Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 79-90

ANTONELLA FIACCA (*)

Un teorema di esistenza per equazioni differenziali multivoche (**)

1 - Introduzione

Molti Autori si sono occupati del problema dell'esistenza di soluzioni per il problema

$$x' \in F(t, x) \qquad x(t_0) = x_0 , \tag{1.1}$$

essendo F una multifunzione definita in $I \times \boldsymbol{R}^n$, ove I è un intervallo di $\boldsymbol{R}$.

A. F. Filippov in [**9**]$_{1,2}$ consegue vari teoremi di esistenza per il problema (1.1), nei quali richiede essenzialmente che, per ogni (t, x), $F(t, x)$ sia *compatto* e *convesso* e che la multifunzione F sia *semicontinua superiormente rispetto a* x, oppure che, per ogni (t, x), $F(t, x)$ sia *compatto* mentre la multifunzione F sia *continua globalmente* e soddisfi una condizione di Lipschitz.

H. Hermes in [**10**] studia il problema (1.1) e, tra l'altro, si chiede se può essere assicurata l'esistenza di soluzioni nelle sole ipotesi che $F(t, x)$ sia *compatto* e la multifunzione F sia continua globalmente.

A. F. Filippov in [**9**]$_3$ risolve la congettura di Hermes provando per l'appunto che, imponendo a $F(t, x)$ di essere compatto e a F di essere continua, il problema (1.1) ha soluzioni.

Successivamente H. Kaczyński e C. Olech in [**13**] provano addirittura l'esistenza di soluzioni del problema (1.1) in ipotesi più ampie, e cioè lasciando inalterata l'ipotesi di compattezza per $F(t, x)$ e sostituendo l'ipotesi di conti-

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 06100 Perugia, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 13-III-1983.

nuità globale con la più debole ipotesi che F sia continua rispetto a x, misurabile rispetto a t e verifichi la condizione

(i) esiste un'applicazione $m \in L^1(I)$ con la proprietà

$$y \in F(t, x) \Rightarrow \|y\| \leqslant m(t) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^n .$$

C. J. Himmelberg e F. S. Van Vleck in [**11**] provano l'esistenza di soluzioni del problema (1.1) nelle ipotesi che $F(t, x)$ sia *chiuso* e che la multifunzione F sia misurabile rispetto a t e Lipschitziana rispetto a x.

Molti altri Autori si sono occupati del problema dell'esistenza di soluzioni del problema (1.1) [**1**], [**6**], [**8**], [**14**], alcuni estendendolo a spazi di Banach $[\mathbf{2}]_{1,2}$, [**5**], [**7**].

In [**3**] A. Bressan si occupa del problema (1.1) e, adottando un procedimento simile a quello seguito da H. A. Antosiewicz e A. Cellina in [**1**], prova un teorema di selezione e, come corollario, un teorema di esistenza per il problema supponendo che

(α) gli insiemi $F(t, x)$ siano compatti di un sottospazio *limitato* di $\boldsymbol{R}^n$;

($\alpha\alpha$) F sia semicontinua inferiormente.

Noi qui abbiamo ripreso in esame il problema (1.1). Ispirandoci alle linee di dimostrazione di cui in [**1**] e in [**3**], abbiamo provato un teorema di selezione (cfr. qui Teorema I) e, come corollario, un teorema di esistenza (cfr. qui Teorema II). Per noi una soluzione del problema (1.1) esiste se sono verificate la (i), la ($\alpha\alpha$) e se inoltre sussiste la seguente condizione

($\tilde{\alpha}$) gli insiemi $F(t, x)$ siano compatti di un sottospazio $X \subset \boldsymbol{R}^n$, *non* necessariamente *limitato*.

Mentre dunque in [**3**] è richiesto che gli insiemi $F(t, x)$ siano, oltre che compatti, uniformemente limitati, noi, non sottoponendo il sottospazio X alla condizione di limitatezza, veniamo ad abbandonare la restrizione che gli insiemi $F(t, x)$ siano uniformemente limitati.

Peraltro, i nostri teoremi contengono strettamente i Teoremi 1 e 2 di A. Bressan [**3**]. Infatti, è subito visto che, se è verificata la ipotesi (α), sussistono le nostre ipotesi (i) e ($\tilde{\alpha}$), mentre (cfr. qui Osservazione) esistono multifunzioni F che soddisfano alle nostre ipotesi ma che *non* verificano le ipotesi dei Teoremi 1 e 2 di A. Bressan.

