Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10*** (1984), 91-108

HARALD HOLMANN (*)

Feuilletages complexes et symplectiques

Introduction

Le présent rapport étudie les conditions de stabilité d'un feuilletage dont toutes les feuilles sont compactes.

Par feuilletage d'une variété différentiable, on entend une décomposition de la variété en sous-variétés différentiables, qui se présente localement comme un fibré trivial. Intuitivement, une feuille est dite stable si les feuilles voisines qui lui sont très proches, le restent sur toute leur étendue. Des définitions précises seront données dans **1**.

Le problème formulé ci-dessus fur proposé par G. Reeb ([**12**]) qui montra en 1952 qu'un feuilletage différentiable compact de codimension 1 d'une variété différentiable est toujours stable. Simultanément il construisit un feuilletage différentiable compact de codimension 2, sous forme d'un courant différentiable périodique sur une variété différentiable de dimension 3, qui n'est pas stable. Etant donné qu'on ne trouva pas de tels exemples pour des variétés différentiables compactes, G. Reeb und A. Haefliger suspectérent que tous les feuilletages différentiables compacts des variétés différentiables compactes sont stables.

La question resta longtemps non tranchée, jusqu'à ce que D. B. A. Epstein ([**5**]) obtint le résultat suivant: Un courant différentiable périodique sur une variété différentiable compacte M de dimension 3 est toujours stable. L'espace des orbites est une variété différentiable de dimension 2 et la décomposition en orbites de M donne un espace fibré de Seifert dont le groupe structural et la fibre typique sont le cercle-unité S^1.

En 1975/76, Edwards, Millett, Sullivan et Vogt ([**3**], [**18**]) réussirent à étendre ce résultat à des feuilletages différentiables compacts de codimension 2

(*) Address: Institut Mathématique, Université de Fribourg, 1700 Fribourg, Suisse.

quelconques d'une variété différentiable compacte. Comme ces auteurs le prétendent eux-mêmes, ils fûrent essentiellement influencés par les idées et les méthodes de Epstein.

A peu près à la même époque, Sullivan et Thurston (**[16]**, **[17]**) trouvèrent les premiers contre-exemples à la conjecture de Reeb et Haefliger sous forme d'un courent différentiable, et même réel-analytique, périodique et instable sur une variété différentiable, resp. réel-analytique, compacte de dimension 5.

En 1977/78, Epstein et Vogt (**[7]**) trouvèrent même un courent réel-analytique périodique et instable sur une variété réel-analytique compacte de dimension 4. Ainsi fut démontré que la conjecture de Reeb-Haefliger est déjà fausse pour des feuilletages de codimension 3, ce qui signifie que le résultat de Edwards, Millet, Sullivan et Vogt est fort.

Maintenant se pose la question de trouver des critères pour la stabilité des feuilletages compacts. Ces critères concernent la variété (par ex. structure complexe, métrique kählérienne, structure symplectique) ou le feuilletage luimême (par ex. holomorphe, holomorphe-transversal, symplectique, feuilletages en surfaces minimales).

En 1976/77 (**[9]**) l'auteur trouva le résultat suivant pour les feuilletages holomorphes: Un courant holomorphe périodique sur une variété complexe compacte (ou aussi sur un espace complexe compact) M est toujours stable.

A ce propos, il est à remarquer:

(1) Contrairement au cas différentiable, il n'est pas nécessaire de faire ici des restrictions quant à la dimension de M.

(2) La compacité de M est également nécessaire ici. Th. Müller (**[11]**) trouva en 1979 un courant holomorphe périodique instable sur une variété complexe non compacte de dimension complexe 3.

(3) Sous les conditions ci-dessus l'espace des orbites M/C possède une structure complexe canonique (en générale avec des singularités). La projection canonique holomorphe $\pi: M \to M/C$ représente une fibration holomorphe de Seifert dont la fibre typique et le groupe structural sont un tore complexe de dimension complexe 1.

La conjecture de Reeb-Haefliger est toujours ouverte pour le cas holomorphe. Un feuilletage holomorphe compact d'une variété complexe compacte (ou d'un espace complexe compact) est-il toujours stable?

Pour le cas différentiable, H. Rummler 1978 (**[13]**, **[15]**) put formuler, dans sa thèse d'habilitation, un critère de stabilité nécessaire et suffisant avec des méthodes de géométrie différentielle: Un feuilletage différentielle compact d'une variété différentiable M (non nécessairement compacte) est stable si et seulement s'il existe une métrique riemannienne sur M qui fait des feuilles, des surfaces minimales.

En 1976, Wadsley en avait déjà traité un cas particulier et montré avec des méthodes tout à fait différentes: Un courant différentiable périodique sur une variété différentiable M est stable si est seulement s'il existe une métrique riemannienne sur M telle que les lignes de courants soient des géodésiques par rapport à cette métrique.

H. Rummler montra ([**14**]) qu'une métrique hermitienne sur une variété complexe est kählérienne, si et seulement si toutes les sous-variétés locales complexe-analytiques sont des surfaces minimales pour cette métrique. Son critère, concernant les surfaces minimales, pour la stabilité des feuilletages compacts donne par conséquent (cet énoncé étant connu depuis longtemps pour les variétés kählériennes compactes): Un feuilletage holomorphe compact d'une variété kählérienne non nécessairement compacte, est toujours stable.

Dans le présent rapport nous allons aussi démontrer cet énoncé pour des feuilletages presque complexes compacts des variétés presque kählériennes et à partir de là en tirer l'énoncé suivant pour des feuilletages compacts symplectiques des variétés symplectiques.

Théorème 1. *(M, ω) est une variété symplectique, c'est-à-dire que M est une variété différentiable et ω une forme différentielle fermée de degré 2 sur M, pour laquelle $\omega(x)\colon T_xM \times T_xM \to \mathbf{R}$ pour tout $x \in M$, est une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace tangent T_xM à M au point $x \in M$. $\mathcal{F}$ est un feuilletage compact symplectique de M, c-à-d. que toutes les feuilles L de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés compactes symplectiques de (M, ω), c-à-d. que $(L, \omega|L)$ sont des variétés symplectiques.*

Alors on a

(1) *Il existe une structure presque complexe J sur M, telle que toutes les feuilles L de $\mathcal{F}$ deviennent des sous-variétés presque complexes de (M, J) et $\omega(Jt, Jt') = \omega(t, t')$ pour tout $t, t' \in T_xM$, $x \in M$ (i.e. $J\colon T_xM \to T_xM$ est symplectique pour tout $x \in M$).*

(2) *Il existe une métrique hermitienne $h\colon TM \times_M TM \to \mathbf{C}$ avec $\omega = -\operatorname{Im}(h)$, c-à-d. h est une métrique kählérienne, c-à-d. (M, h) est une variété presque kählérienne.*

(3) *$\mathcal{F}$ est stable.*

A ce propos, il est à noter que la structure presque complexe J ainsi que la métrique hermitienne h ne sont en aucun cas uniquement déterminées par la forme symplectique.

