Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10* (1984), 133-137

GIUSEPPE TOMASSINI (*)

# L'algebra delle funzioni olomorfe di ordine finito

**1** – Nella teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse su un dominio di $\boldsymbol{C}^n$ (o di una varietà complessa) due problemi si presentano in modo naturale

($A$) estensione di funzione olomorfe appartenenti a particolari classi

($B$) fattorizzazione.

I dati relativi a questi problemi sono

(1) un dominio $D \subset \boldsymbol{C}^n$ e un sottoinsieme analitico (complesso) $V$ di $D$

(2) due algebre o più in generale due spazi vettoriali $\mathscr{A}(V)$, $\mathscr{B}(D)$ di funzioni olomorfe su $V$ e su $D$ rispettivamente con un omomorfismo

$$\varrho \colon \mathscr{B}(D) \to \mathscr{A}(V)$$

(che di solito è la restrizione).

Il problema ($A$) consiste allora nel vedere sotto quali condizioni $\varrho$ è suriettivo; il problema ($B$) si può formulare così: supponiamo che in $\mathscr{B}(D)$ esistano $f_1, \dots f_m$ che generano il fascio $\mathscr{I}_V$ degli ideali di $V$; allora $f_1, \dots, f_m$ generano l'ideale

$$I(V) = \{f \in \mathscr{B}(D) \colon f_{|V} = 0\}$$

di $\mathscr{B}(D)$?

Il punto di partenza in quest'ordine di questioni è la teoria classica di Oka, Cartan, Serre che dà risultati completi nel caso che $D$ sia un dominio di olomorfia, $\mathscr{A}(V)$ e $\mathscr{B}(D)$ coincidano con le algebre $\mathscr{O}(V)$ o $\mathscr{O}(D)$ delle funzioni olomorfe su $V$ e $D$ rispettivamente ([7]).

---

(*) Indirizzo: Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56100 Pisa, Italia.

Per quanto riguarda altre classi di funzioni, particolarmente importanti per l'Analisi Complessa sono l'algebra $LH^\infty$ delle funzioni olomorfe e limitate, l'algebra $A^{(k)}$ delle funzioni olomorfe e regolari di classe $C^k$ fino al bordo, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$, e gli spazi $H^p$ di Hardy; lo studio di questi spazi di funzioni, in relazione ai problemi $(A)$ e $(B)$, ha prodotto, specialmente a partire dall'inizio degli anni '70, vari lavori a cui rimandiamo per i risultati più significativi ([**1**], [**2**], [**4**], [**5**], [**6**], [**8**], [**9**], [**13**], [**14**], [**16**], [**17**]).

Qui vogliamo occuparci dell'algebra delle funzioni olomorfe *di ordine finito* (o *a crescenza polinomiale*).

**2** – Sia $D \subsetneqq \boldsymbol{C}^n$ un dominio e sia $z \mapsto \delta(z) = \operatorname{dist}(z, bD)$, $z \in D$ la funzione *distanza dal bordo*.

Diremo che una funzione $f$, continua su $D$, è *di ordine finito* (su b$D$), se per ogni compatto $K$ di $\boldsymbol{C}^n$ esiste $\lambda = \lambda(K)$ tale che

$$\sup_{z \in K \cap D} \delta(z)^\lambda |f(z)| < +\infty .$$

Se $A$ è un sottoinsieme di b$D$ diremo che $f$ ha *ordine al più* $\lambda$ su $A$ (e scriveremo $\operatorname{ord}_A(f) \leqslant \lambda$), se per ogni $z^0 \in A$ esiste un intorno di $U$ di $z^0$ tale che

$$\sup_{z \in U \cap D} \delta(z)^\lambda |f(z)| < +\infty .$$

Noteremo con $\mathscr{P}(D)$ l'algebra delle funzioni di ordine finito (su b$D$) che sono olomorfe su $D$.

Se $V$ è un sottoinsieme analitico di un intorno di $\overline{D}$, in modo analogo si definisce l'algebra $\mathscr{P}(V \cap D)$ delle funzioni olomorfe su $V \cap D$ e *di ordine finito*.