2 – Denotiamo con I l'intervallo non degenere $[0, T]$ e con μ la misura di Lebesgue su I; sia poi X un sottospazio di $\boldsymbol{R}^n$ *non* necessariamente limitato e $\Omega(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti e compatti di X. Per ogni coppia di insiemi $A, B \in \Omega(X)$, sia $D(A, B)$ la distanza di Hausdorff di A e B

$$(2.1) \qquad D(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \quad \sup_{b\in B} d(A, b)\},$$

ove $d(a, B) = \inf_{b\in B} \|a - b\|$ e $\|\cdot\|$ una norma in $\boldsymbol{R}^n$.

Denotiamo poi con $\Delta(A)$ il diametro dell'insieme A e con $B[A, \varepsilon]$ l'insieme $B[A, \varepsilon] = \{b: d(b, A) \leqslant \varepsilon\}$.

Indicati inoltre con $\mathscr{C}(I)$ lo spazio di Banach delle funzioni $u: I \to \boldsymbol{R}^n$ continue e con $L^1(I)$ lo spazio di Banach delle funzioni $u: I \to \boldsymbol{R}^n$ integrabili secondo Lebesgue, siano $\|\cdot\|_{\mathscr{C}}$ e $\|\cdot\|_1$ rispettivamente le norme in $\mathscr{C}(I)$ e in $L^1(I)$.

Considerata una multifunzione $F: I \times \boldsymbol{R}^n \to \Omega(X)$, diremo (cfr. [**3**]) che essa è *semicontinua inferiormente* nel punto (t_0, x_0) se

(S.I.) fissato un numero $\varepsilon > 0$ esiste in corrispondenza un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$(2.2) \quad F(t_0, x_0) \subseteq B[F(t, x), \varepsilon] \qquad \forall (t, x) \in I \times \boldsymbol{R}^n \text{ con } d((t, x), (t_0, x_0)) \leqslant \delta \text{ (1)}.$$

Dato ora il problema

$$(2.3) \qquad x' \in F(t, x), \quad x(0) = 0,$$

definiamo *soluzione* un'applicazione $x: I \to \boldsymbol{R}^n$ assolutamente continua (A.C.) con le proprietà

$$(2.4) \qquad x'(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.o. in } I, \qquad (2.5) \qquad x(0) = 0.$$

3 – Andiamo ora a provare due lemmi che utilizzeremo per conseguire il Teorema I e il Teorema II di **4**.

Lemma I. *Se $F: I \times \boldsymbol{R}^n \to \Omega(X)$ è una multifunzione semicontinua inferiormente in $I \times \boldsymbol{R}^n$, fissata una funzione $u_0 \in \mathscr{C}(I)$ e due numeri positivi ε, ε', esiste un altro numero $\varrho = \varrho(\varepsilon, \varepsilon') > 0$ e un compatto $E = E(\varepsilon, \varepsilon') \subseteq I$ con $\mu(I - E) \leqslant \varepsilon'$, in modo da aversi*

$$(3.1) \quad F(t, u_0(t)) \subseteq B[F(t, u(t)), \varepsilon] \qquad \forall u \in \mathscr{C}(I) \text{ con } \|u - u_0\|_{\mathscr{C}} \leqslant \varrho \qquad \forall t \in E.$$

Poiché F è semicontinua inferiormente in $I \times \boldsymbol{R}^n$, la multifunzione $\Gamma: t \mapsto F(t, u_0(t))$ è misurabile. Esiste allora (cfr. [4], Teorema 4.2) un compatto $E \subseteq I$ con $\mu(I - E) \leqslant \varepsilon'$ tale che la restrizione di Γ ad E è continua rispetto

(1) Qui d denota la metrica in $I \times \boldsymbol{R}^n$.

alla metrica di Hausdorff. Ne segue che esiste un numero $\sigma = \sigma(\varepsilon/2) > 0$ con la proprietà

$$(3.2) \qquad D(F(t', u_0(t')), F(t'', u_0(t''))) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t', t'' \in E \ \text{ con } |t'-t''| \leqslant \sigma.$$

D'altra parte, essendo l'insieme $E_0 = \{(t, u_0(t)), t \in E\}$ compatto, è possibile ricoprirlo con un numero finito di bocce aperte B_i, $i = 1, \ldots, p$, che abbiano centro in certi punti $(t_i, u_0(t_i))$, $t_i \in E$, e raggio δ_i, $\delta_i \leqslant \sigma$, ove δ_i è scelto, come in (S.I.), in corrispondenza di $\varepsilon/2$ e di $(t_i, u_0(t_i))$.