Dans le livre *Foundations of Mechanics* [**1**] de R. Abraham et J. E. Marsden on peut lire *Symplectic manifolds constitute the arena for Hamiltonian mechanics.* Dans ce cas il s'agit avant tout de la structure symplectique canonique du fibré cotangent des variétés différentiables.

Dans la dernière partie de ce rapport est construit explicitement un exemple d'une variété symplectique compacte de dimension 4, avec un feuilletage symplectique compact, qui possède, certes, beaucoup de structures presque-kählériennes, mais aucune structure kählérienne puisque son premier nombre de Betti est impair (à savoir 3).

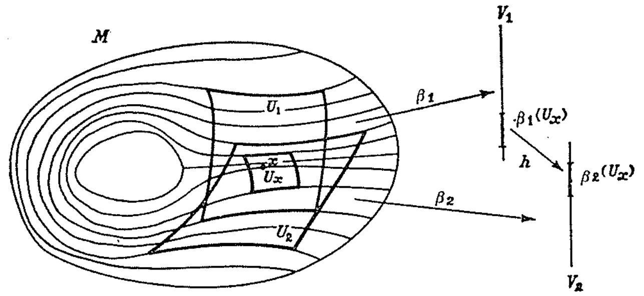
1 - Préliminaires

Nous présentons et commentons ici quelques notions fondamentales de la théorie des feuilletages. Nous nous restreignons à des feuilletages dits réguliers (voir p. ex. [**3**], [**6**]) de variétés que nous supposerons toujours paracompactes.

1.1 – Déf. *Soit M une variété différentiable de dimension $n = p + q$. Par un feuilletage différentiable local de dimension p (de codimension q), on comprend un couple (U, β), où U est un ouvert de M et $\beta\colon U \to V$ une submersion de U sur un ouvert V dans $\boldsymbol{R}^q$.*

Nous pouvons admettre alors que U est de la forme $W \times V$, où W est un ouvert connexe dans $\boldsymbol{R}^p$ et $\beta\colon W \times V \to V$ la projection sur la deuxième composante.

1.2 – Déf. *Deux feuilletages différentiables locaux de dimension p (U_1, β_1), (U_2, β_2) de M sont dits différentiablement compatibles, si pour tout point $x \in U_1 \cap U_2$, il existe un voisinage $U_x \subset U_1 \cap U_2$ et un difféomorphisme $h\colon \beta_1(U_x) \to \beta_2(U_x)$ avec la propriété que $h \circ (\beta_1 | U_x) = \beta_2 | U_x$. (U_1, β_1), (U_2, β_2) sont dits transversalement de même orientation, si de plus le difféomorphisme h a un jacobien positif.*



1.3 – Déf. *Une collection* $\mathscr{F} = (U_i, \beta_i)_{i\in I}$ *de feuilletages différentiables locaux de dimension* p *de* M *avec* $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ *et qui sont deux à deux différentiablement compatibles, s'appelle un feuilletage différentiable de dimension* p *(codimension* q*) de* M. $\mathscr{F}$ *est dit orienté transversalement, si les* (U_i, β_i), $i \in I$, *sont deux à deux de même orientation.*

Pour la suite, nous pouvons nous restreindre à des feuilletages transversalement orientés de variétés orientées. Les feuilletages presque complexes et symplectiques rencontrés dans **2** et **3** ont cette propriété.

Pour introduire la notion d'une feuille différentiable de $\mathscr{F}$, nous définissons sur M une nouvelle topologie $T_{\mathscr{F}}$, appelée *topologie-feuille*, en donnant la base suivante $B_{\mathscr{F}} = \{\beta_i^{-1}(\beta_i(x_i)) \cap U;\ i \in I,\ x_i \in U_i,\ U \text{ ouvert dans } M\}$.

1.4 – Déf. *Les composantes connexes de* M *par rapport à la topologie-feuille* $T_{\mathscr{F}}$ *de* $\mathscr{F}$ *s'appellent les feuilles de* $\mathscr{F}$. *On désigne par* L_x *la feuille qui contient* x.

Il est à noter qu'un feuilletage $\mathscr{F} = (U_i, \beta_i)_{i\in I}$ de M définit un sous-fibré involutif $F \subset TM$ du fibré tangent TM de M, pour lequel pour tout $x \in M$, la fibre F_x de F sur x est égale à l'espace tangent $T_xL_x \subset T_xM$ de la feuille L_x au point x. Inversement un sous-fibré involutif F de TM définit un feuilletage $\mathscr{F}$ dans le sens de la définition ci-dessus, dont les feuilles sont précisément les variétés intégrales maximales ([**10**], **4**).

On obtient une classe importante de feuilletages par opérations différentiables de groupes de Lie sur des variétés différentiables telles que toutes les orbites aient la même dimension. Dans ce cas, les feuilles sont les composantes connexes des orbites. Lors d'une opération de $\boldsymbol{R}$, on parle aussi d'un courant: un courant est dit périodique, si les groupes d'isotropie $J_x = \{r \in \boldsymbol{R};\ r\cdot x = x\}$, $x \in M$, sont tous isomorphes à $\boldsymbol{Z}$, c-à-d. si toutes les $\boldsymbol{R}$-orbites sont difféomorphes au cercle-unité S^1.

1.5 – Déf.