Osservazioni.

(1) Una delle ragioni che rendono interessante l'algebra $\mathscr{P}(D)$ è che, se b$D$ è regolare di classe $C^\infty$, $\mathscr{P}(D)$ si identifica con l'insieme delle funzioni olomorfe su $D$ aventi traccia su b$D$ nel senso delle distribuzioni ([**10**]).

(2) Se $D$ è limitato, $\mathscr{P}(D)$ può essere dotata in modo naturale di una struttura di algebra di Fréchet e se $D$ non è limitato di una struttura di limite proiettivo di algebre di Fréchet.

**3** – Riguardo ai problemi posti all'inizio i primi risultati concernenti le funzioni olomorfe di ordine finito sono dovuti a R. Narasimhan, con i teoremi seguenti

Teorema 1. *Siano* $D \subsetneqq \boldsymbol{C}^n$ *un dominio, $g$ una funzione olomorfa su un* *intorno di* $\bar{D}$ *e* $f$ *una funzione olomorfa su* $D$ *e di ordine finito. Allora, se* $f$ *è divisibile per* $g$, $f/g$ *è di ordine finito.*

Teorema 2. *Supponiamo che* $D$ *sia un dominio d'olomorfia limitato, avente un sistema fondamentale di intorni costituito da domini di olomorfia, e che* $V$ *sia una sottovarietà complessa di un intorno di* $\bar{D}$*. Allora l'omomorfismo di restrizione* $\mathscr{P}(D) \to \mathscr{P}(V \cap D)$ *è suriettivo.*

La dimostrazione del Teorema 1 è in [**11**]; il Teorema 2 si trova enunciato in [**12**].

Il Teorema 1 è stato generalizzato successivamente da Y.T. Siu [**15**], nelle stesse ipotesi per $D$, con il seguente risultato: se $(g_{ij})$ $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, è una matrice di funzioni olomorfe su un intorno di $\bar{D}$ e $f_1, \ldots, f_r$ sono funzioni olomorfe su $D$ di ordine finito e della forma

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j g_{ij}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ olomorfe, allora esistono $\mu_1, \ldots, \mu_s$ olomorfe su $D$ e di ordine finito tali che

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} \mu_j g_{ij} .$$

**4** – Strumento essenziale, sia per il Teorema 2 che per quello di Siu è la risoluzione del sistema di Cauchy-Riemann $\bar{\partial} u = f$ quando $f$ è una forma $C^\infty$ su $D$, di ordine finito (i.e. a coefficienti di ordine finito).

I risultati più precisi in quest'ambito si devono a Henkin [**8**]: se $D$ è un dominio limitato con bordo $C^\infty$ stettamente convesso e $f$ è $\bar{\partial}$-chiusa di ordine al più $k$ allora $\bar{\partial} u = f$ ha una soluzione $C^\infty$ su $D$ e di ordine al più $k-1$.

Questo teorema di Henkin si può ulteriormente precisare [**3**]:

Teorema 3. *Sia* $D \subset \boldsymbol{C}^n$ *un dominio limitato con bordo* $C^\infty$ *strettamente pseudoconvesso e sia* $f$ *una* $(p, q)$*-forma* $C^\infty$ *su* $D$*,* $\bar{\partial}$*-chiusa e tale che:* $\operatorname{ord}_{bD}(f) \leqslant k$ *e* $\operatorname{ord}_A(f) \leqslant k' < k$, $A \subset bD$*. Allora l'equazione* $\bar{\partial} u = f$ *ha una soluzione* $u \in C^\infty(D)$ *tale che* $\operatorname{ord}_{bD}(u) \leqslant k-1$ *e* $\operatorname{ord}_A(u) \leqslant k'-1$.

