Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 111-121

P. AZZIMONDI e C. SCARAVELLI (*)

Teoremi di punto unito comune (**)

1 - Introduzione

1.1 – Anche in questo lavoro, come nei precedenti $[\mathbf{1}]_{1,3,4}$, dobbiamo premettere la definizione e le principali caratteristiche dello spazio metrico generalizzato (E, d) (H-spazio) nel quale facciamo le nostre considerazioni. «E è un insieme, e $d: E\times E \to \mathfrak{R}^+$ una applicazione che verifica le seguenti proprietà: (a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1=x_2$, per $x_1, x_2 \in E$; (b) $d(x_1, x_2)=d(x_2, x_1)$, per $x_1, x_2 \in E$; (c) esistono: un sottoinsieme A di $\mathfrak{R}^+$ contenente un intervallo $0 \vdash\!\dashv a$ $(a > 0)$, una costante reale $\tau \geqslant 1$, e una funzione $\varphi: A \to \mathfrak{R}^+$ infinitesima nello zero, tali che, per ogni $x_1, x_2, x_3 \in E$, $d(x_1, x_2) \in A \Rightarrow d(x_1, x_3) \leqslant \varphi[d(x_1, x_2)] + \tau d(x_2, x_3)$ (proprietà triangolare generalizzata: p.t.g.). *L'applicazione* d (distanza generalizzata), *che in generale non è continua, è, però, uniformemente continua se e solo se* $\tau = 1$ (cfr., ad es., $[\mathbf{1}]_2$). Come negli spazi metrici, poi, in questi H-spazi (che sono di Hausdorff) si possono introdurre e trattare le nozioni topologiche e di completezza. *Inoltre qui consideriamo ancora, e soltanto, H-spazi (E, d) completi*, e per brevità non lo ripeteremo più in ciò che segue. Come resterà sottointeso che A, τ, φ e ψ (ove compaiono) sono rispettivamente l'insieme, la costante, la funzione indicati in (c) e la funzione $\psi: E\times E \to 0 \vdash\!\dashv 1$ così definita

$$(1) \qquad \psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{d(x_1, x_2)}{\varphi[d(x_1, x_2)]} & \text{per } (x_1, x_2) \text{ tale che } d(x_1, x_2) \in A\setminus\{0\} \\ 1 & \text{per } (x_1, x_2) \text{ tale che } d(x_1, x_2) \notin A\setminus\{0\} \text{ ».} \end{cases}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Via Università, 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi G.N.I.M. e G.N.A.F.A. (C.N.R.) e con fondi M.P.I. — Ricevuto: 21-VI-1983.

1.2 – Ricordiamo ora che nell'ipotesi di contrattività comune dei teoremi 1, 3, 4, 5, 6 di [**1**]$_4$ abbiamo cercato di coinvolgere a primo membro il minor numero possibile delle sei distanze $d(f_r(x_s), f_h(x_k))$ $(r=1,2;\ s=3-r, 2;\ h=1, r\wedge s;\ k=1, r\wedge(3-h))$, *mantenendo fra queste almeno* $d(f_1(x_1), f_2(x_2))$, mentre a secondo membro abbiamo messo tutte le nove distanze $d(x_1, x_2)$, $d(x_i, f_j(x_h))$ $(i, j, h = 1, 2)$; e questa ci è sembrata una via naturale per procedere, raggiungendo risultati di un certo interesse, anche confrontati con quelli ottenuti negli spazi metrici da altri Autori (cfr. [**1**]$_4$, nn. **1** e **4**, e Bibliografia).

Qui vogliamo seguire quella stessa via, *senza però mantenere a primo membro* $d(f_1(x_1), f_2(x_2))$ [e neppure $d(f_1(x_2), f_2(x_1))$!].

