Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10*** (1984), 139-142

NICOLAE TELEMAN (*)

Operatori ellittici su spazi localmente compatti

Intendo presentare qui alcune tecniche che permettono di estendere i principali risultati di [**6**], [**5**] e [**7**] alla categoria delle varietà topologiche localmente compatte. Queste tecniche potranno avere applicazioni anche nella teoria della K-omologia analitica.

Primo passo in questo ordine di idee è la definizione di *operatore ellittico astratto di ordine arbitrario su spazi localmente compatti.*

Nel 1969 M.F. Atiyah aveva già introdotto in [**1**] la nozione di *operatore ellittico astratto* (*di ordine zero*) *su spazi metrici compatti*. Un tale operatore su uno spazio metrico compatto X è una terna (r_1, r_0, T), dove

(1) r_i, $i = 0, 1$, è una rappresentazione della C^*-algebra $C^0(X)$ delle funzioni complesse continue di X su uno spazio di Hilbert separabile H_i,

(2) per qualunque funzione continua f su X, l'*operatore*

$$T \circ r_1(f) - r_0(f) \circ T$$

è un operatore compatto,

(3) $T: H_1 \to H_0$ è un operatore di Fredholm.

Per esempio, se $T: C^\infty(E_1) \to C^\infty(E_0)$ è un operatore pseudo-differenziale ellittico di ordine zero sulla varietà differenziabile compatta X, dove E_1, E_0 sono dei fibrati vettoriali complessi su X, allora $H_i = L_2(E_i)$ sono dei $C^0(X)$-moduli, e le proprietà (1), (2), (3) sono soddisfatte.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università «La Sapienza» di Roma, P.le A. Moro, 00185 Roma, Italia.

La nozione di operatore ellittico astratto sta alla base della *teoria della K-omologia analitica* creata da Brown-Douglas-Fillmore e da Kasparov ([2], [3]).

La proprietà di *ellitticità* di un operatore pseudo-differenziale di qualsiasi ordine viene definita in termini del simbolo dell'operatore, comunque sia la varietà dove l'operatore è definito, compatta o no, cioè in termini locali. Tuttavia, per gli operatori pseudo-differenziali su varietà compatte, la proprietà di ellitticità è equivalente alla proprietà di essere un *operatore di Fredholm*. Quest'ultima affermazione ha permesso ad Atiyah di astrattizzare la nozione di operatore ellittico di ordine zero per gli spazi compatti.

È importante però introdurre la nozione di operatore ellittico astratto, di qualsiasi ordine, anche su spazi che non siano compatti.

A tale scopo, la definizione di ellitticità (astratta) dovrà essere *localizzata*. Per quanto riguarda la difficoltà collegata all'ordine dell'operatore, si noti che gli spazi di Sobolev, tra i quali gli operatori pseudo-differenziali (di ordine arbitrario) inducono operatori continui, non sono moduli sull'intera algebra delle funzioni continue sulla varietà di base.

Queste osservazioni giustificano la considerazione della seguente struttura.

Sia C una categoria di spazi topologici localmente compatti con una struttura addizionale A, come, per esempio, quella di varietà topologica, oppure di varietà PL, oppure di varietà di Lipschitz.

La struttura A è, per definizione, un funtore controvariante dalla categoria C alla categoria delle algebre di Banach, tale che, per ogni $X \in \operatorname{Obj} C$, $A(X) \subseteq C^0(X)$. L'algebra $A(X)$ deve separare i chiusi disgiunti di X.

Un *operatore quasi-locale* su $X \in \operatorname{Obj} C$ è, per definizione, una terna (r_1, r_0, T), dove

(1) r_i, $i = 0, 1$, è una rappresentazione dell'algebra $A(X)$ su uno spazio di Hilbert separabile H_i,

(2) $T\colon H_1 \to H_0$ è un operatore continuo, e per ogni $f \in A(X)$, l'*operatore* $T \circ r_1(f) - r_0(f) \circ T$ è compatto.

Gli operatori $r_i(f)$, $f \in A(X)$, si possono pensare come *moltiplicatori su* H_i. Perciò, ha senso parlare del supporto di un operatore quasi-locale.

Siano U, X_1, X_2 tre oggetti di C, e siano

$$X_1 \overset{i_1}{\hookleftarrow} U \overset{i_2}{\hookrightarrow} X_2$$

due morfismi in C, con i_1, i_2 omeomorfismi con immagini aperte.

Se D_1, D_2 sono operatori quasi-locali su X_1, X_2 rispettivamente, si può definire in maniera naturale quando gli operatori D_1, D_2 coincidono su U, modulo operatori compatti.