Il teorema precedente ed un risultato sull'approssimazione delle funzioni di $\mathscr{P}(D)$ con funzioni olomorfe su un intorno di $\bar{D}$ ($D$ limitato) consentono di estendere il teorema di Henkin al caso in cui $D$ sia un dominio non limitato con bordo $C^\infty$ strettamente pseudoconvesso ([**3**]). Applicando allora i risultati precedenti e le tecniche di dimostrazione utilizzate in [**6**] e [**17**] allo studio dei problemi $(A)$ e $(B)$ per i domini illimitati si ottengono i teoremi ([**3**])

Teorema 4. *Supponiamo che $D \subsetneqq C^n$ sia un dominio con bordo $C^\infty$ strettamente pseudoconvesso. Allora per ogni punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ l'ideale massimale $M_a = \{f \in \mathscr{P}(D): f(a) = 0\}$ è generato da $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$.*

Teorema 5. *Nelle stesse ipotesi per $D$ supponiamo che $V$ sia un sottoinsieme analitico di un intorno di $\bar{D}$, non singolare su $\mathrm{b}D$, che incontri $\mathrm{b}D$ trasversalmente. Allora*

(i) *l'omomorfismo di restrizione $\mathscr{P}(D) \to \mathscr{P}(V \cap D)$ è suriettivo*

(ii) *se $f_1, \ldots, f_n$, olomorfe su un intorno di $\bar{D}$ generano $\mathscr{I}_V$ (il fascio degli ideali di $V$), allora generano l'ideale $\{f \in \mathscr{P}(D): f_{|V} = 0\}$.*

## Bibliografia


[1] H. Alexander, *Extending bounded holomorphic functions from certain subvarieties of a polydisc*, Pac. J. Math. **29** (1969), 485-490.

[2] A. Andreotti and W. Stoll, *The extension of bounded holomorphic functions from hypersurface in a polycylinder*, Rice Univ. Studies **56** (1970) 199-222.

[3] P. Cerrone et G. Tomassini, *Sur l'algèbre des fonctions holomorphes d'ordre fini* (in preparazione).

[4] P. S. Chee, *Zero sets and extensions of bounded holomorphic functions in polydiscs*, Proc. Am. Math. Soc. **60** (1976), 109-115.

[5] J. A. Cima, *An extension theorem for $H^p$-functions*, Proc. Am. Math. Soc. **42** (1974), 529-532.

[6] P. De Bartolomeis and G. Tomassini, *Finitely generated ideals in $A^\infty(D)$*, Adv. Math. **46** (1982), 162-170.

[7] R. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, Englewood Cliff, N. J., USA 1965.

[8] G. M. Henkin, *Continuation of bounded holomorphic functions from submanifolds in general position to strictly pseudo-convex domains*, Math. USSR Izvestija **6** (1972), 536-563.

[9] N. Kerzman and A. Nagel, *On finitely generated ideals in certain function algebras*, J. of Funct. Anal. **7** (1971), 212-215.

[10] S. Łojasiewicz et G. Tomassini, *Valeurs au bord des formes holomorphes*, Proc. of Intern. Conferences, Cortona, Italy (1976-77), 222-246.

[11] R. Narasimhan, *On holomorphic functions of polynomial growth on a bounded domain*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **21** (1967), 161-166.

[**12**] R. Narasimhan, *Cohomology with bounds on complex spaces*, Several Complex Var. I, Maryland 1970, 141-150, Lecture Notes in Math. **155**, Springer, Berlin 1970.

[**13**] N. Øvrelid, *Generators of the maximal ideals of* $A(\bar{D})$, Pac. J. Math. **39** (1971), 219-223.

[**14**] W. Rudin, *Function theory in polydisc*, Benjamin, New York 1969.

[**15**] Y. T. Siu, *Holomorphic functions of polynomial growth on bounded domains*, Duke Math. J. **37** (1970), 77-84.

[**16**] H. Skoda, *Application des techniques* $L^2$ *à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (IV) **5** (1972), 545-579.

[**17**] G. Tomassini, *Sur les algèbres* $A^0(\bar{D})$ *et* $A^\infty(\bar{D})$ *d'un domaine pseudoconvexe non borné*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **10** (1983), 243-256.

* * *