Si noterà che, nell'ipotesi di contrattività comune dei teoremi che così otteniamo (cfr. **2** e **3**), a primo membro ci sono sempre e soltanto le due distanze $d(f_1(x_1), f_1(x_2))$, $d(f_1(x_2), f_2(x_2))$, mentre a secondo membro ci sono solo sette (o sei) delle nove distanze $d(x_1, x_2)$, $d(x_i, f_j(x_h))$ $(i, j, h = 1, 2)$. Per il primo membro ciò è dovuto al fatto che altre « combinazioni » di distanze sono o equivalenti, o prive di risultati significativi (o prive di senso); per il secondo membro, possiamo (per ora) solo dire che il nostro procedimento dimostrativo non ci permette di fare di più. E anche se i risultati qui raggiunti sembrano meno soddisfacenti (ma altri procedimenti noti danno ancora meno!) di quelli di [**1**]$_4$, bisogna tener presente che ci siamo imposti di escludere a primo membro $d(f_1(x_1), f_2(x_2))$, che ha un ruolo essenziale nella dimostrazione di quei teoremi (in un futuro lavoro di sintesi cercheremo di completare queste considerazioni).

Infine anche qui esaminiamo dapprima (cfr. **2**) il caso in cui l'ipotesi di contrattività comune è relativa alle variabili x_1, x_2 distinte, e dopo (cfr. **3**) il caso in cui tale ipotesi di contrattività è relativa alle variabili x_1, x_2 non necessariamente distinte; in questo secondo caso i risultati sono (ovviamente) migliori.

2 - Ipotesi di contrattività comune con variabili distinte

Teorema 1. *Siano* $f_1, f_2\colon E \to E$ *due applicazioni tali che, per tutti gli* $x_1, x_2 \in E$ *con* $x_1 \neq x_2$, *si abbia*

$$(2)\qquad d(f_1(x_r), f_r(x_2))$$
$$\leqslant \alpha \max\{d(x_1, x_2), \frac{1}{\tau}\, d(x_i, f_1(x_2)), \lambda_{ij}(x_1, x_2)\, d(x_i, f_j(x_1)) \colon i, j = 1, 2\},$$

$$r=1,2;\ 0\leqslant\alpha<1;\ \lambda_{11}=\lambda_{21}=1,\quad \lambda_{12}=\frac{\psi(x_1, f_1(x_1))}{\tau+1},\ \lambda_{22}=\frac{\psi(x_2, f_1(x_1))}{\tau+1}.$$

Se esiste un punto $u_0 \in E$ *per il quale la successione*

$$(3) \qquad u_0,\, u_n = f_1(u_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ha ogni elemento diverso dal successivo $(u_{n-1} \neq u_n,\ n = 1, 2, \ldots)$ *e*

$$(4) \qquad d(u_{n-1}, u_{n-1+p}) \in A \qquad (n, p = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

allora f_1 *ed* f_2 *hanno in comune un solo punto unito, che è anche l'unico punto unito di* f_1.

Dim. Accanto alla (3) consideriamo la successione di punti di E

$$(5) \qquad v_n = f_2(u_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Si ha

$$(6) \quad \mathop{\forall}_{n=1}^{\infty} \mathop{\forall}_{s=0}^{n-1} \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_{n-s+h}, f_r(u_{n-s+k})\big) : r=1, 2;\ \ h=(r-1)(k+1);\ k=0, 1, \ldots, s\right\}$$

$$\leqslant \alpha \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_{n-s+h}, f_r(u_{n-s-1+m})\big) :\ r = 1, 2;\ h = (r-2), (2-r)(k-1);\right.$$

$$\left. m = (2-r)k;\ k = 0, 1, \ldots, s+1\right\}.$$

Infatti, come nel Teorema 4 di $[\mathbf{1}]_4$, distinguendo il caso (a) in cui $\mathop{\forall}_{k=1}^{s} u_{n-s+k} \neq u_{n-s-1}$, dal caso (b) in cui $\mathop{\exists}_{k=1}^{s} u_{n-s+k} = u_{n-s-1}$ (essendo anche $u_{n-s} \neq u_{n-s-1}$), e procedendo in modo qualitativamente analogo, si vede che [1] nel caso (a) si giunge alla (6) grazie a (3), a (5), a (2), alla p.t.g. di (c) (in quanto vale (4)), alla banale disuguaglianza $a + \gamma b \leqslant (1+\gamma)\max\{a, b\}$ $(a, b \in \mathfrak{R},\ \gamma \geqslant 0)$, alla (1), ed eliminando poi anche qui i termini superflui, cioè i termini ripetuti e quelli che non possono essere massimo. Mentre nel caso (b) (sempre con ragionamenti sul tipo di quelli fatti in quel Teorema 4 per scrivere le (16), (16)′, (16)″, (16)‴) si ottiene successivamente