Sia ora ϱ un numero positivo con la proprietà

$$(3.3) \qquad B[E_0, \varrho] \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_i .$$

Per ogni funzione $u \in \mathscr{C}(I)$, con $\|u - u_0\|_{\mathscr{C}} \leqslant \varrho$, e per ogni $t \in E$, $(t, u(t)) \in B_i$, per qualche $i = 1, \ldots, p$ e quindi si ha

$$(3.4) \qquad F(t_i, u_0(t_i)) \subseteq B[F(t, u(t)), \varepsilon/2] ,$$

mentre, dalla (3.2), per essere $\delta_i \leqslant \sigma$, risulta

$$(3.5) \qquad F(t, u_0(t)) \subseteq B\left[F(t_i, u_0(t_i)), \frac{\varepsilon}{2}\right] .$$

Tenendo presente (3.4) e (3.5) segue la (3.1), c.v.d.

Lemma II. *Sia $F: I \times \boldsymbol{R}^n \to \Omega(X)$ una multifunzione con le proprietà:*

(i) *esiste un'applicazione $m \in L^1(I)$ tale che*

$$y \in F(t, x) \Rightarrow \|y\| \leqslant m(t) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^n ;$$

(ii) *è semicontinua inferiormente in $I \times K$* (2).

In tali condizioni, se $\mathscr{K}$ è la famiglia delle funzioni $u: I \to \boldsymbol{R}^n$, $u \in$ (A.C.), con $u(0) = 0$, $\|u'(t)\| \leqslant m(t)$ q.o. in I, fissati due numeri positivi ε, ε', esiste

(2) Denotiamo con K la boccia chiusa di $\boldsymbol{R}^n$ con centro l'origine e raggio $R = \int_0^T m(t)\, dt$.

un'applicazione continua $g: \mathscr{K} \to L^1(I)$ *con le proprietà*:

$$(3.6) \qquad \mu(W(u)) \leqslant \varepsilon' \quad \forall u \in \mathscr{K}, \text{ ove } W(u) = \{t \in I: d(g(u)(t), F(t, u(t))) > \varepsilon\};$$

(3.7) *esiste un numero* $\delta_0 > 0$ *tale che, per ogni* $V \subseteq \mathscr{K}$ *con* $\Delta(V) \leqslant \delta_0$, *si ha*

$$(3.7)_1 \qquad \mu\Big(\bigcup_{u \in V} W(u)\Big) \leqslant 2 \cdot \varepsilon',$$

$$(3.7)_2 \qquad \mu(\{t \in I: \exists u, v \in V: g(u)(t) \neq g(v)(t)\}) \leqslant \varepsilon'.$$

Proviamo intanto che $\mathscr{K}$ è un sottoinsieme compatto di $\mathscr{C}(I)$. Denotata infatti con $\{u_n\}_{n \in N}$ una successione in $\mathscr{K}$, si ha da (i)

$$(3.8) \qquad \|u_n(t)\| \leqslant \int_0^t \|u_n'(s)\| \, \mathrm{d}s \leqslant \int_0^T m(t) \, \mathrm{d}t \qquad \forall n \in \boldsymbol{N};$$

$$(3.9) \qquad \|u_n(t') - u_n(t'')\| \leqslant \int_{t'}^{t''} m(t) \, \mathrm{d}t \qquad \forall t', t'' \in I \qquad \forall n \in \boldsymbol{N};$$

pertanto la successione $\{u_n\}_{n \in N}$ è equilimitata ed equicontinua; esiste allora una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}_k$ convergente a una funzione $u: I \to \boldsymbol{R}^n$ con le proprietà (cfr. Teorema 4.1 di [**8**])

$$(3.10) \qquad u \in (\text{A.C.}), \qquad \|u'(t)\| \leqslant m(t) \quad \text{q.o. in } I.$$

Essendo inoltre $u(0) = 0$, $u \in \mathscr{K}$, e pertanto $\mathscr{K}$ è compatto.

