Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 149-160

ETTORE SANTI (*)

Un problema ben posto per un sistema differenziale lineare ed iperbolico a coefficienti non limitati (**)

Introduzione

Il problema di Cauchy per sistemi differenziali lineari iperbolici del primo ordine

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au) + \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial}{\partial x_i} u + Bu = f$$

con coefficienti discontinui è stato oggetto di numerose ricerche negli ultimi venti anni [**1**], [**3**], [**5**], [**6**], [**7**].

Minore spazio è dedicato nella letteratura ai problemi misti di valori iniziali ed al contorno relativi alla stessa equazione (con coefficienti discontinui).

In [**8**] abbiamo dato un teorema di esistenza ed unicità per un problema misto con condizioni al contorno di tipo conservativo, supponendo limitata la matrice A e costanti le matrici A^i (una tale situazione si ritrova ad esempio per le equazioni di Maxwell). Nella presente nota trattiamo lo stesso problema supponendo ora le componenti $a_{\alpha\beta}$ di A non (necessariamente) limitate ma sufficientemente regolari nella variabile t (1). Sistemi di questo tipo sono in

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Via Machiavelli 35, 44100 Ferrara, Italy.
(**) Lavoro eseguito con contributi del M. P. I. — Ricevuto: 22-VII-1983.

(1) Nei lavori [**2**], che tratta il problema di Cauchy per l'equazione lineare iperbolica del secondo ordine $u_{tt} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + f(x, t)$ (riconducibile a un problema di Cauchy per un sistema iperbolico del primo ordine), e [**7**], i coefficienti possono risultare fortemente irregolari in t mentre non dipendono dalla variabile spaziale x.

grado di descrivere materiali che presentano un comportamento singolare in prossimità di punti, curve o superficie, come un andamento rigido per i corpi elastici o il diamagnetismo perfetto per sistemi elettromagnetici.

In **1** vengono introdotti alcuni spazi funzionali necessari per una precisa formulazione del problema. In **2** viene provato un teorema di esistenza, operando un procedimento di riduzione al caso di coefficienti limitati (vedi [**4**]) e sfruttando il teorema di esistenza provato in [**8**]. In **3** viene provata l'unicità della soluzione, utilizzando un lemma di regolarizzazione delle soluzioni deboli analogo a quello usato da Wilcox in [**9**]$_2$. Infine nel campo di esistenza ed unicità delle soluzioni deboli abbiamo formulato un teorema di dipendenza continua dei dati.

1 - Formulazione del problema e notazioni

Consideriamo il problema misto di valori iniziali ed al contorno

$$(Au)_t + \sum_{i=1}^{n} A^i u_{x_i} = f \qquad \text{su } \Omega\times I = D\,, \quad I = [0, T]\,, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = h(x) \qquad x \in \Omega\,, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma^i u\nu_i = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega\times I\,, \tag{3}$$

ove Ω è un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare (cfr. [**8**]), ν_i sono le componenti della normale esterna ν a $\partial\Omega$; A, A^i e Γ^i $i = 1, \dots, n$ sono matrici $m\times m$ soddisfacenti le ipotesi seguenti:

(i) $A = A(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t \in I$, *è una matrice di componenti* $a_{\alpha\beta} \in L^2(D)$, *simmetrica e strettamente definita positiva, tale cioè che esiste un* $a \in \boldsymbol{R}^+$ *per cui*

$$\langle A(x, t)\lambda, \lambda\rangle \geq a|\lambda|^2 \quad \textit{per ogni } \lambda \in \boldsymbol{R}^m\,, \textit{ q.d. in } D\,. \tag{4}$$

(ii) *Esiste una matrice* $m\times m$ $\mathscr{A} = \mathscr{A}(x)$ *di componenti* $\bar{a}_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega)$ *e un insieme* $\mathscr{E} \subset [0, T]$ *di misura nulla tali che*

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ \text{su } [0,T]\setminus\mathscr{E}}} \|A(t) - \mathscr{A}\|_{L^2(\Omega)} = 0 \ (^2)\,.$$

Nel seguito con la notazione $A(x, 0)$ intendiamo la matrice $\mathscr{A}(x)$.

(2) Per semplicità di notazione scriveremo $L^2(\Omega)$ (e simili) sia nel caso di funzioni a valori in $\boldsymbol{R}$ che nel caso di funzioni a valori vettoriali (in $\boldsymbol{R}^m$ oppure $\boldsymbol{R}^{m^2}$).

(iii) A^i, $(i = 1, \dots, n)$, *sono matrici* $m \times m$ *di componenti* $a^i_{\alpha\beta}$ *simmetriche e costanti.*

Infine Γ^i sono per $i = 1, \dots, n$ matrici $m \times m$ di componenti costanti $\gamma^i_{\alpha\beta}$ definite da

$$\gamma^i_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta} \quad \text{per } \alpha > \beta\,, \qquad \gamma^i_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} a^i_{\alpha\beta} \quad \text{per } \alpha = \beta\,, \qquad \gamma^i_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{per } \alpha < \beta$$

e soddisfacenti la condizione

(iv) *Esiste una partizione* $\{P, Q\}$ *dell'insieme* $\{1, 2, \dots, m\}$ *tale che*

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma^i_{\alpha\beta} \nu_i(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,, \quad \textit{per } \alpha \in P,\ 1 \leqslant \beta \leqslant m \quad \textit{e per } \beta \in Q\,, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant m\,.$$

In [**8**] abbiamo considerato lo stesso problema nella ipotesi che la matrice A fosse a componenti $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(D)$ ed abbiamo studiato esistenza ed unicità delle soluzioni deboli di (1), (2), (3) intese nel senso seguente: $u \in L^2(D)$ è *soluzione debole di* (1), (2), (3) *con* $f \in L^2(D)$ *ed* $h \in L^2(\Omega)$ se risulta

$$(5) \qquad \int_D \{\langle Au, \varphi_t \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A^i u, \varphi_{x_i} \rangle + \langle f, \varphi \rangle\}\, dx\, dt + \int_\Omega \langle A(x, 0) h(x), \varphi(x, 0) \rangle\, dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C^1(\bar{D})$ con $\varphi(x, T) = 0$, $x \in \Omega$, $\sum_{i=1}^{n} (\Gamma^i)^T \varphi \nu_i = 0$ su $\partial\Omega$.