$$(7) \quad \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_{n-s+h}, f_r(u_{n-s+k})\big) : r = 1, 2;\ h = (r-1)(k+1);\ k = 0, 1, \ldots, s\right\}$$

$$= \max\left\{\tau^{-k} d\big(f_1(u_{n-s+h-1}), f_r(u_{n-s+k})\big) : r = 1, 2;\ h = (r-1)(k+1);\ k = 0, 1, \ldots, s\right\},$$

---

(1) I vari passaggi sono lunghi e un po' laboriosi, e, ripetiamo, proprio analoghi a quelli di $[\mathbf{1}]_4$ Teorema 4: quindi ci sembra superfluo riportarli qui tutti.

$$(7)' \quad \max\{\tau^{-k}d(u_{n-s+h}, f_r(u_{n-s+k})): r=1,2;\ h=(r-1)(k+1);\ k=0,1,\dots,s\}$$
$$=\max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s+h-1}), f_r(u_{n-s+k})): r=1,2;\ h=(r-1)(k+1);\ k=0,1,\dots,\bar{k}\}$$

(dove $\bar{k}\leqslant s$ è il primo numero naturale per il quale si ha $u_{n-s+\bar{k}}=u_{n-s-1}$),

$$(7)'' \quad \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s+h-1}), f_r(u_{n-s+k})): r=1,2;\ h=(r-1)(k+1);\ k=0,1,\dots,\bar{k}\}$$
$$=\max\{\tau^{-\bar{k}}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})),\ \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s-1}), f_1(u_{n-s+k})),\ \tau^{-k}d(f_1(u_{n-s+k}),$$
$$f_2(u_{n-s+k})): k=0,1,\dots,\bar{k}-1\}$$
$$\leqslant\max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s+h-1}), f_r(u_{n-s+k})),\ \tau^{-k-1}d(f_1(u_{n-s}), f_1(u_{n-s-1})),$$
$$\tau^{-k-1}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})): r=1,2;\ h=(r-1)(k+1);\ k=0,1,\dots,\bar{k}-1\},$$

$$(7)''' \quad \max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s+h-1}), f_r(u_{n-s+k})),\ \tau^{-k-1}d(f_1(u_{n-s}), f_1(u_{n-s-1})),$$
$$\tau^{-k-1}d(f_1(u_{n-s-1}), f_2(u_{n-s-1})): r=1,2;\ h=(r-1)(k+1);\ k=0,1,\dots,\bar{k}-1\}$$
$$\leqslant\alpha\max\{\tau^{-k}d(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}),\ \tau^{-k-1}d(u_{n-s+k}, u_{n-s+k+1}),$$
$$\tau^{-k}d(u_{n-s}, v_{n-s}): k=0,1,\dots,\bar{k}-1\}.$$

Dalla $(7)'''$, per la $(7)''$, ed aggiungendo nell'insieme a suo secondo membro alcuni opportuni termini (si noti che è $\bar{k}-1<s$) si ha

$$\max\{\tau^{-k}d(f_1(u_{n-s+h-1}), f_r(u_{n-s+k})): r=1,2;\ h=(r-1)(k+1);$$
$$k=0,1,\dots,\bar{k}\}$$
$$\leqslant\alpha\max\{\tau^{-k}d(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}),\ \tau^{-k}d(u_{n-s+k-1}, u_{n-s+k}),\ \tau^{-k}d(u_{n-s}, v_{n-s}):$$
$$k=0,1,\dots,s+1\},$$

da cui, per la $(7)'$, si arriva alla (6) anche nella condizione restrittiva (b).