Dal Lemma I (³), per ogni $u \in \mathscr{K}$, in corrispondenza di ε, ε', esistono un numero $\varrho = \varrho(u) > 0$ e un compatto $E = E(u) \subseteq I$ tali che

$$(3.11) \qquad \mu(I - E(u)) \leqslant \varepsilon',$$

$$(3.12) \qquad F(t, u(t)) \subseteq B[F(t, \tilde{u}(t)), \varepsilon] \qquad \forall \tilde{u} \in \mathscr{K} \text{ con } \|u - \tilde{u}\|_{\mathscr{C}} \leqslant \varrho \qquad \forall t \in E.$$

Poiché $\mathscr{K}$ è compatto, è possibile ricoprirlo con un numero finito di bocce aperte $\{U_i\}_{i=1,\dots,q}$ con centro in certi punti u_i e raggio $\varrho_i = \varrho(u_i)$, $i = 1, \dots, q$. Denotiamo poi con $\{p_i\}_{i=1,\dots,q}$ una partizione continua dell'unità subordinata alla copertura $\{U_i\}_{i=1,\dots,q}$ (cfr. [**12**], pag. 118).

(³) Osserviamo che, se ci limitiamo a considerare le funzioni $u \in \mathscr{K}$, il Lemma I continua a sussistere con la più debole ipotesi (ii) del presente Lemma.

Per ogni $i = 1, \dots, q$ la multifunzione $\Gamma_i\colon t \mapsto F(t, u_i(t))$ è misurabile e quindi (cfr. Teorema 5.1 di [**4**]) ammette un selettore $v_i \in L^1(I)$. Posto

$$A_i^+ = E(u_i)\,, \qquad A_i^- = I - A_i^+\,, \tag{3.13}$$

e indicato con λ il vettore

$$\lambda = (Tp_1(u), \dots, Tp_q(u)) \qquad u \in \mathscr{K}\,, \tag{3.14}$$

costruiamo, come in [**3**], $\forall u \in \mathscr{K}$, una partizione $\{J_i(u)\}_{i=1,\dots,q}$ dell'intervallo $[0, T]$ per induzione: supponiamo cioè che siano stati definiti gli insiemi $J_k(u)$ $\forall k < i$, e costruiamo l'insieme $J_i(u)$. Poniamo intanto

$$Y_i(u) = I - \bigcup_{k<i} J_k(u)\,, \qquad Y_i^+(u) = Y_i(u) \cap A_i^+\,, \qquad Y_i^-(u) = Y_i(u) \cap A_i^-, \tag{3.15}$$

e, definita un'applicazione $\varphi_{i,u}\colon Y_i(u) \to \boldsymbol{R}$ nel seguente modo

$$\varphi_{i,u}(t) = \begin{cases} \mu([0, t] \cap Y_i^+(u)) & t \in Y_i^+(u) \\ \mu([0, t] \cap Y_i^-(u)) + \mu(Y_i^+(u)) & t \in Y_i^-(u)\,, \end{cases} \tag{3.16}$$

sia

$$J_i(u) = \varphi_{i,u}^{-1}([0, Tp_i(u)])\,. \tag{3.17}$$

Costruiamo ora l'applicazione $g\colon \mathscr{K} \to L^1(I)$ ponendo

$$g(u)(t) = \sum_{i=1}^{q} \chi[J_i(u)](t) \cdot v_i(t)\,, \tag{3.18}$$

ove con $\chi[J_i(u)]$ denotiamo la funzione caratteristica di $J_i(u)$. Dalla costruzione fatta, ripetendo il procedimento seguito in [**3**] per giungere alla (4.21), segue

$$\sum_{i=1}^{q} \mu(J_i(u) \cap A_i^+) \geqslant T - \varepsilon'\,. \tag{3.19}$$

Poiché peraltro da (3.12) si ha

$$W(u) \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} (J_i(u) \cap A_i^-)\,, \tag{3.20}$$

da (3.19) risulta

$$\mu(W(u)) \leqslant T - \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{q} (J_i(u) \cap A_i^+)\Big) \leqslant \varepsilon'\,, \tag{3.21}$$

che altro non è che la (3.6).