Sia D un operatore quasi-locale sullo spazio localmente compatto X. Per definizione, D è un *operatore ellittico astratto* su X se, per ogni punto $x \in X$, esiste un intorno U_x di x ed un operatore ellittico astratto D_x, nel senso di Atiyah, su uno spazio compatto $M_x \in \operatorname{Obj} C$, tale che gli operatori D e D_x coincidano su U_x; naturalmente qui si intende che U_x sia un sottospazio aperto anche di M_x.

Sia $D_i = (r_{i,1}, r_{i,0}, T_i)$, $i = 0, 1$, un operatore ellittico sullo spazio localmente-compatto X_i. Sia $U \subset X_i$, $i = 0, 1$, tale che $X_i - U = K_i$ è un compatto. Se gli operatori D_i coincidono su U, allora possiamo associare, per ogni funzione $f \in A(X)$, con $\operatorname{Supp} f \subset U$, un nuovo operatore (chiamato *operatore differenza*)

$$\Delta(D_1, D_0, f) = \begin{vmatrix} (1-f)\tilde{D}_1(1-f) & -f^2 \\ f^2 & (1-f)\tilde{D}_0(1-f) \end{vmatrix},$$

dove

$$\tilde{D}_i = \begin{vmatrix} 0 & -D_i \\ D_i^* & 0 \end{vmatrix}.$$

Si dimostra che *l'operatore $\Delta(D_1, D_0, f)$ è un operatore di Fredholm.*

La costruzione dell'operatore differenza è suggerita dalle considerazioni fatte in [**6**] per la dimostrazione del teorema di excisione.

Le considerazioni fatte in [**6**] si possono usare anche in questo caso per dimostrare che *l'indice dell'operatore differenza è indipendente dalla funzione f.*

Applichiamo ora questa tecnica alla seguente situazione geometrica. Sia M una varietà lipschitziana, localmente compatta, e sia

$$E \equiv \{0 \to E_1 \xrightarrow{\alpha} E_0 \to 0\}$$

un fibrato vettoriale complesso, virtuale, con supporto compatto su M.

Per ognuno dei fibrati E_i si può costruire un *operatore di segnatura* D_{E_i} così come in [**6**]. Gli operatori di segnatura sono degli operatori differenziali del primo ordine, con coefficienti in generale discontinui, e sono degli operatori ellittici astratti nel senso sopra indicato.

L'isomorfismo α permette di accertare che gli operatori D_{E_i}, $i = 0, 1$, coincidono sul complementare del supporto, compatto, di E. Ciò basta per costruire l'*operatore di Fredholm differenza*

$$\Delta(D_{E_1}, D_{E_0}, \alpha) .$$

Si dimostra che *l'indice di questo operatore dipende solamente dalla classe* $[E] \in K^\circ_{\mathrm{comp}}(M)$. Per arrivare a questo risultato, si debbono applicare le principali tecniche di [**6**].

Da ciò segue come corollario una *definizione costruttiva delle classi di Pontrjagin razionali di* M e la loro *invarianza topologica*. L'invarianza topologica delle classi di Pontrjagin razionali delle varietà Lipschitziane localmente compatte risulta, come appare in [**5**], da queste tecniche e dal teorema fondamentale di Sullivan sull'esistenza ed unicità delle strutture lipschitziane sulle varietà topologiche di dimensione diversa da quattro ([**4**]).

Una discussione più dettagliata dei risultati sopra esposti costituirà oggetto di un altro lavoro.

Bibliografia

[**1**] M. F. Atiyah, *Global theory of elliptic operators*, Proc. Int. Conf. Functional analysis and related topics, Tokyo (1969), 21-30.

[**2**] L. G. Brown, R. G. Douglas and P. A. Fillmore, *Extensions of C*-algebras and K-homology*, Ann. of Math. **105** (1977), 265-324.

[**3**] G. G. Kasparov, *Topological invariants of elliptic operators*, I: *K-homology*, Math. USSR-Izv. **9** (1975), 751-792 (english translation).

[**4**] D. Sullivan, *Hyperbolic geometry and homeomorphisms in geometric topology*, Proc. Georgia Topology Conf., Athens, Georgia (1977), 543-555, Ed. J. C. Cantrell, Academic Press, New York 1979.

[**5**] D. Sullivan and N. Teleman, *An analytic proof of Novikov's theorem on the rational Pontrjagin classes*, I.H.E.S. Publ. Math. **58** (1983).

[**6**] N. Teleman, *The index of signature operators on Lipschitz manifolds*, I.H.E.S. Publ. Math. **58** (1983).

[**7**] N. Teleman, *The index theorem on topological manifolds*, Acta Math. (1984).

* * *