Consideriamo ora il massimo (dei massimi) a primo e a secondo membro della (6); otteniamo

$$\mathop{\forall}_{n=1}^{\infty}\mathop{\forall}_{j=0}^{n-1} \max\{\tau^{-k}d(u_{n-i+h}, f_r(u_{n-i+k})): r=1,2;\quad h=(r-1)(k+1);\ i=0,1,\dots,j;$$
$$k=0,1,\dots,i\}$$
$$\leqslant\alpha\max\{\tau^{-k}d(u_{n-i+h}, f_r(u_{n-i-1+m})): r=1,2;\ h=(r-2),(2-r)(k-1);\ m=(2-r)k;$$
$$i=0,1,\dots,j;\ k=0,1,\dots,i+1\},$$

Di qui, con semplici eliminazioni di termini superflui (2), si ha ancora

$$\mathop{\forall}_{n=1}^{\infty}\mathop{\forall}_{j=0}^{n-1} \max\left\{\tau^{-k}\, d(u_{n-i+h},\, f_r(u_{n-i+k})) \colon r = 1, 2;\quad h = (r-1)\,(k+1);\right.$$
$$\left. i = 0, 1, \ldots, j;\; k = 0, 1, \ldots, i\right\}$$
$$\leqslant \alpha \max\left\{\tau^{-k}\, d(u_{n-j-1},\, u_{n-j+k}),\, d(u_{n-j},\, v_{n-j}) \colon\; k = 0, 1, \ldots, j+1\right\},$$

da cui immediatamente

$$\mathop{\forall}_{n=1}^{\infty}\mathop{\forall}_{s=0}^{n-1} \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_{n-s+h}, f_r(u_{n-s+k})\big) \colon r = 1, 2;\, h = (r-1)(k+1);\, k = 0, 1, \ldots, s\right\}$$
$$\leqslant \alpha \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_{n-s-1}, u_{n-s+k}\big), d(u_{n-s}, v_{n-s}) \colon k = 0, 1, \ldots, s+1\right\},$$

ed anche (con l'aggiunga di opportuni termini a secondo membro)

$$\mathop{\forall}_{n=1}^{\infty}\mathop{\forall}_{s=0}^{n-1} \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_{n-s+h}, f_r(u_{n-s+k})\big) \colon r = 1, 2;\quad h = (r-1)(k+1);\right. \tag{8}$$
$$\left. k = 0, 1, \ldots, s\right\}$$
$$\leqslant \alpha \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_{n-s-1+h}, f_r(u_{n-s-1+k})\big) \colon r = 1, 2;\, h = (r-1)(k+1);\right.$$
$$\left. k = 0, 1, \ldots, s+1\right\}.$$

Di nuovo con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti in [**1**]$_4$ però nella dimostrazione del Teorema 1 punto (2°), da (8) si ha ($r = 1, 2$)

$$\mathop{\forall}_{n=1}^{\infty}\; d\big(u_{n-r-1}, f_r(u_n)\big)$$
$$\leqslant \alpha^n \max\left\{\tau^{-k} d\big(u_h, f_j(u_k)\big) \colon j = 1, 2;\, h = (j-1)(k+1);\, k = 0, 1, \ldots, n\right\}.$$

Ora o il massimo dell'insieme considerato nella riga precedente è $d(u_1, v_1)$, oppure no; se non lo è abbiamo (applicando, anche, per (4) la p.t.g. di (c))

(2) Ricordiamo ancora che (qui, come in altri casi analoghi) consideriamo superflui (e quindi eliminabili) termini che sono minori od uguali di termini che compaiono già a primo o a secondo membro.

con banali maggiorazioni, e usando la (8) per $s = n - 1$,

$$\max\{\tau^{-k} d(u_h, f_j(u_k)) : j = 1, 2;\ h = (j-1)(k+1);\ k = 0, 1, \ldots, n\}$$
$$= \max\{d(u_0, u_1), \tau^{-k} d(u_0, u_{1+k}), \tau^{-k} d(u_{1+k}, v_{1+k}) : k = 1, 2, \ldots, n\}$$
$$= \max\{d(u_0, u_1), \tau^{-\nu-1} d(u_0, u_{2+\nu}), \tau^{-\nu-1} d(u_{2+\nu}, v_{2+\nu}) : \nu = 0, 1, \ldots, n-1\}$$
$$\leqslant \max\{\varphi[d(u_0, u_1)], \tau^{-\nu-1}\varphi[d(u_0, u_1)] + \tau^{-\nu} d(u_1, u_{2+\nu}), \tau^{-\nu-1} d(u_{2+\nu}, v_{2+\nu}) : \nu = 0, 1, \ldots, n-1\}$$
$$\leqslant \varphi[d(u_0, u_1)] + \max\{\tau^{-\nu} d(u_{1+h}, f_j(u_{1+\nu})) : j = 1, 2;\quad h = (j-1)(\nu+1);\ \nu = 0, 1, \ldots, n-1\}$$
$$\leqslant \varphi[d(u_0, u_1)] + \alpha \max\{\tau^{-\nu} d(u_h, f_j(u_\nu)) : j = 1, 2;\ h = (j-1)(\nu+1);\ \nu = 0, 1, \ldots, n\},$$

