Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10*** (1984), 81-90

André Lichnerowicz (*)

# Feuilletages, géométrie riemannienne et géométrie symplectique

Le but de cet exposé est de présenter des propriétés géométriques intéressantes que possèdent les feuilletages lagrangiens, ou plus généralement une large classe de feuilletages isotropes, d'une variété symplectique.

A cet effet, nous serons amenés à introduire des éléments géométriques généraux concernant les variétés différentiables munies d'un feuilletage, en les précisant dans le cas où la variété considérée est munie d'une métrique riemannienne.

## I - FEUILLETAGES ET GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

### 1 - Feuilletages et connexion adaptée

(a) Soit $M$ une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension $m$ et classe $C^\infty$. Tous les éléments introduits sont supposés de classe $C^\infty$. Soit $\mathscr{F}$ un *feuilletage* de $M$ de codimension $q$; les feuilles sont de dimension $p = m - q$. Le fibré $T\mathscr{F} \to M$ *tangent au feuilletage* est le sous-fibré vectoriel de $TM$ défini par les vecteurs tangents aux feuilles; ses fibres sont donc de dimension $p$. Le fibré vectoriel quotient $\nu\mathscr{F} = TM/T\mathscr{F}$ est *le fibré transverse* à $\mathscr{F}$; ses fibres sont de dimension $q$. On a la suite exacte de fibrés vectoriels sur $M$

(1.1) $$0 \to T\mathscr{F} \to TM \to \nu\mathscr{F} \to 0 .$$

(*) Adresse: Collège de France, 11 Pl. M. Berthélot, 75731 Paris, France.

Le dual d'un fibré vectoriel est le fibré des homomorphismes dans le fibré linéaire trivial. On déduit de (1.1) par dualité la suite exacte concernant les fibrés duaux

$$0 \to \nu^* \mathscr{F} \to T^* M \to T^* \mathscr{F} \to 0 , \tag{1.2}$$

$\nu^* \mathscr{F}$ est le sous-fibré de $TM$ défini par les covecteurs de $M$ nuls pour les éléments de $T\mathscr{F}$ et l'on a $T^* \mathscr{F} = T^* M / \nu^* \mathscr{F}$.

(b) Les feuilles de $\mathscr{F}$ sont les variétés intégrales maximales connexes d'un système de Pfaff complètement intégrable, partout de rang $q$ sur $M$. Une carte $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$ $(A, B, \ldots = 1, \ldots, m; \quad a, b, \ldots = 1, \ldots, q; i, j, \ldots = q+1, \ldots, m)$ de $M$, de domaine $U$, est dite *adaptée au feuilletage* si, dans $U$, $x^a =$ const. le long des feuilles. On peut munir $U$ d'un champ de *corepéres adaptés* $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$ tels que $\theta^a = 0$ définit $\mathscr{F}$ sur $U$. On considère sur $M$ des recouvrements localement finis dont chaque domaine est muni d'une carte adaptée ou d'un champ de corepères adaptés. Si $U'$ est muni du champ $\{\theta^{A'}\}$, on a sur $U \cap U' \neq \emptyset$

$$\theta^{a'} = \mathbf{A}_a^{a'} \theta^a \qquad \theta^{j'} = \mathbf{A}_b^{j'} \theta^b + \mathbf{A}_j^{j'} \theta^j \tag{1.3}$$

où la matrice $(\mathbf{A}_A^{A'})$ et la matrice inverse $(\mathbf{A}_{A'}^{A})$ sont telles que $\mathbf{A}_i^{a'} = 0$, $\mathbf{A}_{i'}^{a} = 0$.

