_g)$, peut se réaliser comme groupe de mouvements sans rotations, à domaine fondamental compact, du plan Euclidien ($g = 1$) ou hyperbolique ($g \geqslant 2$).

(e) Tout revêtement fini, à m feuillets, de Σ_g est une surface Σ_h. En d'autres termes, tout sous-groupe H d'indice fini m de $\pi_1(\Sigma_g)$ est un groupe de surface $H \cong \pi_1(\Sigma_h)$, et on a $2 - 2h = m(2 - 2g)$. Nous reviendrons à la fin sur la question de la réciproque: Toute extension d'indice fini et sans torsion d'un groupe de surface est-elle un groupe de surface?

(f) Tout revêtement infini $\bar{\Sigma}_g$ de Σ_g est une surface ouverte (= non-compacte sans bord), et $\pi_1(\bar{\Sigma}_g)$ est un groupe libre. En d'autres termes, tout sous-groupe H d'indice infini dans $\pi_1(\Sigma_g)$ est libre.

2 - Dualité de Poincaré

Comme le revêtement universel $\tilde{\Sigma}_g = \boldsymbol{R}^2$ de Σ_g est contractile, Σ_g est asphérique, donc un complexe d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$ pour son groupe fondamental $G = \pi_1(\Sigma_g)$. Par conséquent l'homologie du groupe G au sens de l'algèbre homologique est isomorphe à celle de Σ_g, et de même pour la cohomologie, pour tous les G-modules de coefficients, et pour les opérations en (co-)homologie etc. En particulier, on a pour le groupe G la dualité de Poincaré de dimension 2, bien connue pour les variétés closes (de n'importe quelle dimension).

On peur ainsi considérer, de façon purement algébrique, des groupes G vérifiant la dualité de Poincaré de dimension n (orientable), appelés PD^n-groupes tout court. Cette dualité dit qu'on a pour la (co-)homologie de G des isomorphismes

$$H^i(G; A) \cong H_{n-i}(G; A)$$

pour tout entier i et tout G-module A, naturels en A. Le groupe fondamental d'une variété close, asphérique, à n dimensions est évidemment un PD^n-groupe; on ne sait pas, en général, si la réciproque est vraie. La caractérisation homologique des groupes $\pi_1(\Sigma_g)$, qui fait l'objet de cet exposé, affirme qu'elle est vraie pour $n = 2$: *Tout PD^2-groupe est un groupe de surface.*

Remarque. On voit facilement que le seul PD^1-groupe est le groupe cyclique infini, donc isomorphe à π_1 (cercle).

3 - Le cas $\beta_1(G) > 0$

Dans [7] l'énoncé ci-dessus est démontré sous l'hypothèse supplémentaire que le PD^2-groupe G vérifie $\beta_1(G) > 0$. Notons que, dans le cas orientable considéré ici, $\beta_1(G)$ est *pair*; la démonstration purement homologique est la même que pour les variétés closes de dimension $n = 4k + 2$ (voir p. ex. [6], p. 301). Posons $\beta_1(G) = 2g$, et l'affirmation est $G \cong \pi_1(\Sigma_g)$.

L'hypothèse $\beta_1(G) > 0$ sert à décomposer G en « extension HNN », $G = G_{1*_{H,p}}$ où H est de type fini. L'indice de H dans G est infini; or la propriété (f) ci-dessus est valable pour les PD^2-groupes aussi bien que pour les surfaces closes, d'après un théorème de Strebel [11]. H est donc libre de type fini. Le procédé expliqué dans [7] permet de déduire de $G = G_{1*_{H,p}}$ une autre décomposition où H est plus petit, soit en extension HNN ou en produit libre amalgamé $G = G_1 *_H G_2$, $G_1 \neq H \neq G_2$. On arrive ainsi à des décompositions $G = G_{1*_{C,p}}$ ou $G = G_1 *_C G_2$ avec C cyclique infini. C'est pour des PD^2-groupes de cette structure particulière qu'on réussit finalement à montrer que ce sont des groupes de surfaces; on passe par des surfaces compactes à bord, orientables ou non-orientables, et on identifie leurs bords de façon adéquate.

4 - Caractéristique Eulerienne, modules projectifs de type fini

Nous allons discuter avec un peu plus de détail la démonstration du fait (Eckmann-Linnell [8]) que *pour un PD^2-groupe G le premier nombre de Betti $\beta_1(G)$ n'est jamais nul.* On est donc toujours dans le cas de la Section 3, ce qui démontre que tout PD^2-groupe G est un groupe de surface (donc de présentation finie et admettant une résolution libre finie sur $\mathbf{Z}G$).

4.1 – Tout PD^n-groupe G est de type (FP) et de dimension cohomologique $\operatorname{cd} G = n$.