quindi

$$\max\{\tau^{-k} d(u_h, f_j(u_k)) : r=1, 2;\ h=(j-1)(k+1);\ k=0, 1, \ldots, n\} \leqslant \frac{\varphi[d(u_0, u_1)]}{1-\alpha}.$$

In ogni caso è $(r = 1, 2)$

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}}\ d(u_{n+r-1}, f_r(u_n)) \leqslant \alpha^n\Big[d(u_1, v_1) \vee \frac{\varphi[d(u_0, u_1)]}{1-\alpha}\Big],$$

da cui immediatamente

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_{n+r-1}, f_r(u_n)) = 0 \qquad (r = 1, 2)\,. \tag{9}$$

Procedendo per induzione, tenendo conto della (9) (con $r = 1$), della (4) e della p.t.g. di (c), e del fatto che φ è infinitesima nello zero, si dimostra pure che la successione (3) è di Cauchy. Pertanto, per l'ipotesi di completezza, essa converge in E. Sia $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_*$ (3); indicata con $u_{\sigma(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ una sottosuccessione della successione (3) *a punti tutti diversi da* u_* (4), dimostriamo che

$$(10)\qquad \lim_{k\to+\infty} d(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)) = 0 \qquad \text{e} \qquad (11)\qquad f_1(u_*) = f_2(u_*)\,.$$

(3) Si noti (cfr. annotazione (1) di [1]$_4$) che anche la successione (5) converge in E ad u_*.

(4) Una tale sottosuccessione esiste certamente (cfr. annotazione (10) di [1]$_4$).

Infatti, per (3), per (2) (essendo $u_{\sigma(k)} \neq u_*$), per (4) e la p.t.g. di (c) [si noti che da un certo indice k in poi $d(u_*, u_{\sigma(k)+1}) < a$ e quindi $d(u_*, u_{\sigma(k)+1}) \in A$], ancora per la banale disuguaglianza $a + \gamma b \leqslant (1+\gamma) \max\{a, b\}$ $(a, b \in \mathfrak{R}, \gamma \geqslant 0)$, per (1), otteniamo successivamente

$$\max\left\{d\big(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)\big), d\big(f_1(u_*), f_2(u_*)\big)\right\} = \max\left\{d\big(f_1(u_{\sigma(k)}), f_1(u_*)\big), d\big(f_1(u_*), f_2(u_*)\big)\right\}$$

$$\leqslant \alpha \max\left\{d(u_{\sigma(k)}, u_*), \frac{1}{\tau} d\big(u_{\sigma(k)}, f_1(u_*)\big), \frac{1}{\tau} d\big(u_*, f_1(u_*)\big), d(u_{\sigma(k)}, u_{\sigma(k)+1}),\right.$$

$$\left. d(u_*, u_{\sigma(k)+1}), \frac{\psi(u_{\sigma(k)}, u_{\sigma(k)+1})}{\tau+1} d(u_{\sigma(k)}, v_{\sigma(k)+1}), \frac{\psi(u_*, u_{\sigma(k)+1})}{\tau+1} d(u_*, v_{\sigma(k)+1})\right.$$

$$\leqslant \alpha \max \left\{d(u_{\sigma(k)}, u_*), \frac{1}{\tau} \varphi[d(u_{\sigma(k)}, u_{\sigma(k)+1})] + d\big(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)\big), \frac{1}{\tau} \varphi[d(u_*, u_{\sigma(k)+1})]\right.$$