(1) *Un feuilletage* $\mathscr{F} = (U_i, \beta_i)_{i\in I}$ *d'une variété complexe* M *s'appelle holomorphe, si toutes les applications* $\beta_i\colon U_i \to V_i$ *sont des submersions holomorphes et si les feuilletages holomorphes locaux* (U_i, β_i) *sont deux à deux holomorphe compatibles, c-à-d. que dans la Déf.* 1.2., *lors de la description de la compatibilité, les applications* h *intervenant sont biholomorphes.*

(2) *Un feuilletage différentiable* $\mathscr{F} = (U_i, \beta_i)_{i\in I}$ *d'une variété* M *presque complexe resp. symplectique* M *s'appelle presque-complexe resp. symplectique, si toutes les feuilles sont des sous-variétés presque complexes resp. symplectiques.*

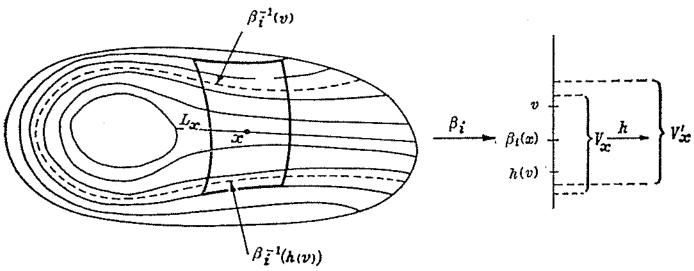
Le sous-fibré correspondant F du fibré tangent TM de M est alors précisément un sous-fibré complexe resp. symplectique.

Au voisinage d'une feuille L_x passant par $x \in M$, un feuilletage sera le mieux décrit par le groupe d'holonomie $H(L_x)$.

1.6 – Déf. *Nous choisissons un $i \in I$ avec $x \in U_i$. Si V_x et V'_x sont des voisinages ouverts de $\beta_i(x)$ dans $V_i = \beta_i(U_i)$, alors un difféomorphisme $h\colon V_x \to V'_x$ est dit admissible si*

(1) *$\beta_i(x)$ est un point fixe de h.*

(2) *$\beta_i^{-1}(v)$ et $\beta_i^{-1}(h(v))$ sont dans la même feuille pour tout $v \in V_x$.*



Les germes au point $\beta_i(x)$ de ces applications admissibles forment le groupe d'holonomie $H(L_x)$ de L_x (qui, à isomorphisme près, est déterminé seulement par $\mathscr{F}$ et la feuille L_x de $\mathscr{F}$).

1.7 – Déf.

(1) *Un feuilletage $\mathscr{F}$ est dit compact, si toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont compactes.*

(2) *Une feuille L d'un feuilletage compact $\mathscr{F}$ de M est dite stable, si chaque voisinage U de L contient un voisinage invariant $\hat{U}$ de L (invariant signifie réunion de feuilles).*

(3) *$\mathscr{F}$ est dit stable, is toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont stables.*

Pour un feuilletage différentiable compact, la stabilité d'une feuille se laisse aussi caractériser comme suit ([**3**], [**6**])

1.8 – Théorème. *Pour une feuille L d'un feuilletage différentiable compact $\mathcal{F}$ d'une variété différentiable M, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *L est stable.*

(2) *Le groupe d'holonomie $H(L)$ de L est fini.*

(3) *Pour toute métrique riemannienne g sur M, la fonction de volume correspondante $V_g\colon M \to \boldsymbol{R}^+$ $(V_g(x) =$ volume de L_x par rapport à $g)$ est bornée dans un voisinage U de L.*

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est stable si et seulement si l'espace des feuilles M/F (pour la topologie-quotient) est de Hausdorff.

Tandis que la répartition des feuilles voisines d'une feuille non stable d'un feuilletage compact peut être très pathologique, pour une feuille stable L, il est toujours possible de trouver un voisinage invariant U, où le feuilletage se laisse décrire précisément comme un produit de Seifert avec L pour feuille centrale ([**4**], [**6**], [**8**]).

Construction et propriétés d'un produit de Seifert

Soit V un disque ouvert dans $\boldsymbol{R}^q$ (muni du produit scalaire standard) avec 0 pour centre et $\tilde{L}$ une variété différentiable connexe de dimension p quelconque. De plus soit H un groupe fini de transformations orthogonales de V (avec 0 comme point fixe) qui opère aussi différentiablement et librement sur $\tilde{L}$. Alors H opère différentiablement et librement sur $V\times\tilde{L}$ comme suit: $h(v, y) = (h(v), h(y))$ pour $h \in H$, $v \in V$, $y \in L$. Le *produit de Seifert* $X = (V\times\tilde{L})/H$ est de manière canonique une variété différentiable de dimension n $(n = p+q)$, c-à-d. que la projection canonique $\pi\colon V\times\tilde{L} \to X = (V\times\tilde{L})/H$ est un difféomorphisme local.

La projection $\sigma\colon V\times\tilde{L} \to V$ induit une application $\bar{\sigma}\colon X = (V\times\tilde{L})/H \to V/H$, dont les fibres sont précisément les feuilles d'un feuilletage différentiable $\mathcal{F}$ de X. Les feuilles sont de la forme $L_v = \pi(\{v\}\times\tilde{L})$, $v \in V$. A l'aide du groupe d'isotropie $H_v = \{h \in H;\ h(v) = v\}$ du point $v \in V$, la feuille L_0 apparaît aussi comme isomorphe à $\tilde{L}/H_v$. La *feuille centrale* L_0 est alors isomorphe à $\tilde{L}/H$. On voit tout de suite que H_v, $v \in V$, est isomorphe au groupe d'holonomie $H(L_v)$ de la feuille L_v. L'isomorphisme est donné par la correspondance: $h \mapsto h_v$ (germe de h en $v \in V$).

Etant donné que $E = \{v \in V;\ H_v \neq \mathrm{Id}\}$ est l'intersection de V avec la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{R}^q$ de dimension inférieure, les feuilles dites *génériques* L_v avec $H_v = \mathrm{Id}$ (isomorphes à $\tilde{L}$) sont denses dans $X = (V\times\tilde{L})/H$. Si H n'est formé que de transformations orthogonales de déterminant positif (ceci a lieu si X est orienté et $\mathscr{F}$ transversalement orienté), alors les feuilles génériques forment un sous-ensemble connexe de X.