Essendo peraltro la famiglia $\{p_i\}_{i=1,\dots,q}$ equicontinua, in corrispondenza a ε'/Tq^3 esiste un numero $\delta_0 > 0$ tale che

$$(3.22)\qquad |p_i(v) - p_i(u)| \leqslant \frac{\varepsilon'}{Tq^3} \qquad \forall u, v \in \mathscr{K} \text{ con } \|u - v\|_{\mathscr{C}} \leqslant \delta_0 \qquad \forall i = 1, \dots, q .$$

Sia $V \subseteq \mathscr{K}$ con $\Delta(V) \leqslant \delta_0$. Al variare di $u, v \in V$, i vettori $\lambda = (Tp_1(u), \dots, Tp_q(u))$ e $\lambda' = (Tp_1(v), \dots, Tp_q(v))$ sono tali che

$$(3.23)\qquad \|\lambda - \lambda'\| \leqslant \sum_{i=1}^{q} T\,|p_i(u) - p_i(v)| \leqslant \frac{\varepsilon'}{q^2} .$$

Denotato allora con $\tilde{V}$ l'insieme dei vettori λ, λ' ottenuti al variare di $u, v \in V$, risulta $\Delta(\tilde{V}) \leqslant \varepsilon'/q^2$; posto inoltre

$$(3.24)\qquad \tilde{\Lambda} = \{t \in I\colon \exists i, \exists \lambda, \lambda' \in \tilde{V}\colon \ t \in J_i(\lambda),\ t \notin J_i(\lambda')\} ,$$

si ha

$$(3.25)\qquad \mu(\tilde{\Lambda}) \leqslant \varepsilon' ,$$

da cui segue

$$(3.26)\qquad \mu(\{t \in I\colon \exists u, v \in V\colon g(u)(t) \neq g(v)(t)\}) \leqslant \varepsilon' .$$

Poiché peraltro da (3.20), (3.21) e (3.25) risulta

$$(3.27)\qquad \mu\Big(\bigcup_{u \in V} W(u)\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{u \in V} \Big(\bigcup_{i=1}^{q} (J_i(u) \cap A_i^-)\Big)\Big) \leqslant 2\varepsilon' ,$$

sono verificate le relazioni $(3.7)_1$ e $(3.7)_2$.

Fissato infine un numero $\tau > 0$, dall'assoluta continuità dell'integrale della funzione m, esiste un numero $\eta = \eta(\tau) > 0$ in modo che

$$(3.28)\qquad \int_G m(t)\, dt \leqslant \frac{\tau}{2} \qquad \forall G \text{ misurabile con } \mu(G) \leqslant \eta .$$

Sia ora $\zeta = \zeta(\eta/Tq^3)$ il numero determinato come in (3.22). Considerato l'insieme $V_1 = \{u, v \in \mathscr{K}\colon \ \|u - v\|_{\mathscr{C}} \leqslant \zeta\}$, in corrispondenza otteniamo, come in (3.23) e (3.24), un insieme $\tilde{V}_1$ di vettori con $\Delta(\tilde{V}_1) \leqslant \eta/q^2$ e un insieme $\tilde{\Lambda}_1 \subseteq I$ con $\mu(\tilde{\Lambda}_1) \leqslant \eta$. Per ogni $u, v \in \mathscr{K}$ con $\|u - v\|_{\mathscr{C}} \leqslant \zeta$, si ha infine

$$(3.29)\qquad \|g(u) - g(v)\|_1 = \int_{\tilde{\Lambda}_1} \|g(u)(t) - g(v)(t)\|\, dt \leqslant 2 \int_{\tilde{\Lambda}_1} m(t)\, dt \leqslant \tau ,$$

e pertanto la funzione g è continua.

4 – Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema I. *Siano verificate le ipotesi del Lemma II. In queste condizioni esiste un'applicazione continua* $g\colon \mathscr{K} \to L^1(I)$ *tale che, per ogni* $u \in \mathscr{K}$, *risulti* $g(u)(t) \in F(t, u(t))$ *q.o. in* I.

Dal Lemma II, in corrispondenza di $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ si ha l'esistenza di un'applicazione continua $g_0\colon \mathscr{K} \to L^1(I)$ con le proprietà

(a)$_0$ $\mu(W_0(u)) \leqslant 1$ $\forall u \in \mathscr{K}$, ove $W_0(u) = \{t \in I\colon d(g_0(u)(t), F(t, u(t))) > 1\}$;
(b)$_0$ esiste un numero $\delta_0 > 0$ tale che, per ogni $V \subseteq \mathscr{K}$ con $\Delta(V) \leqslant \delta_0$, risulta

$$\mu\Big(\bigcup_{u\in V} W_0(u)\Big) \leqslant 2 , \tag{4.1}$$

$$\mu(\{t \in I\colon \exists u, v \in V\colon g_0(u)(t) \neq g_0(v)(t)\}) < 2^3 . \tag{4.2}$$