(c) Soit $\Gamma$ une connexion linéaire *sans torsion* de $M$; nous notons $\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C$ sa 1-forme de connexion sur $U$ rapportée à $\{\theta^A\}$. D'après (1.3), on a sur $U \cap U'$

$$\omega_{i'}^{a'} = \mathbf{A}_a^{a'} \mathbf{A}_{i'}^{i} \omega_i^a . \tag{1.4}$$

La connexion $\Gamma$ est dite *adaptée au feuilletage* [**5**] si $\omega_i^a = 0$ pour tout domaine du recouvrement. Soit $\overset{*}{\Gamma}$ une connexion linéaire arbitraire sans torsion de $M$ et $\overset{*}{\omega}{}_B^A = \overset{*}{\gamma}{}_{BC}^A \theta^C$ sa 1-forme de connexion sur $U$. Sur chaque $U$ introduisons un tenseur $T_U$ de type (1,2) covariantement symétrique, tel que $T_{iA}^a = \overset{*}{\gamma}{}_{iA}^a$ A partir d'une partition de l'unité, on voit qu'il existe globalement sur $M$ un tenseur $T$ jouissant des mêmes propriétés. La connexion $\Gamma = \overset{*}{\Gamma} - T$ est une connexion adaptée à $\mathscr{F}$. Ainsi $(M, \mathscr{F})$ admet une infinité de connexions adaptées. Les coefficients d'une telle connexion vérifient $\gamma_{iA}^a = 0$. En particulier, dans une carte adaptée, les coefficients $\Gamma_{BC}^A$ vérifient $\Gamma_{iA}^a = 0$, où ces coefficients sont symétriques par rapport aux deux indices inférieurs.

Une connexion *adaptée* $\Gamma$ induit sur le fibré transverse $\nu\mathscr{F}$ une connexion $\nu\Gamma$, dont la 1-forme de connexion sur $U$ est $\omega_a^b$. On a

Proposition. *La connexion $\nu\Gamma$ induite sur $\nu\mathscr{F}$ par une connexion adaptée $\Gamma$ est canonique au sens de Bott.*

Si $Z$ est une section de $\nu\mathscr{F} \to M$, il existe une section $Y$ de $TM \to M$ telle que sa projection $\nu Y$ sur $\nu\mathscr{F}$ soit $Z$. Dire que $\nu\Gamma$ est canonique, c'est dire que pour tout champ de vecteurs tangentiel $X$, $\nu\Gamma$ définit une dérivée covariante tangentielle $\nabla_X Z$ telle que

$$\nabla_X Z = \nu[X, Y]\,. \tag{1.5}$$

On a en effet

$$\nabla_i Y^a = \partial_i Y^a + \Gamma^a_{Ai} Y^A = \partial_i Y^a\,,$$

ce qui traduit (1.5). Pour toute connexion adaptée rapportée à des corepères adaptés $\{\theta^A\}$, les coefficients $\gamma^a_{bi}$ sont déterminés de manière unique.

(d) Soit $\Omega^A_B = \frac{1}{2} R^A{}_{B,CD}\, \theta^C \wedge \theta^D$ la 2-forme de courbure sur $U$ de la connexion adaptée $\Gamma$. On a immédiatement puisque $\omega^a_i = 0$

$$\Omega^a_i = 0\,, \qquad \Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b\,.$$

En termes du tenseur de courbure, on a $R^a_{i,CD} = 0$ et la courbure de $\nu\Gamma$ vérifie

$$R^a{}_{b,ij} = 0\,, \qquad R^a{}_{b,ic} = R^a{}_{c,ib}\,. \tag{1.6}$$

## 2 - Connexion adaptée déduite d'une connexion riemannienne

Soit $g$ une métrique riemannienne arbitraire sur $(M, \mathscr{F})$ et notons $\overset{*}{\Gamma}$ la connexion riemannienne de $(M, g)$. Le feuilletage $\mathscr{F}$ et la métrique $g$ définissent sur $M$ d'une part un 2-tenseur covariant symétrique (métrique induite sur les feuilles), d'autre part un 2-tenseur contravariant symétrique, de composantes respectives dans tout corepère adapté $g_{ij}$ et $g^{ab}$