En effet, l'isomorphisme $H^i(G; A) = H_{n-i}(G; A)$ naturel en A entraîne que les groupes de cohomologie commutent avec les limites directes en A. Cela est possible, d'après les critères de finitude [**4**], [**5**] seulement s'il existe une résolution projective $\ldots \to P_i \to P_{i-1} \to \ldots \to P_0 \twoheadrightarrow \boldsymbol{Z}$ sur $\boldsymbol{Z}G$ où tous les P_i sont de type fini. En outre $H^i(G; A) = 0$ pour $i \neq n$, et $H^n(G; \boldsymbol{Z}) = H_0(G; \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z}$, d'ou cd $G = n$, et il existe une résolution projective $0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \twoheadrightarrow \boldsymbol{Z}_0$ de type fini – c'est ce qu'on entend par « type (FP) ».

Notons que réciproquement (voir [**3**]) les propriétés (a) type (FP), et (b) $H^i(G; \boldsymbol{Z}G) = 0$ pour $i \neq n$, $H^n(G; \boldsymbol{Z}G) = \boldsymbol{Z}$, entraînent que G est un PD^n-groupe.

4.2 – Le nombre de Betti $\beta_i(G)$ d'un tel groupe est le rang sur $\boldsymbol{Z}$ du groupe Abélien de type fini $H_i(G; \boldsymbol{Z})$; de la dualité de Poincaré on tire $\beta_i(G) = \beta_{n-i}(G)$, donc en particulier $\beta_0(G) = \beta_n(G) = 1$. L'homologie $H_*(G; \boldsymbol{Z})$ se calcule à l'aide du complexe de groupes Abéliens libres

$$0 \to \boldsymbol{Z} \otimes_G P_n \to \ldots \to \boldsymbol{Z} \otimes_G P_0 \to 0 .$$

La caractéristique Eulerienne

$$\chi(G) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rang} (\boldsymbol{Z} \otimes_G P_i)$$

est égale, d'après un raisonnement classique, à $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i(G)$ donc indépendante de la résolution choisie. On l'appelle « caractéristique Eulerienne homologique »; il existe d'autres définitions de $\chi(G)$ basées sur des notions différentes de « rang » associé à un $\boldsymbol{Z}G$-module projectif de type fini, et on ne sait pas si elles coincident - une d'entre elles est utilisée dans **4.4** ci-dessous. Comme on s'intéresse ici à $\beta_1(G)$ il s'agira de la caractéristique $\chi(G)$ homologique.

4.3 – Soit G un PD^2-groupe, et

$$0 \to P \to \boldsymbol{Z}G^d \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{Z}G \twoheadrightarrow \boldsymbol{Z}$$

une (FP)-resolution; on a utilisé le fait qu'on peut toujours choisir $P_0 = \boldsymbol{Z}G$, P_1 libre de type fini, et $P = P_2$ est projectif de type fini. Le dual de cette résolution, obtenu en appliquant $\operatorname{Hom}_G(-, \boldsymbol{Z}G) = -^*$ est

$$\boldsymbol{Z} \twoheadleftarrow P^* \xleftarrow{\delta} \boldsymbol{Z}G^d \leftarrow \boldsymbol{Z}G \leftarrow 0 .$$

Cette suite est exacte: cela exprime simplement que $H_i(G; \boldsymbol{Z}G) = 0$ pour

$i \neq 2$ et $H^2(G; \boldsymbol{Z}G) = \boldsymbol{Z}$. Il' s'agit donc d'une autre résolution. On a

$$P^*/\delta \boldsymbol{Z}G^d \cong \boldsymbol{Z}G/\partial \boldsymbol{Z}G^d ,$$

donc d'après le lemme de Schanuel

$$P^* \oplus \partial \boldsymbol{Z}G \cong \boldsymbol{Z}G \oplus \delta \boldsymbol{Z}G^d .$$

Il en résulte une surjection $\boldsymbol{Z}G^{d+1} \twoheadrightarrow P^*$ de noyau $N \neq 0$, donc $P^* \oplus N \cong \boldsymbol{Z}G^{d+1}$ avec N projectif de type fini. On a ainsi

$$\begin{aligned} \chi(G) &= \operatorname{rang}(\boldsymbol{Z} \otimes_G P^*) - d + 1 \\ &= d + 1 - \operatorname{rang}(\boldsymbol{Z} \otimes_G N) - d + 1 \\ &= 2 - \operatorname{rang}(\boldsymbol{Z} \otimes_G N) . \end{aligned}$$