Proveremo che per ogni $n \geqslant 1$ esiste un'applicazione continua $g_n\colon \mathscr{K} \to L^1(I)$ con le proprietà:

(a)$_n$ $\mu(W_n(u)) \leqslant 2^{-n}$ $\forall u \in \mathscr{K}$, $W_n(u) = \{t \in I\colon d(g_n(u)(t), F(t, u(t))) > 2^{-n}\}$;

(b)$_n$ esiste un numero $\delta_n > 0$ tale che, per ogni $V \subseteq \mathscr{K}$ con $\Delta(V) \leqslant \delta_n$, risulta

$$\mu\Big(\bigcup_{u\in V} W_n(u)\Big) \leqslant 2^{-n+1} , \tag{4.3}$$

$$\mu(\{t \in I\colon \exists u, v \in V\colon g_n(u)(t) \neq g_n(v)(t)\}) < 2^{-n+3} ; \tag{4.4}$$

(c)$_n$ $\forall u \in \mathscr{K}$, $\mu(\{t \in I\colon \|g_n(u)(t) - g_{n-1}(u)(t)\| > 2^{-n+1}\}) \leqslant 2^{-n+5}$.

Iniziamo col costruire, a partire dalla g_0 con le proprietà (a)$_0$, (b)$_0$, una funzione g_1 continua con le proprietà (a)$_1$, (b)$_1$, (c)$_1$.

Dal Lemma I, per ogni $u \in \mathscr{K}$, esistono un numero $\varrho = \varrho(u) > 0$, $\varrho < \delta_0/2$, e un compatto $E = E(u) \subset I$, con $\mu(I - E) \leqslant 1/2$, in modo che risulti

$$F(t, u(t)) \subseteq B[F(t, \tilde{u}(t)), 1/2] \qquad \forall \tilde{u} \in \mathscr{K} \text{ con } \|u - \tilde{u}\|_{\mathscr{C}} \leqslant \varrho \qquad \forall t \in E . \tag{4.5}$$

Sia ora $\{U_i^1\}_{i=1,\dots,N_1}$ una copertura aperta di $\mathscr{K}$, ove U_i^1 è una boccia aperta di centro in qualche punto $u_i^1 \in \mathscr{K}$ e raggio $\varrho_i^1 = \varrho(u_i^1)$ determinato come in

(4.5); sia poi $\{p_i^1\}_{i=1,\dots,N_1}$ una partizione continua dell'unità subordinata alla copertura $\{U_i^1\}_i$. La multifunzione $H: I \to \Omega(\boldsymbol{R}^n)$ definita da

$$(4.6)\qquad H(t) = \begin{cases} F(t, u_i^1(t)) \cap B[\{g_0(u_i^1)(t)\}, 1] & t \notin W_0(u_i^1) \\ F(t, u_i^1(t)) & t \in W_0(u_i^1) \end{cases}$$

è misurabile e quindi (cfr. Teorema 5.1 di [4]) ammette un selettore misurabile v_i^1, risulta cioè

$$(4.7)\qquad v_i^1(t) \in F(t, u_i^1(t)) \qquad \forall t \in I\,,$$

da cui (cfr. ipotesi (i)) $v_i^1 \in L^1(I)$ e inoltre (cfr. (4.6))

$$(4.8)\qquad \|v_i^1(t) - g_0(u_i^1)(t)\| \leqslant 1 \qquad \forall t \notin W_0(u_i^1)\,.$$

Costruiamo ora, per ogni $u \in \mathscr{K}$, una partizione $\{J_i^1(u)\}_{i=1,\dots,N_1}$ dell'intervallo $[0, T]$ in modo analogo a quanto fatto nel Lemma II per ottenere la funzione g (cfr. (3.17)) e definiamo la funzione $g_1: \mathscr{K} \to L^1(I)$ ponendo

$$(4.9)\qquad g_1(u)(t) = \sum_{i=1}^{N_1} \chi[J_i^1(u)](t) \cdot v_i^1(t)\,.$$

Tenendo presente che (cfr. (4.5))

$$(4.10)\qquad W_1(u) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_1} (J_i^1(u) \cap A_i^{1-}) \qquad \forall u \in \mathscr{K}\,,$$

procedendo come nella dimostrazione del Lemma II, si prova che la g_1 verifica la proprietà $(a)_1$.