(a) Rapportons les domaines $U$ à des corepères *$g$-orthonormés* adaptés $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\}$. Sur $U \cap U' \neq \emptyset$, on a

$$\theta^{a'} = \mathbf{B}^{a'}_a \theta^a\,, \qquad \theta^{i'} = \mathbf{B}^{i'}_i \theta^i\,, \tag{2.1}$$

où les matrices $(\mathbf{B}^{a'}_a)$ et $(\mathbf{B}^{i'}_i)$ sont orthogonales. La métrique permet une décomposition complète selon les types normaux et tangentiels. Si $\Gamma$ est une connexion adaptée à $\mathcal{F}$ définie à partir de $\overset{*}{\Gamma}$, il est aisé de voir que l'on a nécessairement sur $U$

$$\gamma^a_{iB} = 0\,, \qquad \gamma^a_{Bi} = \overset{*}{\gamma}{}^a_{Bi} - \overset{*}{\gamma}{}^a_{iB}\,. \tag{2.2}$$

En procédant comme précédemment, on peut encore astreindre le tenseur $T$ qui définit $\Gamma$ à partir de $\overset{*}{\Gamma}$ à la condition $T^a_{bc} = 0$ pour tout $U$. On a alors

$$\gamma^a_{bc} = \overset{*}{\gamma}{}^a_{bc}\,. \tag{2.3}$$

D'après (2.2) et (2.3), $\Gamma$ induit alors sur le fibré vectoriel normal une connexion qui coïncide avec celle introduite par Guelorget-Joubert [**3**] et utilisée par Reinhart. On peut enfin astreindre $T$ à la condition supplémentaire $T^i_{AB} = 0$ et l'on a

$$\gamma^i_{AB} = \overset{*}{\gamma}{}^i_{AB}\,. \tag{2.4}$$

La connexion $\Gamma$ de $M$, ainsi définie d'une manière unique à partir de $\mathcal{F}$ et de $g$, est dite *la connexion adaptée déduite de la connexion riemannienne* $\overset{*}{\Gamma}$.

(b) Soit $K$ le champ des $q$-plans de $M$ $g$-orthogonaux à $\mathcal{F}$. D'après Reinhard [**6**] la second forme fondamentale du champ $K$ est la 2-forme symétrique sur les vecteurs de $K$ dont les valeurs sont des vecteurs tangents à $\mathcal{F}$ et qui a pour composantes sur $U$ en corepères *orthonormés* adaptés

$$Q^i_{ab} = \tfrac{1}{2}(\overset{*}{\gamma}{}^i_{ab} + \overset{*}{\gamma}{}^i_{ba}) = -\tfrac{1}{2}(\overset{*}{\gamma}{}^a_{ib} + \overset{*}{\gamma}{}^b_{ia})\,. \tag{2.5}$$

Si la seconde forme de $K$ est nulle, le champ est dit *totalement géodésique*: pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que toute géodésique de $(M, g)$ tangente à $K$ en un point reste tangente à $K$ en chacun de ses points.

## 3 - Le tenseur $Q$

(a) Il est naturel, pour des raisons de tensorialité, de substituer à cette seconde forme fondamentale de $K$, le 3-tenseur $Q$ section de $(\nu\mathcal{F})^2 \otimes T^*\mathcal{F} \to M$ de composantes $Q^{ab}_i$ en corepères adaptés, avec $Q^{ab}_i = Q^i_{ab}$ si ces corepères sont orthonormés. D'après (2.1) on peut écrire en corepères *orthonormés* adaptés

$$Q^{ab}_i = \tfrac{1}{2}(\gamma^a_{bi} + \gamma^b_{ai})\,. \tag{3.1}$$

Il en résulte:

Lemme 1. *On a, en corepères adaptés arbitraires*

$$Q_i^{ab} = \tfrac{1}{2}\nabla_i g^{ab}\,, \tag{3.2}$$

*où* $\nabla$ *est la dérivation covariante dans une connexion adaptée* $\Gamma$ *définie à partir de* $\overset{*}{\Gamma}$.