La projection $\tilde{\tau}\colon V\times\tilde{L}\to\{0\}\times\tilde{L}$ induit une rétraction différentiable τ: $X=(V\times\tilde{L})/H\to L_0\approx\tilde{L}/H$. Par τ, chaque feuille $L_v\approx L/H_v$ est un revêtement sans ramification de la feuille centrale L_0 de $\mathscr{F}$. Le nombre de feuille de ce revêtement est, pour les feuilles génériques, égal à l'ordre de H et en général pour une feuille L_v, $v\in V$, égal à l'indice $[H\colon H_v]$ de H_v dans H. Si g est une métrique riemannienne sur X et $V_g\colon X\to\boldsymbol{R}^+$ la fonction de volume correspondante pour le feuilletage $\mathscr{F}$, alors on a (nous pouvons envisager V_g comme fonction sur $X/\mathscr{F}$):

$$\lim_{\substack{v\to 0\\ L_v\ \text{générique}}} V_g(L_v)=\operatorname{ord} H\cdot V_g(L_0)\,.$$

Pour terminer cette présentation des notions de la théorie des feuilletages, considérons quelques remarques sur la réunion B des feuilles non stables d'un feuilletage différentiable compact $\mathscr{F}$ d'une variété différentiable M. Cet ensemble B, appelé *bad set* de $\mathscr{F}$, est un sous-ensemble fermé, nulle part dense, de M, c-à-d. que les feuilles stables forment un sous-ensemble ouvert et dense $M_s=M-B$ de M ([**3**], [**6**]). B se laisse aussi caractériser comme $B=\{x\in M;\ H(L_x)\ \text{infini}\}$ tandis que $M_s=\{x\in M;\ H(L_x)\ \text{fini}\}$. D'après les remarques ci-dessus et en raison des propriétés des produits de Seifert, l'ensemble $M_g=\{x\in M;\ H(L_x)=\mathrm{Id}\}$ des feuilles génériques de $\mathscr{F}$ est dense dans M_s et par conséquent aussi dans M. Si M est orientée et $\mathscr{F}$ transversalement orienté, alors M_s-M_g ne décompose nulle part l'ensemble M_s.

2 - Stabilité des feuilletages presque complexes compacts des variétés presque kählériennes

Nous allons démontrer le théorème suivant, déjà annoncé dans l'introduction

2.1 – Théorème. *Un feuilletage presque complexe compact $\mathscr{F}$ d'une variété presque kählérienne M est toujours stable.*

Preuve. Nous devons montrer que la réunion B des feuilles instables de $\mathscr{F}$, ce qu'on appelle bad set, est vide. Pour la preuve nous utilisons la forme faible suivante du moving leaf theorem que nous ne voulons pas démontrer ici (voir [**3**], [**13**]).

2.2 – Théorème. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage différentiable compact d'une variété différentiable M. Alors si B n'est pas vide, chaque fonction de volume*

$V_g: M \to \mathbf{R}^+$ de $\mathscr{F}$ (par rapport à une métrique riemannienne g sur M) est non bornée sur au moins une composante connexe de $M - B$.

Pour la version forte du moving leaf theorem (dans laquelle l'appellation devient claire) on utilise la compacité du bad set, ce qui n'a pas lieu en général dans nos investigations puisque nous traitons des feuilletages compacts de variétés non compactes. Bien que non utilisée, nous présentons quand même ici la version forte du théorème en raison de son importance pour la théorie des feuilletages compacts ([**3**]).

2.3 – Théorème (moving leaf theorem). *Si le feuilletage $\mathscr{F}$ d'une variété différentiable M est compact et si le bad set B de $\mathscr{F}$ est compact et non vide, alors il existe une isotopie $(L_t)_{t\in\mathbf{R}}$ des feuilles de $\mathscr{F}$, dont le volume pour $t \to +\infty$ est non borné, et qui convergent vers B (c-à-d. pour tout voisinage U de B, il existe un $t_U \in \mathbf{R}$ tel que $L_t \subset U$ pour tout $t \geqslant t_U$).*

Suite de la preuve du Théorème 2.1. Nous allons montrer que sur chaque composante connexe de $M - B$, la fonction de volume $V: M \to \mathbf{R}^+$ de $\mathscr{F}$ par rapport à la métrique kählérienne de M est bornée. L'hypothèse $B \neq \emptyset$ contredit alors le Théorème 2.2 à savoir la forme faible du moving leaf theorem.

Nous montrons tout d'abord la version locale du théorème de Wirtinger Martinelli pour les variétés presque kählériennes (M, h). Ici $h: TM \times_M TM \to \mathbf{C}$ désigne la métrique kählérienne sur M. Par définition, la forme différentielle $\omega = -\operatorname{Im} h$ est fermée et de degré 2 et $s = \operatorname{Re} h$ est une métrique riemannienne sur M.

2.4 – Théorème. *Pour un système orthonormal (par rapport à s) $n_1, \ldots, n_{2k}$ de T_xM, $x \in M$, on a toujours $|(1/k!)\omega^k(n_1, \ldots, n_{2k})| \leqslant 1$, ou $\omega^k = \omega\wedge\ldots\wedge\omega$ désigne le produit de Grassmann de ω par elle-même, k fois. L'égalité a lieu si et seulement si le sous-espace vectoriel réel E de T_xM engendré sur $\mathbf{R}$ par les vecteurs $n_1, \ldots, n_{2k}$ est un sous-espace vectoriel complexe de T_xM, c-à-d. si $JE = E$, où $J: TM \to TM$ désigne la structure presque complexe sur M.*

Pour la preuve, nous avons besoin du lemme suivant de l'algèbre multilinéaire

2.5 – Lemme. *E est une espace vectoriel réel de dimension $2k$ et ω une forme bilinéaire alternée sur E. Alors pour chaque liste $(n_1, \ldots, n_{2k})$ de vecteurs de E on a*

$$\Big(\frac{1}{k!}\,\omega^k(n_1, \ldots, n_{2k})\Big)^2 = \det\big(\omega(n_\nu, n_\mu)\big)_{\nu,\mu=1,\ldots,2k}\,.$$

La preuve de ce lemme est un simple exercice d'algèbre multilinéaire.

Preuve du Théorème 2.4. Comme $h(t, t') = s(t, t') - i\omega(t, t')$ et comme
$h(Jt, t') = s(Jt, t') - i\omega(Jt, t') = ih(t, t') = \omega(t, t') + is(t, t')$
pour tout $t, t' \in T_x M$, $x \in M$, on a toujours $\omega(t, t') = s(Jt, t')$. Par le lemme ci-dessus

$$\Big(\frac{1}{k!}\,\omega^k(n_1, \dots, n_{2k})\Big)^2 = \det\big(s(Jn_\nu, n_\mu)\big)_{\nu,\mu=1,\dots,2k} \stackrel{\star}{=} \det(\pi \circ J_{|E} \to E)\,,$$

où $\pi\colon T_x M \to E$ désigne la projection orthogonale de $T_x M$ sur le sous-espace vectoriel E de $T_x M$. L'égalité $\stackrel{\star}{=}$ a lieu puisque $\big(s(Jn_\nu, n_\mu)\big)_{\nu,\mu=1,\dots,2k}$ est la représentation matricielle de $\pi \circ J | E \to E$ par rapport à la base orthonormée $(n_1, \dots, n_{2k})$ de E.