Andiamo ora a provare la $(c)_1$. Posto $\mathscr{I}(u) = \{i: p_i^1(u) > 0\}$, $u \in \mathscr{K}$, per ogni $i \in \mathscr{I}(u)$ si ha $\|u - u_i^1\|_{\mathscr{C}} < \varrho(u_i^1) < \delta_0/2$ e quindi l'insieme $V^* = \{u, u_i^1\colon i \in \mathscr{I}(u)\}$ ha diametro minore di δ_0; dalla $(b)_0$ segue allora che

$$(4.11)\qquad \mu\Big(\bigcup_{w \in V^*} W_0(w)\Big) \leqslant 2\,,$$

$$(4.12)\qquad \mu(\{t \in I\colon \exists v, w \in V^*\colon g_0(v)(t) \neq g_0(w)(t)\}) < 2^3\,.$$

Posti ora

$$(4.13)\qquad M = \bigcup_{w \in V^*} W_0(w)\,, \qquad N = \{t \in I\colon \exists v, w \in V^*\colon g_0(v)(t) \neq g_0(w)(t)\}\,,$$

e tenendo presente che $g_1(u)(t) = v_i^1(t)$ per qualche $i \in \mathscr{I}(u)$, risulta (cfr. (4.8))

$$\|g_1(u)(t) - g_0(u)(t)\| = \|v_i^1(t) - g_0(u_i^1)(t)\| \leqslant 1 \qquad \forall t \notin M \cup N, \tag{4.14}$$

da cui segue la proprietà $(c)_1$.

Per dimostrare la $(b)_1$ e la continuità dell'applicazione g_1 basta ripetere in tutto il procedimento fatto per dimostrare le $(3.7)_1$, $(3.7)_2$ e la (3.29).

Dimostrata così l'esistenza di una funzione $g_1 \colon \mathscr{K} \to L^1(I)$ continua con le proprietà $(a)_1$, $(b)_1$, $(c)_1$, è subito visto che, a partire dalla g_1, è possibile ottenere una funzione g_2 continua con le proprietà $(a)_2$, $(b)_2$, $(c)_2$; analogamente per ogni $n > 2$.

Proveremo ora che per ogni $u \in \mathscr{K}$ la successione $\{g_n(u)\}_{n\in N}$ così costruita è di Cauchy in $L^1(I)$. Posto infatti

$$A_n = \{t \in I \colon \|g_n(u)(t) - g_{n-1}(u)(t)\| > 2^{-n+1}\}, \tag{4.15}$$

si ha

$$\begin{aligned} &\|g_{n+p}(u) - g_n(u)\|_1 \\ &= \int_{H_{n,p}} \|g_{n+p}(u)(t) - g_n(u)(t)\| \, dt + \int_{I-H_{n,p}} \|g_{n+p}(u)(t) - g_n(u)(t)\| \, dt \qquad \forall n, p \in \boldsymbol{N}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

ove $H_{n,p} = A_{n+1} \cup \ldots \cup A_{n+p}$.

Tenendo presente la proprietà $(c)_n$ e l'ipotesi (i), risulta

$$\|g_{n+p}(u) - g_n(u)\|_1 \leqslant p \cdot 2^{-n} + 2 \int_{H_{n,p}} m(t) \, dt \qquad \forall n, p \in \boldsymbol{N}, \tag{4.17}$$

ove $\mu(H_{n,p}) \leqslant p \cdot 2^{-n+4}$.

Pertanto per ogni $u \in \mathscr{K}$ la successione $\{g_n(u)\}_{n\in N}$ è di Cauchy in $L^1(I)$ e converge a una funzione $g(u) \in L^1(I)$. L'applicazione $g \colon \mathscr{K} \to L^1(I)$ è inoltre continua, essendo le g_n continue e la convergenza uniforme. Tenendo presente la proprietà $(a)_n$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\int_I d\big(g(u)(t), F(t, u(t))\big) \, dt \\ &\leqslant \int_I d\big(g(u)(t), g_n(u)(t)\big) \, dt + 2 \int_{W_n(u)} m(t) \, dt + 2^{-n} \cdot T, \end{aligned} \tag{4.18}$$

da cui

$$\int_I d\big(g(u)(t), F(t, u(t))\big) \, dt = 0 . \tag{4.19}$$

Poiché l'insieme $F(t, u(t))$ è chiuso, si ha infine $g(u)(t) \in F(t, u(t))$ q.o. in I, c.v.d.