D'après le caractère tensoriel des deux membres de (3.2), il suffit de vérifier cette relation en corepères orthonormés adaptés. Pour de tels corepères, on a

$$\nabla_i g^{ab} = \gamma^a_{ci} g^{cb} + \gamma^b_{ci} g^{ac} = \gamma^a_{bi} + \gamma^b_{ai} = 2Q_i^{ab}\,.$$

(b) Dans une carte adaptée $\{x^A\} = \{x^a, x^i\}$, on a

$$\nabla_i g^{ab} = \partial_i g^{ab}\,.$$

Il en résulte que le tenseur $Q$ ne dépend que du tenseur $g^{ab}$. On a [**5**]

Lemme 2. *Pour que le champ g-orthogonal* $K$ *soit totalement géodésique, c'est-à-dire pour que* $Q = 0$, *il faut et il suffit que, dans toute carte adaptée, les composantes du tenseur* $g^{ab}$ *ne dépendent que des coordonnées transverses* $x^c$.

S'il existe sur $(N, \mathscr{F})$ une métrique $g$ jouissant relativement à $\mathscr{F}$ de cette propriété, on dit que $(M, \mathscr{F})$ admet une métrique « de type fibré » (voir [**4**])

(c) *Supposons qu'il en soit ainsi.* La connexion $\nu\Gamma$ définie sur le fibré vectoriel $\nu\mathscr{F}$ par la connexion adaptée $\Gamma$ déduite de la connexion riemannienne, vérifie en corepères orthonormés adaptés

$$\gamma^a_{bi} + \gamma^b_{ai} = 0\,, \tag{3.3}$$

et d'après (2.3)

$$\gamma^a_{bc} + \gamma^b_{ac} = 0\,,$$

soit $\omega^a_b + \omega^b_a = 0$. Le groupe d'holonomie $G_{\nu\Gamma}$ de la connexion $\nu\Gamma$ peut être considéré comme un sous-groupe de $O(q)$ et, par suite, est relativement compact dans $GL(q)$. En particulier d'après (3.3), si $\Sigma$ est une feuille de $\mathscr{F}$, le groupe d'holonomie de $\nu\mathscr{F}|_\Sigma \to \Sigma$, défini par la restriction de $\nu\Gamma$, qui n'est autre que *le groupe d'holonomie infinitésimale* $G_\Sigma$ de la feuille est *relativement compact.*

Inversement, supposons qu'il existe sur $(M, \mathscr{F})$ une connexion adaptée $\Gamma'$ induisant sur $\nu\mathscr{F}$ la connexion $\nu\Gamma'$ telle que son groupe d'holonomie $G_{\nu\Gamma'}$ soit relativement compact dans $GL(q)$. S'il en est ainsi, on peut supposer que $G_{\nu\Gamma'}$, est contenu dans $O(q)$, ce qui définit une métrique sur les fibres de $\nu\mathscr{F} \to M$. Soit $g$ une métrique riemannienne de $M$ induisant cette métrique. Pour des corepères $g$-orthonormés adaptés, on a en particulier pour $\Gamma'$

$$\gamma'^{a}_{bi} + \gamma'^{b}_{ai} = 0 .$$

Si $\Gamma$ est la connexion adaptée déduite de la connexion riemannienne de $g$, on a $\gamma^{a}_{bi} = \gamma'^{a}_{bi}$ et par suite, pour le métrique $g$, on a $Q = 0$. Il vient

Théorème. *Pour qu'il existe sur* $(M, \mathscr{F})$ *une métrique riemannienne* $g$ *telle que* $Q = 0$, *c'est-à-dire telle que le champ* $K$, $g$*-orthogonal à* $\mathscr{F}$, *soit totalement géodésique, il faut et il suffit qu'il existe sur* $(M, \mathscr{F})$ *une connexion adaptée telle que le groupe d'holonomie de la connexion induite sur* $\nu\mathscr{F}$ *soit relativement compact. En particulier, s'il en est ainsi, les groupes d'holonomie infinitésimale de toutes les feuilles sont relativement compacts.*