Comme $J\colon E \to T_x M$ est une injection isométrique et $\pi\colon T_x M \to E$ une projection orthogonale, on a

(1) $\det(\pi \circ J | E) \leqslant 1\,,$ (2) $\det(\pi \circ J | E) = 1 \Leftrightarrow JE = E\,.$

Il s'ensuit les deux énoncés du théorème.

Pour la preuve du Théorème 2.1. nous avons encore besoin de la version globale suivante du théorème de Wirtinger-Martinelli

2.6 – Théorème (Wirtinger-Martinelli). *Une sous-variété Y presque complexe, compacte, de dimension $2k$, d'une variété presque kählérienne (M, h), a dans sa classe d'homologie un volume minimale absolu (par rapport à la métrique kählérienne h). Chaque sous-variété différentiable $\tilde{Y}$ compacte de dimension $2k$ de la classe d'homologie de Y et qui n'est pas presque complexe, a un volume strictement plus grand.*

Preuve. Soit $\tilde{Y}$ une sous-variété différentiable compacte de dimension $2k$ appartenant à la même classe d'homologie que Y. La forme de volume $d\mu_Y$ sur Y donnée par la métrique kählérienne h est égale à $(1/k!)\omega^k$ (pour une orientation canonique de Y) et alors

$$V(Y) = \int_Y d\mu_Y = \int_Y \frac{1}{k!}\,\omega^k.$$

L'inégalité de Wirtinger-Martinelli (Théorème 2.4.) a pour conséquence que

$$V(\tilde{Y}) = \int_{\tilde{Y}} d\mu_{\tilde{Y}} \geqslant \int_{\tilde{Y}} \frac{1}{k!}\,\omega^k,$$

où l'égalité a lieu si et seulement si $T_y(\tilde{Y})$ est un sous-espace vectoriel complexe de T_yM pour tout $y \in \tilde{Y}$, c-à-d. si $\tilde{Y}$ est une sous-variété presque complexe de M.

Etant donné que par le théorème de Stokes (on remarquera que $d\omega^k = 0$)

$$\int_{\tilde{Y}} \frac{1}{k!}\,\omega^k = \int_{Y} \frac{1}{k!}\,\omega^k$$

pour un bon choix de l'orientation de $\tilde{Y}$, on a

(1) $$V(\tilde{Y}) \geqslant V(Y)\,,$$

(2) $$V(\tilde{Y}) = V(Y) \Leftrightarrow \tilde{Y} \text{ est une sous-variété presque complexe de } M\,.$$

Suite de la preuve du Théorème 2.1. Nous considérons la variété M presque kählérienne de dimension $2n$, orientée par la forme de volume $(1/n!)\omega^n$, qui n'est jamais nulle, et nous faisons de même pour chaque feuille L de $\mathscr{F}$ presque complexe de dimension $2k$ en nous servant de la forme de volume, jamais nulle, $(1/k!)\omega^k|L$. Nous pouvons admettre maintenant que le feuilletage est orienté transversalement, de façon que l'ensemble $M_s - M_g$ des feuilles stables, mais non génériques, ne décompose nulle part l'ensemble M_s des feuilles stables.

Considérons maintenant une composante connexe M_s^0 de M_s. Alors l'ensemble M_g^0 des feuilles génériques de M_s^0 est connexe. Comme toutes les feuilles de M_g^0 sont toutes dans la même classe d'homologie, on a que $V\,|\,M_g^0 \to \boldsymbol{R}^+$ est constante ($= c$).

Pour une feuille L de M_s^0 on a (voir construction et propriétés des produits de Seifert dans **1**)

$$V(L) = \frac{1}{\operatorname{ord} H(L)} \lim_{\substack{x \to x_0 \in L \\ x \in M_g^0}} V(L_x) = \frac{c}{\operatorname{ord} H(L)}\,.$$

Et alors on a que $V\,|\,M_s^0 \to \boldsymbol{R}^+$ est bornée par c, ce qui était à démontrer.

3 - Stabilité des feuilletages compacts symplectiques des variétés symplectiques

Nous allons maintenant prouver le théorème, énoncé en fin d'introduction, concernant la stabilité des feuilletages compacts symplectiques. Nous commençons avec quelques énoncés sur les espaces vectoriels symplectiques.

3.1 – Déf.

(1) *Par un espace vectoriel symplectique, on entend un couple* (E, ω) *formé d'un espace vectoriel réel* E *et d'une forme symplectique* $\omega\colon E\times E \to \mathbf{R}$, *c-à-d. une forme bilinéaire alternée non dégénérée.*

(2) *Un sous-espace vectoriel* F *de* E *est dit symplectique, si* $\omega\,|\,F\times F\to \mathbf{R}$ *est une forme symplectique sur* F, *ou en s'expriment d'une autre façon si* $F\cap F_\omega^\perp = 0$, *où* $F_\omega^\perp = \{x\in E;\ \omega(x, y) = 0\ \ \forall y\in F\}$ *désigne le complément orthogonal de* F *par rapport à* ω.

Nous voulons nous restreindre à des espaces vectoriels symplectiques (E, ω) de dimension finie. Ceux-ci sont toujours de dimension paire et le complément orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace symplectique F de E est également symplectique et on a $E = F\oplus F^\perp$.

3.2 – Théorème. (E, ω) *est un espace vectoriel symplectique de dimension finie et* F *un sous-espace symplectique. Alors il existe une structure complexe* $J\colon E\to E$ *sur* E *et un produit scalaire complexe* $h\colon E\times E\to \mathbf{C}$ *sur l'espace vectoriel complexe* (E, J), *tels que*:

(1) $\omega(Jx, Jy) = \omega(x, y)$ *pour tout* $x, y\in E$, *i.e.* $J\colon E\to E$ *est un endomorphisme symplectique de* (E, ω).

(2) $\omega = -\operatorname{Im} h$.

(3) $JF = F$, $JF_\omega^\perp = F_\omega^\perp$, *i.e.* F *et* $F_\omega^\perp$ *sont des sous-espaces vectoriels complexes de* (E, J).