Come conseguenza del Teorema I, si perviene al seguente

Teorema II. *Nelle stesse ipotesi del Teorema I, il problema* (2.3) *ammette soluzioni.*

Nel Teorema I abbiamo provato l'esistenza di una funzione continua $g\colon \mathscr{K} \to L^1(I)$ con la proprietà

$$\forall u \in \mathscr{K} \qquad g(u)(t) \in F(t, u(t)) \quad \text{q.o. in } I\,. \tag{4.20}$$

Definiamo ora un'applicazione $h\colon \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ ponendo

$$h(u)(t) = \int_0^t g(u)(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{4.21}$$

Dalla continuità della funzione g segue la continuità della funzione h; poiché inoltre $\mathscr{K}$ è un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathscr{C}(I)$, esiste (cfr. [**15**], Teorema 1-10) una funzione $\tilde{u} \in \mathscr{K}$ tale che $h(\tilde{u}) = \tilde{u}$. Da (4.20) si ha allora

$$\tilde{u}'(t) = g(\tilde{u})(t) \in F(t, \tilde{u}(t)) \quad \text{q.o. in } I\,, \qquad \tilde{u}(0) = 0\,, \quad \text{c.v.d.}\,.$$

Oss. I nostri Teoremi I e II contengono strettamente i Teoremi 1 e 2 di [**3**].

Infatti, è subito visto che una multifunzione $F\colon I \times K \to \Omega(X)$, ove X è un sottospazio limitato di $\boldsymbol{R}^n$, verifica l'ipotesi (i): basta assumere $m(t) = L$ $\forall t \in I$, essendo L il raggio di una boccia chiusa di centro l'origine contenente X. D'altra parte, la $F\colon [0,1] \times [0,2] \to \Omega(\boldsymbol{R}_0^+)$, definita da

$$F(t,x) = \begin{cases} [0,1] & t = 0 \\ [0, \frac{1}{\sqrt{t}}] & t \neq 0 \end{cases}$$

è un esempio di multifunzione che verifica le nostre ipotesi ma *non* le condizioni di [**3**].

Bibliografia

[1] H. A. Antosiewicz and A. Cellina, *Continuous selections and differential relations*, J. Differential Equations **19** (1975), 386-398.

[2] C. BARDARO e P. PUCCI: [•]$_1$ *Un teorema di esistenza per equazioni contingenti in spazi di Banach,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **27** (1978), 207-211; [•]$_2$ *Some contributions to the theory of multivalued differential equations,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **32** (1983), 175-202.

[3] A. BRESSAN, *On differential relations with lower continuous right-hand side. An existence theorem,* J. Differential Equations **37** (1980), 89-97.

[4] C. CASTAING, *Sur les multi-applications mesurables,* Rev. Française Informat. Recherche Opérationelle **1** (1967), 91-126.

[5] C. CASTAING and M. VALADIER, *Équations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes,* Revue Française Informat. Recherche Opérationelle **16** (1969), 3-16.

[6] G. COLETTI and G. REGOLI, *Continuous selections and multivalued differential equations,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 1-6.

[7] J. P. DAURÈS, *Contributions à l'étude des équations différentielles multivoques dans les espaces de Banach,* C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 769-772.

[8] J. L. DAVY, *Properties of solution set of a generalized differential equation,* Bull. Austral. Math. Soc. **6** (1972), 379-398.

[9] A. F. FILIPPOV: [•]$_1$ *Differential equations with multivalued right-hand side,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **151** (1963), 65-68; [•]$_2$ *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side,* SIAM J. Control Optim. **5** (1967), 609-621; [•]$_3$ *The existence of solutions of generalized differential equations,* Mat. Zametki **10** (1971), 307-313.

[10] H. HERMES, *The generalized differential equation* $\dot{x} \in R(t, x)$, Adv. in Math. **4** (1970), 149-169.

[11] C. J. HIMMELBERG and F. S. VAN VLECK, *Lipschitzian generalized differential equations,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **48** (1973), 159-169.

[12] S. T. HU, *Introduction to general topology,* Holden-Day Inc., S. Francisco 1966.

[13] H. KACZYŃSKI and C. OLECH, *Existence of solutions of orientor fields with nonconvex right-hand side,* Ann. Polon. Math. **29** (1974), 61-66.

[14] C. OLECH, *Existence of solutions of non-convex orientor fields,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **11** (Suppl. Fasc. 3) (1975), 189-197.

[15] L. SAATY and J. BRAM, *Nonlinear Mathematics,* McGraw-Hill Inc., New York 1964.

* * *