$$\left. + d\big(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)\big), d(u_{\sigma(k)}, u_{\sigma(k)+1}), d(u_*, u_{\sigma(k)+1}), d(u_{\sigma(k)+1}, v_{\sigma(k)+1}), d(u_*, v_{\sigma(k)+1})\right\};$$

da cui

$$\max\left\{\lim_{k\to+\infty}'' d\big(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)\big), d\big(f_1(u_*), f_2(u_*)\right\}$$
$$\leqslant \alpha \max\left\{\lim_{k\to+\infty}'' d\big(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)\big), d\big(f_1(u_*), f_2(u_*)\big)\right\},$$

il che implica

$$\lim_{k\to+\infty}'' d\big(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)\big) = d\big(f_1(u_*), f_2(u_*)\big) = 0$$

e quindi, appunto, le (10) e (11).

Essendo poi, da un certo indice k in poi [p.t.g. di (c)]

$$0 \leqslant d\big(u_*, f_1(u_*)\big) \leqslant \varphi[d(u_*, u_{\sigma(k)+1})] + \tau d\big(u_{\sigma(k)+1}, f_1(u_*)\big),$$

con un passaggio al limite (per $k \to +\infty$) si conclude che $u_* = f_1(u_*)$; inoltre, tenendo conto della (11), si ha anche che $u_* = f_2(u_*)$: quindi u_* è punto unito sia di f_1 che di f_2.

Se ora $z \in E$ fosse un altro punto unito comune ad f_1 e ad f_2, per la (2) si avrebbe $d(z, u_*) \leqslant \alpha d(z, u_*)$, cioè $z = u_*$. Analogamente, se $y \in E$ fosse un altro punto unito di f_1 (diverso di u_*) si avrebbe ancora $d(y, u_*) \leqslant \alpha d(y, u_*)$, cioè $y = u_*$. Il teorema è così completamente dimostrato.

Di questo Teorema 1 ci servirà, per la dimostrazione del Teorema 3 di **3**, il seguente caso particolare.

Teorema 1 bis. *Siano $f_1, f_2 \colon E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$, si abbia la* (2), *e, per tutti gli $x_1, x_2 \in E$, $d(x_1, f_1(x_2)) \in A$. Se esiste un punto $u_0 \in E$ per il quale la successione u_0, $u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ha ogni elemento diverso dal successivo $(u_{n-1} \neq u_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$, allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito, che è anche l'unico punto unito di f_1.*

Teorema 2. *Siano $f_1, f_2 \colon E \to E$ due applicazioni tali che, per tutti gli $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$, si abbia*

$$\text{(12)} \qquad d(f_1(x_r), f_r(x_2))$$
$$\leqslant \alpha \max \left\{ d(x_1, x_2),\ \frac{1}{\tau} d(x_i, f_1(x_2)),\ \lambda_{ij}(x_1, x_2)\, d(x_i, f_j(x_1)) \colon i, j = 1, 2 \right\},$$

$$r = 1, 2; \quad 0 \leqslant \alpha < 1; \quad \lambda_{11} = \lambda_{21} = 1\,, \quad \lambda_{12} = \frac{\psi(x_1, f_1(x_1))}{\tau + 1}\,, \quad \lambda_{22} = 0\,.$$

Se esiste un punto $u_0 \in E$ per il quale la successione u_0, $u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ha ogni elemento diverso dal successivo $(u_{n-1} \neq u_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$, e

$$\text{(13)} \qquad d(u_{n-1}, u_n) \in A \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

allora f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito, che è anche l'unico punto unito di f_1.

Dim. Se si considera, come nella dimostrazione del Teorema 1, la successione (5) di punti di E $v_n = f_2(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ si giunge alle (8) e (9) di cui alla detta dimostrazione, con la conseguente affermazione che $\lim_{n \to +\infty} u_n = u_* \in E$ (5). Si mostra poi anche qui la validità delle (10) e (11), dopo di che si conclude con la tesi del Teorema (6).

---

(5) Cfr. l'annotazione (3).