Preuve. Nous choisissons un produit scalaire particulier $\sigma\colon E\times E\to \boldsymbol{R}$, tel que F et $F_\omega^\perp$ soient aussi orthogonaux par rapport à σ. Ceci nous détermine alors un unique isomorphisme $K\colon E\to E$, tel que $\omega(x, y) = \sigma(Kx, y)$, pour tout $x, y\in E$. K est antisymétrique par rapport au produit scalaire σ, c-à-d. que $K^t = -K$, si K^t désigne l'endomorphisme adjoint de K par rapport à σ. Ceci découle immédiatement de la chaîne d'égalités suivante, qui a lieu pour tout $x, y\in E$

$$\sigma(K^t x, y) = \sigma(y, K^t x) = \sigma(Ky, x) = \omega(y, x) = -\,\omega(x, y) = \sigma(-Kx, y)\,.$$

Nous montrons maintenant que F et $F_\omega^\perp$ sont tous deux invariants par les applications linéaires K et $K^t = -K$. Pour $x\in F$, $\sigma(Kx, y) = \omega(x, y) = 0$

pour tout $y \in F_\omega^\perp$, c-à-d. $Kx \in F$. Pour $x \in F_\omega^\perp$, $\sigma(Kx, y) = \omega(x, y) = 0$ pour tout $y \in F$, c-à-d. $Kx \in F_\omega^\perp$.

On remarque que l'application $-K^2 = K \circ K^t \colon E \to E$ est symétrique, défini positif car $(K \circ K^t)^t = (K^t)^t \circ K^t = K \circ K^t$ et

$$\sigma(K \circ K^t x, x) = \sigma(K^t x, K^t x) = \sigma(-Kx, -Kx) = \sigma(Kx, Kx) > 0$$

pour tout $x \neq 0$ dans E, puisque K est un isomorphisme. Pour $-K^2 = K \circ K^t$, il existe par conséquent un unique endomorphisme P de E, symétrique, défini positif tel que $P^2 = K \circ K^t = -K^2$.

A cause de l'unicité de P, on peut dire que P laisse invariant F et $F_\omega^\perp$. En effet, pour les applications linéaires symétriques, définies positives $K_1 = K \circ K^t | F \to F$ et $K_2 = K \circ K^t | F_\omega^\perp \to F_\omega^\perp$, il existe des applications linéaires symétriques définies positives $P_1 \colon F \to F$, $P_2 \colon F_\omega^\perp \to F_\omega^\perp$ telles que $P_1^2 = K_1$ et $P_2^2 = K_2$ et, pour $P_1 \oplus P_2 \colon F \oplus F_\omega^\perp \to F \oplus F_\omega^\perp$, on a $(P_1 \oplus P_2)^2 = K_1 \oplus K_2 = K \circ K^t$, c'est-à-dire $P = P_1 \oplus P_2$.

Nous définissons maintenant

$$J = P^{-1} \circ K, \qquad \tilde{J} = K \circ P^{-1}.$$

Tout d'abord, nous constatons que J et $\tilde{J}$ sont des isométries par rapport à σ. On a en effet: $J \circ J^t = P^{-1} \circ K \circ K^t \circ (P^{-1})^t = P^{-1} \circ P^2 \circ (P^t)^{-1} = P^{-1} \circ P^2 \circ P^{-1} = \mathrm{Id}_E$. De manière analogue, on obtient: $\tilde{J} \circ \tilde{J}^t = \mathrm{Id}_E$.

A partir de $K = P \circ J = \tilde{J} \circ P$, il s'ensuit que $P = \tilde{J} \circ P \circ J^{-1}$ est égal a $(\tilde{J} \circ J^{-1}) \circ (J \circ P \circ J^{-1})$, où $\tilde{J} \circ J^{-1}$ est une isométrie et $J \circ P \circ J^{-1}$ est de nouveau symétrique et définie positive. Nous pouvons maintenant utiliser le théorème suivant ([**2**], Chap. I).

Théorème. *Tout automorphisme T d'un espace vectoriel réel E de dimension finie avec un produit scalaire $\sigma \colon E \times E \to \mathbf{R}$ se laisse décomposer de manière unique en $T = U \circ H$, où U est une isométrie et H est symétrique, définie positive.*

On a alors $\tilde{J} \circ J^{-1} = \mathrm{Id}$, c-à-d. $\tilde{J} = J$ et $K = P \circ J = J \circ P$. A partir de $K^t = -K$, on en tire: $J^t \circ P = J^t \circ P^t = (P \circ J)^t = K^t = -K = -J \circ P$, c'est-à-dire que $J^t = -J$ et $J^2 = -J^t \circ J = -\mathrm{Id}_E$.

Nous avons donc montré que $J \colon E \to E$ représente une structure complexe sur E. A partir de la définition de $J = P^{-1} \circ K$, on voit tout de suite que $JF = F$ et $JF_\omega^\perp = F_\omega^\perp$. Pour tout $x, y \in E$, on a

$$\omega(Jx, Jy) = \sigma(K \circ Jx, Jy) = \sigma(J \circ Kx, Jy) = \sigma(Kx, y) = \omega(x, y),$$

i.e. J est une application symplectique de (E, ω). A ce point, nous avons démontré les énoncés (1) et (3) du Théorème 3.2.

A l'aide de J et ω nous définissons maintenant un deuxième produit scalaire réel $s: E \times E \mapsto \boldsymbol{R}$ sur E en posant $s(x, y) = \omega(x, Jy)$ pour $x, y \in E$. Il est bien défini positif, puisque

$$s(x, y) = \omega(x, Jy) = \sigma(Kx, Jy) = \sigma(J \circ Px, Jy) = \sigma(Px, y)$$

i.e. $s(x, x) = \sigma(Px, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ dans E puisque P est symétrique, défini positif. On vérifie alors facilement que $h(x, y) = s(x, y) - i\omega(x, y)$ pour $x, y \in E$ définit un produit scalaire complexe sur (E, J). L'affirmation (2) découle immédiatement de la définition de h.

Si on parcourt encore une fois cette démonstration, nous constatons que J et h sont uniquement déterminés, dans notre construction, par ω et par le choix d'un produit scalaire σ sur E avec $\sigma(x, y) = 0$ pour tout $x \in F$, $y \in F^{\perp}_{\omega}$.

Nous allons montrer maintenant que le Théorème 3.2. se laisse étendre aux fibrés vectoriels symplectiques.