## II - VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE ET FEUILLETAGE ISOTROPE

### 4 - Connexions linéaires plates sur les feuilles

(a) Soit $(M, F)$ une *variété symplectique* de dimension $m = 2n$ et 2-forme fondamentale $F$; $\Lambda$ est son 2-tenseur contravariant de structure. Si $P$ est un plan de $M$, nous notons $P^s$ son orthogonal symplectique; $P$ est dit isotrope (resp. coisotrope) si $P \subset P^s$ (resp. $P^s \subset P$); il est lagrangien (et donc de dimension $n$) si $P = P^s$.

Soit $\mathscr{G}$ un *feuilletage coisotrope* de $(M, F)$ de codimension $q$. On voit aisément que le champ des orthogonaux symplectiques (donc isotropes) des plans de $\mathscr{G}$ est intégrable et on définit ainsi *un feuilletage isotrope* $\mathscr{F} = \mathscr{G}^s$ de $M$, dont les feuilles sont de dimension $q$.

Un étude algébrique montre que le feuilletage isotrope $\mathscr{F}$ peut être défini par un recouvrement de $M$ dont chaque domaine $U$ est muni de *corepère adaptés distingués* $\{\theta^A\} = \{\theta^a, \theta^i\} = \{\theta^{a'}, \theta^{a''}, \theta^i\}$ $(a', b', \ldots = 1, \ldots, q;\ a'', b'', \ldots + 1, \ldots, 2r;$ $i, j, \ldots = 1, \ldots, q;\ a = a'$ ou $a'';\ q + r = n)$ où les $\{\theta^{a'}, \theta^I\}$ $(I = a''$ où $i)$ sont des corepères adaptés à $\mathscr{G}$. De $\mathscr{F} = \mathscr{G}^s$, on déduit que sur $U$

$$F_{ij} = 0\,, \qquad F_{a''j} = 0\,. \tag{4.1}$$

On a de même

$$(4.2) \qquad \Lambda^{a'b'} = 0\,, \qquad \Lambda^{a'b''} = 0\,,$$

soit $\Lambda^{a'b} = 0$. La non-dégénérescence de la 2-forme $F$ implique que la $(q \times q)$-matrice $(F_{a'i})$ est de rang $q$.

(b) Cela posé, soit $\Gamma'$ une connexion adaptée à $\mathscr{F}$ sur $(M, \mathscr{F})$. Nous supposons ici $U$ domaine d'une carte adaptée distinguée $\{x^A\} = \{x^{a'}, x^{a''}, x^i\}$. On a pour les coefficients de $\Gamma'$

$$\Gamma'^{a}_{iA} = 0\,,$$

et l'on déduit de (4.1) que dans *une telle carte*

$$(4.3) \qquad \nabla'_A F_{ij} = 0\,, \qquad \nabla'_i F_{Aj} = \nabla'_j F_{Ai}$$

et que l'on a

$$(4.4) \qquad \nabla'_k F_{a''j} = 0;$$

cherchons à substituer à la connexion $\Gamma'$ une autre connexion adaptée $\Gamma$ telle que

$$(4.5) \qquad \nabla_i F_{Aj} = 0\,.$$

Le tenseur $T$ par lequel $\Gamma$ doit différer de $\Gamma'$ vérifie $T^a_{iA} = 0$ sur $U$ et est tel que

$$(4.6) \qquad \nabla'_i F_{Aj} - T^B_{ji} F_{AB} = 0\,.$$

Le tenseur $T_U$ admettant sur $U$ les composantes

$$T^A_{ji} = \Lambda^{BA} \nabla'_i F_{Bj}\,, \qquad T^a_{jb} = 0\,,$$

répond sur $U$ à la question: il est symétrique en $i, j$ d'après (4.3), tel que

$$T^a_{ji} = \Lambda^{Ba} \nabla'_i F_{Bj} = \Lambda^{b'a} \nabla'_i F_{b'j} = 0$$

d'après (4.2), donc tel que $T^a_{jB} = 0$ et la relation (4.6) est satisfaite. On en déduit, à partir d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement introduit, qu'il existe sur $M$ un tenseur $T$ de type (1,2) covariantement symétrique, jouissant des propriétés désirées.