(6) Tutto il procedimento dimostrativo, analogo a quello del Teorema 1, è qui meno pesante per il fatto che nella (12) manca il termine $\psi(x_2, f_1(x_1))/(\tau + 1) \cdot d(x_2, f_2(x_1))$, presente nella (2); per lo stesso fatto, anche, qui basta la (13) invece della (4) [si osservi che la (12) implica la (2), ma la (4) implica la (13)].

Di questo Teorema 2 ci servirà, per la dimostrazione del Teorema 4 di **3**, il seguente caso particolare

Teorema 2 bis. *Siano* $f_1, f_2 \colon E \to E$ *due applicazioni tali che, per tutti gli* $x_1, x_2 \in E$ *con* $x_1 \neq x_2$, *si abbia la* (12), *e, per tutti gli* $x_1 \in E$, $d(x_1, f_1(x)) \in A$. *Se esiste un punto* $u_0 \in E$ *per il quale la successione* u_0, $u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *ha ogni elemento diverso dal successivo* $(u_{n-1} \neq u_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$, *allora* f_1 *ed* f_2 *hanno in comune un solo punto unito, che è anche l'unico punto unito di* f_1.

3 - Ipotesi di contrattività comune con variabili non necessariamente distinte

Teorema 3. *Siano* $f_1, f_2 \colon E \to E$ *due applicazioni tali che, per tutti gli* $x_1, x_2 \in E$, *si abbia la* (2) *e* $d(x_1, f_1(x_2)) \in A$. *Allora* f_1 *ed* f_2 *hanno in comune un solo punto unito, che è anche l'unico punto unito di entrambe.*

Dim. Fissato $u_0 \in E$, consideriamo la successione di punti di E $u_0, u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ e distinguiamo il caso che sia $u_{n-1} \neq u_n$ per ogni $n \in \mathfrak{N}$, dal caso che sia $u_{n-1} = u_n$ per qualche $n \in \mathfrak{N}$.

Nel primo caso, per il Teorema 1 bis, f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito u_* che è anche l'unico punto unito di f_1. Se $z \neq u_*$ fosse un altro punto unito di f_2, per la (2) si avrebbe $d(z, f_1(z)) = d(f_2(z), f_1(z)) \leqslant \alpha d(z, f_1(z))$, e quindi $z = f_1(z)$, che non è possibile; dunque u_* è anche l'unico punto unito di f_2.

Nel secondo caso, u_{n-1}, che è sicuramente punto unito di f_1, è anche punto unito di f_2. Infatti, per la (2) si ha $d(u_{n-1}, f_2(u_{n-1})) = d(f_1(u_{n-1}), f_2(u_{n-1})) < \alpha d(u_{n-1}, f_2(u_{n-1}))$, e quindi $u_{n-1} = f_2(u_{n-1})$. Se ora $z \in E$ fosse un altro punto unito di f_1, poichè esso lo sarebbe banalmente anche per f_2 (basta ripetere i passaggi fatti relativamente a u_{n-1}), si avrebbe

$$d(u_{n-1}, z) = d(f_1(u_{n-1}), f_1(z))$$

$$\leqslant \alpha \max\left\{d(u_{n-1}, z), \frac{1}{\tau}\, d(z,\ u_{n-1}), \frac{\psi(z, z)}{\tau + 1}\, d(z, f_2(z)), \frac{\psi(u_{n-1}, z)}{\tau + 1}\, d(u_{n-1}, f_2(z))\right\}$$

$$= \alpha d(u_{n-1}, z)\,,$$

e quindi $z = u_{n-1}$, cioè f_1 ha il solo punto unito u_{n-1}. Infine, se $\overline{u} \in E$ fosse un altro punto unito di f_2, per la (2) si avrebbe immediatamente $d(\overline{u}, f_1(\overline{u})) = d(f_2(\overline{u}), f_1(\overline{u})) \leqslant \alpha d(\overline{u}, f_1(\overline{u}))$, e quindi $\overline{u} = f_1(\overline{u})$, che non è possibile; dunque u_{n-1} è anche l'unico punto unito di f_2. Il teorema è così completamente dimostrato.