3.3 – Déf.

(1) *Par un fibré vectoriel symplectique, on entend un couple* (E, ω) *formé d'un fibré vectoriel réel* $E = (E, \pi, M)$ (*de dimension finie*) *sur une variété différentiable* M *et d'une forme symplectique* ω *sur* E, *i.e. une fonction différentiable* $\omega: E \underset{M}{\times} E \to \boldsymbol{R}$, *telle que* $\omega_x = \omega | E_x \times E_x \to \boldsymbol{R}$ *soit une forme symplectique sur* $E_x = \pi^{-1}(x)$, *pour tout* $x \in M$.

(2) *Un sous-fibré* F *de* E *est dit symplectique, si* $\omega | F \underset{M}{\times} F \to \boldsymbol{R}$ *est une forme symplectique sur* F.

On remarquera que le complément orthogonale $F^{\perp}_{\omega} = \bigcup_{x \in M} (F_x)^{\perp}_{\omega_x}$ de F par rapport à ω est un sous-fibré symplectique de E et $E = F \oplus F^{\perp}_{\omega}$.

Nous allons montrer la généralisation suivante du Théorème 3.2.

3.4 – Théorème. (E, ω) *est un fibré vectoriel symplectique sur la variété différentiable* M *et* F *est un sous-fibré symplectique. Alors il existe une structure complexe* $J: E \to E$ *sur* E (i.e. J *est un automorphisme de fibré avec* $J^2 = -\mathrm{Id}_E$) *et une métrique hermitienne* h *sur* E (i.e. *une fonction différentiable* $h: E \underset{M}{\times} E \to \boldsymbol{C}$, *telle que* $h | E_x \times E_x \to \boldsymbol{C}$ *est, pour tout* $x \in M$, *un produit scalaire complexe sur l'espace vectoriel complexe* (E_x, J_x) *avec* $J_x = J | E_x \to E_x$) *telles que*:

(1) $\omega(Je, Jf) = \omega(e, f)$ *pour tout* $e, f \in E_x$, $x \in M$, *i.e.* J *est un automorphisme symplectique de* (E, ω).

(2) $\omega = -\operatorname{Im} h$.

(3) $JF = F$, $JF^{\perp}_{\omega} = F^{\perp}_{\omega}$, i.e. F *et* $F^{\perp}_{\omega}$ *sont des sous-fibré complexes du fibré vectoriel complexe* (E, J).

Preuve. Nous choisissons une métrique de Riemann $\sigma: E \underset{M}{\times} E \to \boldsymbol{R}$ sur le fibré vectoriel (E, π, M), i.e. une fonction différentiable, pour la quelle $\sigma_x = \sigma | E_x \times E_x$ est un produit scalaire réel, pour tout $x \in M$, et avec la propriété $\sigma(f, f') = 0$ pour tout $f \in F_x$, $f' \in (F_x)^{\perp}_{\omega_x}$, $x \in M$.

Comme dans la démonstration du Théorème 3.2, pour chaque $x \in M$ nous pouvons maintenant construire à partir du produit scalaire $\sigma_x: E_x \times E_x \to \boldsymbol{R}$ et de la forme symplectique $\omega_x: E_x \times E_x \to \boldsymbol{R}$ sur E_x, une structure complexe $J_x: E_x \to E_x$ et une forme hermitienne $h_x: E_x \times E_x \to \boldsymbol{C}$ avec les propriétés (1), (2) et (3) de ce théorème. $J: E \to E$ et $h: E \underset{M}{\times} E \to \boldsymbol{C}$ sont les applications uniques définies par $J_x = J | E_x \to E_x$ et $h_x = h | E_x \times E_x \to \boldsymbol{C}$ pour tout $x \in M$. Il ne reste plus qu'à démontrer que J et h sont différentiables. Etant donné qu'il s'agit d'un énoncé local, nous choisissons, sur un voisinage U d'un point donné $u \in M$, des champs de vecteurs $f_1, \ldots, f_{2n}$ à valeurs dans E tels que $(f_1(u), \ldots, f_{2p}(u))$ et $(f_{2p+1}(u), \ldots, f_{2n}(u))$ soient des bases orthonormées de F_u resp. $(F_u)^{\perp}_{\omega_u}$ par rapport à σ_u. L'application définie par

$$(u, x) \to \sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu f_\nu(u), \qquad \text{ou } x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \boldsymbol{R}^{2n},$$

est un isomorphisme de fibré $U \times \boldsymbol{R}^{2n} \to E_U$, où la métrique de Riemann $\sigma | E_U \times E_U \to \boldsymbol{R}$ sur E_U correspond à la métrique standard constante sur $U \times \boldsymbol{R}^{2n}$. Pour simplifier l'écriture, prenons $E_U = U \times \boldsymbol{R}^{2n}$ et

$$\sigma(x, y) = \sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu y_\nu, \qquad \text{ou } x = (x_1, \ldots, x_{2n}),\ y = (y_1, \ldots, y_{2n}) \in \boldsymbol{R}^{2n}.$$

Alors pour tout $u \in U$,

$$\omega_u(x, y) = \sum_{\nu,\mu=1}^{2n} \omega_{\nu\mu}(u) x_\nu y_\mu$$

les fonctions à valeurs réelles $\omega_{\nu\mu}$ étant différentiables sur U. De plus $\omega(u) = (\omega_{\nu\mu}(u))_{\nu,\mu=1,\ldots,2n}$ est une matrice antisymétrique. Nous procédons comme dans la preuve du Théorème 3.2. et tout d'abord nous déterminons les automorphismes K_u, $u \in U$ de E_u avec $\sigma(K_u(x), y) = \omega_u(x, y)$. Ceux-ci déterminent de manière unique des matrices $K(u) = (K_{\nu\mu}(u))_{\nu,\mu=1,\ldots,2n}$ telles que $K_u(x) = K(u) \circ x$. On vérifie immédiatement que $K(u) = -\omega(u)$. A l'automorphisme K_u^t, conjugué de K_u par rapport à σ, correspond la matrice $(K(u))^t = \omega(u)$ et au produit $K_u \circ K_u^t$, la matrice $K(u) \circ K(u)^t = -(\omega(u))^2 \in \mathrm{Sym}^+(2n, \boldsymbol{R})$ (ensemble des matrices $2n \times 2n$ symétriques, définies positives), ce qui veut dire que K_u, K_u^t et $K_u \circ K_u^t$ dépendent différentiablement de $u \in U$. Comme

$$\sqrt{\ }: \operatorname{Sym}^+(2n, \boldsymbol{R}) \to \operatorname{Sym}^+(2n, \boldsymbol{R})$$

est un difféomorphisme, il existe des matrices $P(u) \in \operatorname{Sym}^+(2n, \boldsymbol{R})$ différentiables par rapport à $u \in U$ avec $(P(u))^2 = -(\omega(u))^2$.