(c) C'est sur la connexion adaptée $\Gamma$ déduite de $T$ que nous raisonnons maintenant. On a (4.5); on en déduit

$$\nabla_i \nabla_j F_{ak} = 0 \; . \tag{4.7}$$

Soit $R^A{}_{B,CD}$ le tenseur de courbure de la connexion $\Gamma$. Il résulte de (4.7) et de l'identité de Ricci

$$R^b{}_{a,ij} F_{bk} + R^A{}_{k,ij} F_{aA} = 0 \, ,$$

soit, d'après la propriété de Bott

$$R^l{}_{k,ij} F_{a'l} = 0 \; ,$$

ce qui implique $R^l{}_{k,ij} = 0$. La connexion $\Gamma$ induit sur chaque feuille de $\mathscr{F}$ une connexion linéaire sans torsion dont le tenseur de courbure est donné précisement par $R^l{}_{k,ij}$. Nous avons ainsi établi

Théorème. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage isotrope de la variété symplectique $(M, F)$ tel que le champ orthogonal symplectique définisse un feuilletage coisotrope. Il existe sur $(M, F)$ une connexion linéaire sans torsion adaptée à $\mathscr{F}$ qui induit sur chaque feuille de $\mathscr{F}$ une connexion linéaire sans torsion plate. Il en est en particulier ainsi si $\mathscr{F}$ est un feuilletage lagrangien de $(M, F)$.*

L'existence d'une connexion sans torsion plate sur chaque feuille a été prouvée par A. Weinstein [**7**] dans le cas d'un feuilletage lagrangien ($q = n$) et par P. Dazord [**2**] pour un feuilletage isotrope vérifiant l'hypothèse du théorème précédent. L'induction de telles connexions sur les feuilles par une même connexion linéaire globale de $M$ est nouvelle.

## 5 - Le cas riemannien

(a) Si, pour deux métriques riemanniennes $g$ et $g'$ de $M$, les champ $K$ et $K'$ respectivement $g$-orthogonal et $g'$-orthogonal à un feuilletage $\mathscr{F}$ coïncident, on a sur $U$, pour des corepères adaptés $\{\theta^a, \theta^i\}$ partiellement orthogonaux

$$g|_U = g_{ab}\theta^a \otimes \theta^b + g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \qquad \text{et} \qquad g'|_U = g'_{ab}\theta^a \otimes \theta^b + g'_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \, .$$

Pour $g'_{ab} = g_{ab}$, on voit en prenant des $\theta^a$ orthonormés que les tenseurs $Q'$ et $Q$ correspondant respectivement à $g'$ et $g$ coïncident.

(b) Cela posé, reprenons, sur la variété symplectique $(M, F)$, un feuilletage isotrope $\mathscr{F}$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème précédent. Supposons qu'il existe sur $(M, \mathscr{F})$ une métrique riemannienne $g$ telle que *le tenseur correspondant $Q$ soit nul.* D'après la remarque précédente, on peut toujours astreindre $g$ à vérifier

(5.1) $$g_{ij} = g^{AB} F_{Ai} F_{Bj} = g^{ab} F_{ai} F_{bj} .$$

Soit $\Gamma$ la connexion adaptée à $\mathscr{F}$ déduite de la connexion riemannienne $\overset{*}{\Gamma}$ de $g$. On a.