Teorema 4. *Siano* $f_1, f_2\colon E \to E$ *due applicazioni tali che, per tutti gli* $x_1, x_2 \in E$, *si abbia la* (12) *e* (*per tutti gli* $x_1 \in E$) $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$. *Allora* f_1 *ed* f_2 *hanno in comune un solo punto unito che è anche l'unico punto unito di entrambe.*

Dim. Fissato $u_0 \in E$, consideriamo la successione di punti di E $u_0, u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ e distinguiamo il caso che sia $u_{n-1} \neq u_n$ per ogni $n \in \mathfrak{N}$, dal caso che sia $u_{n-1} = u_n$ per qualche $n \in \mathfrak{N}$.

Nel primo caso, poichè la (12) vale qualunque siano $x_1, x_2 \in E$, essa vale anche per $x_1 \neq x_2$; allora, per il Teorema 2 bis, f_1 ed f_2 hanno in comune un solo punto unito u_* che è anche l'unico punto unito di f_1. Banalmente poi (come nella dimostrazione del Teorema 3, primo caso) si mostra che u_* è anche l'unico punto unito di f_2.

Nel secondo caso si conclude immediatamente (procedendo come nel secondo caso del Teorema 3) che u_{n-1} è l'unico punto unito di f_1 ed f_2. Il teorema è così completamente dimostrato.

4 - Brevi osservazioni

4.1 – Per $f_1 = f_2$ i teoremi 1 e 3 diventano rispettivamente casi particolari dei teoremi 2 e 4; il Teorema 1 bis diventa caso particolare (oltre che del Teorema 1) dei teoremi 2 bis e 3, e il Teorema 2 bis diventa caso particolare (oltre che del Teorema 2) del Teorema 4; inoltre i teoremi 2 bis e 3 diventano casi particolari del Teorema 1 di $[\mathbf{1}]_3$, il Teorema 4 coincide esattamente con tale teorema.

4.2 – Come abbiamo segnalato più volte (cfr. $[\mathbf{1}]_{1,3,4}$) gli spazi metrici sono particolari H-spazi con: $A \equiv \mathfrak{R}^+$, $\tau = 1$, φ funzione identica (e, conseguentemente, $\psi \equiv 1$). Ora neppure negli spazi metrici i teoremi (particolari) che discendono da quelli di questo lavoro ci risultano noti. Osserviamo, poi che negli spazi metrici, proprio perchè è $A \equiv \mathfrak{R}^+$, il Teorema 1 bis coincide con il Teorema 1 e il Teorema 2 bis col 2; il Teorema 2 diventa un caso particolare del Teorema 1 (1 bis) e il 4 lo diventa del 3: restano invece distinti fra loro i teoremi 1 e 3.

Infine per $f_1 = f_2$, negli spazi metrici, i teoremi 1, 1 bis, 2, 2 bis coincidono fra loro e sono caso particolare del Teorema 3 coincidente col Teorema 4, che, per quanto affermato su di esso in **4.1**, diventa il teorema (a) e (b) di [**2**], o il teorema di [**3**], poichè ad essi si riduce, appunto, negli spazi metrici, il Teorema 1 di $[\mathbf{1}]_3$ (cfr. anche $[\mathbf{1}]_4$, n. 4a)].

Osservazione aggiuntiva. Va osservato che qui (e in **[1]**$_{3,4}$) *le successioni del tipo* $u_n = f_1(u_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *sono di Cauchy se* $\tau = 1$ *oppure se* $\sup\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) : r = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots\} < +\infty$. I dettagli di questa affermazione saranno dati in una prossima Nota.

Bibliografia

[1] P. Azzimondi e C. Scaravelli: [•]$_1$ *Un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 773-780; [•]$_2$ *Un'osservazione su un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 507-508; [•]$_3$ *Teoremi di punto unito per applicazioni in spazi metrici generalizzati,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **15** (1983), 39-49; [•]$_4$ *Sul punto unito comune a due applicazioni in spazi metrici generalizzati,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 161-176.

[2] Lj. B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle,* Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 267-373.

[3] S. Massa, *Generalized contractions in metric spaces,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 689-694.

Summary

In this paper we continue our study about the common fixed point of two maps in generalized metric spaces, distance being, in general, discontinous. New theorems are obtained.

* * *