Cela nous détermine, de manière unique, des automorphismes P_u symétriques et définis positifs de $(\boldsymbol{R}^{2n}, \sigma)$ avec $P_u^2 = K_u \circ K_u^t$ et qui dépendent différentiablement de $u \in U$. Par conséquent il en est de même pour les automorphismes $J_u = P_u^{-1} \circ K_u$, $u \in U$. Nous avons ainsi montré que $J: E \to E$ est différentiable. Comme $h_u(e, e') = \omega_u(e, J_u e') - i\omega_u(e, e')$ pour tout $u \in M$ et tout $e, e' \in E_u$, $h: E \times_M E \to \boldsymbol{C}$ est aussi différentiable.

A partir des Théorèmes 3.4. et 2.1., on en déduit immédiatement le théorème, formulé dans l'introduction, concernant la stabilité des feuilletages compacts $\mathscr{F}$ des variétés symplectiques (M, ω). Les énoncés (1) et (2) de ce théorème s'obtiennent en appliquant le Théorème 3.4. sur le fibré tangent symplectique (TM, ω) de (M, ω) et le sous-fibré symplectique F de TM correspondant à $\mathscr{F}$. L'énoncé (3) est alors identique au Théorème 2.1..

4 - Exemple

Nous voulons présenter une variété symplectique compacte (M, ω) qui ne peut porter aucune structure complexe, ce qui en ferait une variété kählérienne (voir [**19**]). D'autre part nous allons construire sur (M, ω) un feuilletage compact symplectique, et par conséquent stable.

Nous partons de $\boldsymbol{R}^4$ avec la structure symplectique $\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}y_2$ (où x_1, x_2, y_1, y_2 sont les coordonnées de $\boldsymbol{R}^4$). G est le groupe engendré par les transformations symplectiques suivantes de $(\boldsymbol{R}^4, \Omega)$:

$$\begin{aligned}
a: &\quad (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2, y_1, y_2)\,,\\
b: &\quad (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2 + 1, y_1, y_2)\,,\\
c: &\quad (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2, y_1 + 1, y_2)\,,\\
d: &\quad (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 + y_1, x_2, y_1, y_2 + 1)\,.
\end{aligned}$$

$M = \boldsymbol{R}^4/G$ est une variété symplectique compacte avec la structure symplectique ω induite par Ω (pour laquelle on a $\pi^*\omega = \Omega$ où $\pi: \boldsymbol{R}^4 \to M$ désigne la projection canonique sur le quotient $M = \boldsymbol{R}^4/G$).

Le sous-groupe des commutateurs $[G, G] = \{h^{-1}g^{-1}hg;\ h, g \in G\}$ de G est égal à $\{a^n;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$ et $G/[G, G]$ est isomorphe à $\boldsymbol{Z}^3$, comme on peut le vérifier facilement, c'est-à-dire que le premier nombre de Betti $b_1(M)$ de M est égal à 3. Comme tous les nombres de Betti impairs d'une variété kählérienne compacte sont pairs, M ne peut pas porter la structure d'une variété kählérienne; en particulier les structures presque kählériennes sur M, qui existent en raison du Théorème 1 (voir Introduction), ne sont pas kählériennes.

La projection $\tilde{p}\colon \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$, $(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_2, y_2)$ induit une projection $p\colon M = \boldsymbol{R}^4/G \to \boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2 = T$. Les fibres $p^{-1}([x_2, y_2])$ de p sont des tores dont le domaine fondamental est le carré unitaire du plan x_1, y_1.
$\omega\,|p^{-1}([x_2, y_2]) = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1$ n'est pas dégénérée, i.e. les fibres de p forment un feuilletage symplectique de M. Ce feuilletage est évidemment stable. Il se laisse le mieux décrire comme fibré en tores (non trivial) sur le tore T.

Bibliographie

[1] R. ABRAHAM and J. E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, Benjamin-Cummings, Reading, Mass. 1978.

[2] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*, Princeton Univ. Press 1946.

[3] R. EDWARDS, K. MILLETT and D. SULLIVAN, *Foliations with all leaves compact*, Topology **16** (1977), 13-32.

[4] C. EHRESMANN, *Les connections infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de topologie, Bruxelles (1950), 29-55.

[5] D. B. A. EPSTEIN, *Periodic flows on three manifolds*, Ann. of Math. **95** (1972), 66-82.

[6] D. B. A. EPSTEIN, *Foliations with all leaves compact*, Ann. Inst. Fourier, (Grenoble) **26** (1976), 265-282.

[7] D. B. A. EPSTEIN and E. VOGT, *A counter-example to the periodic orbit conjecture in codimension* 3, Ann. of Math. **108** (1978), 539-552.

[8] A. HAEFLIGER, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides*, Comment. Math. Helv. **32** (1958), 248-329.

[9] H. HOLMANN, *Analytische periodische Strömungen auf kompakten komplexen Räumen*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), 251-257.

[10] H. HOLMANN and H. RUMMLER, *Alternierende Differentialformen*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1981).

[11] T. MÜLLER, *Beispiel einer periodischen instabilen holomorphen Strömung*, Enseignement Math. **25** (1980), 309-312.

[12] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Actualités Sci. et Indust. **1183**, Hermann, Paris 1952.

[13] H. Rummler, *Kompakte Blätterungen durch Minimalflächen*, Habilitationsschrift, Freiburg i. Ue. 1978.

[14] H. Rummler, *Métriques Kähleriennes et surfaces minimales*, Enseignement Math. **24** (1978), 305-310.

[15] H. Rummler, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compactes*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 224-239.

[16] D. Sullivan, *A counterexample to the periodic orbit conjecture*, I.H.E.S. Publ. Math. **46** (1976).

[17] D. Sullivan, *A new flow*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 331-332.

[18] E. Vogt, *Foliations of codimension 2 with all leaves compact*, Manuscripta Math. **18** (1976), 187-212.

[19] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1977.

* * *