4.4 – On ne sait pas, en général, si $N \neq 0$ entraîne $\boldsymbol{Z} \otimes_G N \neq 0$. Dans notre cas on peut avoir recours à une autre notion de rang associé à un module projectif N de type fini, le « rang de Kaplansky » $K(N)$. Il est défini comme suit: on choisit M tel que $N \oplus M$ soit libre de type fini, et on considère l'endomorphisme idempotent φ de $N \oplus M$ qui est l'identité sur N et 0 sur M; le coefficient de $1 \in G$ dans la trace de φ est indépendant du choix de M et de la base dans $N \oplus M \cong \boldsymbol{Z}G^n$. Si N est libre, on a évidemment $K(N) = \operatorname{rang}_{\boldsymbol{Z}G} N = \operatorname{rang}(\boldsymbol{Z} \oplus_G N)$, mais en général le rang au milieu n'est pas défini et on ne sait pas si les deux autres rangs associés à N coincident. Un théorème de Kaplansky (voir [**10**], p. ex.) dit que pour tout module projectif de type fini N sur $\boldsymbol{Z}G$ (G arbitraire) $K(N)$ est $\geqslant 0$, et $= 0$ seulement si $N = 0$.

Supposons d'abord que P, donc P^* est *libre*. Alors $P^* \oplus N \cong \boldsymbol{Z}G^{d+1}$ entraîne $\operatorname{rang}(\boldsymbol{Z} \otimes_G N) = d + 1 - \operatorname{rang}_{\boldsymbol{Z}G} P^* = K(N)$, d'où $\operatorname{rang}(\boldsymbol{Z} \otimes_G N) > 0$ et $\chi(G) \leqslant 1$. Par conséquent $\beta_1(G) \geqslant 1$.

Dans le cas général P^* *projectif* ce raisonnement ne joue pas. Mais un théorème profond de Bass [**1**] dit que si, pour un module projectif de type fini sur $\boldsymbol{Z}G$, les deux rangs ne sont pas égaux alors le groupe G contient un sous-groupe H isomorphe à $\boldsymbol{Z}[1/p]$ pour un certain premier p. D'autre part on montre de façon algébrique-homologique que pour tout PD^2-groupe G les analogues de (e) et (f) en Section 1 sont valables: Si $H \subset G$ est d'indice fini, c'est un PD^2-groupe, et s'il est d'indice infini, c'est un groupe libre (théorème de Strebel [**11**]). Comme le groupe additif $\boldsymbol{Z}[1/p]$ n'est ni un PD^2-groupe ni libre, on a donc

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{Z} \otimes_G N) = K(N) .$$

On en tire comme ci-dessus que $\beta_1(G)$ est $\geqslant 1$.

5 - Une application

Soit $H = \pi(\Sigma_h)$ un groupe de surface, et $G \supset H$ une extension d'indice fini et sans torsion.

Un résultat général [**3**] dit que toute extension $G \supset H$ finie sans torsion d'un PD^n-groupe H est un PD^n-groupe; il suffit de montrer que les propriétés caractéristiques (a) et (b) en Section 4.1 se transfèrent de H à G. Le groupe G ci-dessus est donc un PD^2-groupe, et d'après notre résultat principal un groupe de surface: *Toute extension finie et sans torsion d'un groupe de surface est un groupe de surface.* Il est intéressant de relier ce fait au « prolème de réalisation » de Nielsen, voir par exemple [**9**].

Bibliographie

[**1**] H. Bass, *Euler characteristic and characters of discrete groups,* Invent. Math. **35** (1976), 155-196.

[**2**] R. Bieri, *Gruppen mit Poincaré-Dualität,* Comment. Math. Helv. **47** (1972), 373-396.

[**3**] R. Bieri and B. Eckmann, *Groups with homological duality generalizing Poincare duality,* Invent. Math. **20** (1973), 103-124.

[**4**] R. Bieri and B. Eckmann, *Finiteness properties of duality groups,* Comment. Math. Helv. **49** (1974), 74-83.

[**5**] K. S. Brown, *Homological criteria for finiteness,* Comment. Math. Helv. **50** (1975), 129-135.

[**6**] A. Dold, *Lectures on algebraic topology,* Springer, Berlin 1980.

[**7**] B. Eckmann and H. Müller, *Poincaré duality groups of dimension two,* Comment. Math. Helv. **55** (1980), 510-520.

[**8**] B. Eckmann and P. Linnell, *Poincaré duality groups of dimension two,* II, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 111-114.

[**9**] B. Eckmann and H. Müller, *Plane motion groups and virtual Poincaré duality of dimension two,* Invent. Math. **69** (1982), 293-310.

[**10**] S. Montgomery, *Left and right inverses in group algebras,* Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 539-540.

[**11**] R. Strebel, *A remark on subgroups of infinite index in Poincaré duality groups,* Comment. Math. Helv. **52** (1977), 317-324.