Lemme. *L'hypothèse de totale géodésicité de $K$ implique que, sur tout domaine $U$ muni de corepères adaptés, on a*

(5.2) $$\nabla_i F_{Aj} = 0 .$$

En effet munissons $U$ de corepères *orthonormés* adaptés distingués $\{\theta^a, \theta^i\} = \{\theta^{a'}, \theta^{a''}, \theta^i\}$. On a d'après (4.3)

$$\nabla_A F_{ij} = 0 , \quad \nabla_i F_{Aj} = \nabla_j F_{Ai} ,$$

et il vient d'après (2.4)

$$\nabla_k g_{ij} = \overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = 0 .$$

L'hypothèse $Q = 0$ se traduit par $\nabla_k g^{ab} = 0$ et il résulte de (5.1) par dérivation covariante

$$g^{ab}(F_{ai} \nabla_k F_{bj} + F_{aj} \nabla_k F_{bi}) = g^{ab}(F_{aj} \nabla_i F_{bk} + F_{aj} \nabla_i F_{bk}) = 0 ,$$

ce qui peut s'écrire

$$\nabla_j (g^{ab} F_{ai} F_{bk}) + \nabla_i (g^{ab} F_{aj} F_{bk}) - g^{ab} F_{bk} (\nabla_j F_{ai} + \nabla_i F_{aj}) = 0 .$$

Cette relation se réduit à

$$g^{ab} F_{bk} \nabla_i F_{aj} = 0 ,$$

soit

$$g^{a'b'} F_{b'k} \nabla_i F_{a'j} = 0 .$$

La matrice $(F_{bk})$ étant régulière, on a $\nabla_i F_{a'j} = 0$ en corepères orthonormés.

On en déduit que dans toute carte adaptée distinguée, on a d'après (4.4) $\nabla_j F_{a'j} = 0$ et $\nabla_i F_{a'j} = 0$, donc $\nabla_i F_{Aj} = 0$ et le lemme est établi.

(c) On déduit de ce lemme exactement comme en **4**

Théorème. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage isotrope de la variété symplectique $(M, F)$ tel que le champ orthogonal symplectique définisse un feuilletage coisotrope. S'il existe sur $M$ une métrique riemannienne $g$ telle que le champ $g$-orthogonal à $\mathscr{F}$ soit totalement géodésique, c'est-à-dire tel que $Q = 0$, il existe une métrique riemannienne $h$ jouissant de la même propriété et qui induit sur chaque feuille de $\mathscr{F}$ une métrique riemannienne plate.*

On peut localiser le résultat à une feuille d'un tel feuilletage isotrope. Si le groupe d'holonomie infinitésimale $G_\Sigma$ d'une feuille $\Sigma$ de $\mathscr{F}$ est relativement compact, le même raisonnement que précédemment montre qu'il existe une métrique riemannienne sur $M$ telle que $Q_{|\Sigma} = 0$ et par suite qu'une métrique induite sur $\Sigma$ soit plate. Le groupe $G_\Sigma$ est isomorphe au groupe d'holonomie de la variété riemannienne plate $(\Sigma, g_\Sigma)$.

## References

[g] R. Bott, *On a topological obstruction to integrability*, Proc. Sympos. Pure Math. AMS, **16** (1970), 127-131.

[2] P. Dazord, *Feuilletages en goémétrie symplectique*, Comptes Rendus **294** (1982). 489-491.

[3] S. Guelorget et G. Joubert, *Algèbre de Weil et classes caracteristiques d'un feuilletage*, Comptes Rendus **277** A (1973), 11-14.

[4] D. L. Johnson and L. B. Whitt, *Totally geodesic foliations*, J. of Diff. Geom. **15** (1980), 225-235.

[5] A. Lichnerowicz, *Feuilletages, géométrie riemannienne et géométrie symplectique*, Comptes Rendus **296** (1983), 205-210; *Variétés de Poisson et feuilletages*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **4** (1982), 195-262.

[6] B. Reinhart, *The second fundamental form of a plane field*, Mimeogr. Univ. of Maryland 1977.

[7] A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Adv. in Math. **6** (1971), 329-346.

* * *