Ora, avendo eliminato l'ipotesi di limitatezza delle componenti $a_{\alpha\beta}$ della matrice A, cercheremo le soluzioni deboli del problema nello spazio $L^2_A(D) = \{u \in L^2(D);\ \int_D \langle Au, u \rangle\, dx\, dt < +\infty\}$.

Questo perchè l'appartenenza di u ad $L^2_A(D)$ traduce la condizione fisica di finitezza dell'energia del sistema. $L^2_A(D)$ è, nell'ipotesi (i), uno spazio di Hilbert rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare $\langle u, v \rangle_{L^2_A(D)} = \int_D \langle A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} v \rangle\, dx\, dt$ e coincide con $L^2(D)$ nel caso che $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(D)$ per ogni $\alpha, \beta = 1, \dots, m$.

Inoltre, per pervenire più agevolmente al relativo teorema di unicità occorre modificare in senso restrittivo la nozione di soluzione debole, ampliando lo spazio delle «funzioni test» rispetto a cui deve valere (5) e riformulando in maniera opportuna la condizione al bordo (3).

A tale scopo premettiamo alcune notazioni. Se B è un insieme misurabile di R^p, $p \geqslant 1$, e H uno spazio di Hilbert, poniamo $L^2(B, H) = \{u\colon B \to H;\ u$ è misurabile su B, $\int_B \|u(t)\|^2_H\, dt < +\infty\}$.

È ben noto che $L^2(B, H)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare $\langle u, v \rangle_{L^2(B,H)} = \int_B \langle u(t), v(t) \rangle_H\, dt$.

Allorchè $B = \Omega$, $H = \boldsymbol{R}$ (oppure $H = \boldsymbol{R}^m$) usiamo la notazione semplificata $L^2(\Omega)$.

1.1 - Def. Sia Λ un operatore differenziale lineare su B a coefficienti costanti e Λ^+ il suo aggiunto formale e sia $u \in L^2(B, H)$. Allora Λu esiste in $L^2(B, H)$ ed è uguale a $v \in L^2(B, H)$ se vale

$$\int_B \langle v(t), \varphi(t)\rangle_H \, dt = \int_B \langle u(t), \Lambda^+\varphi(t)\rangle_H \, dt \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(B, H) \, .$$

Se $H = \boldsymbol{R}$ (oppure $H = \boldsymbol{R}^m$) e $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ sono operatori differenziali su Ω con $L^2(\Lambda_1, \dots, \Lambda_r; \Omega)$ notiamo lo spazio $\{u \in L^2(\Omega); \Lambda_1 u \in L^2(\Omega), \dots, \Lambda_r u \in L^2(\Omega)\}$.

Indichiamo ora con Λ_0 l'operatore definito formalmente da

$$\Lambda_0 \varphi = \sum_{i=1}^n A^i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \qquad (\Lambda_0 \colon C_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)) \, ,$$

e con Γ e Γ^+ gli operatori formalmente autoaggiunti definiti per $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ da

$$(\Gamma\varphi)_\alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^m \gamma^i_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} \, , \qquad (\Gamma^+\varphi)_\alpha = -\sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^m \gamma^i_{\beta\alpha} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} \, ,$$

e consideriamo gli spazi $L^2(\Gamma; \Omega)$; $L^2(\Gamma^+; \Omega)$; $L^2(\Gamma, \Gamma^+; \Omega) \equiv L^2(\Lambda_0; \Omega)$ (3);

$$L_0^2(\Gamma; \Omega) = L^2(\Gamma; \Omega) \cap \{u; \int_\Omega \langle \Gamma u, \varphi\rangle \, dx = \int_\Omega \langle u, \Gamma^+\varphi\rangle \, dx \text{ per ogni } \varphi \in L^2(\Gamma^+; \Omega)\} \, ;$$

$$L_0^2(\Gamma^+; \Omega); \qquad \Delta_\Gamma = L_0^2(\Gamma; \Omega) \cap L^2(\Lambda_0; \Omega); \qquad \Delta_{\Gamma^+} = L_0^2(\Gamma^+; \Omega) \cap L^2(\Lambda_0; \Omega) \, .$$

La condizione al bordo (3) si può riformulare in forma debole supponendo $u \in \Delta_\Gamma$ (4)(5); l'appartenenza a Δ_Γ risulta una condizione al contorno conservativa e tale che $u \in \Delta_\Gamma$ e $\varphi \in C_0^1(\Omega) \Rightarrow \varphi u \in \Delta_\Gamma$ (cfr. [**9**]$_2$). Ci serve considerare inoltre gli spazi

$$\mathscr{F}^* = L^2(I; \Delta_{\Gamma^+}) \cap \{\varphi \in L^2(D); \frac{\partial}{\partial t} \varphi \in L^2_\Lambda(D)\} \, ,$$

$$\mathscr{F}^*_+ = L^2(I; \Delta_\Gamma) \cap \{\varphi \in L^2(D); \frac{\partial}{\partial t} \varphi \in L^2_\Lambda(D)\} \, .$$

---

(3) La coincidenza di $L^2(\Gamma, \Gamma^+; \Omega)$ con $L^2(\Lambda_0; \Omega)$ si verifica nell'ipotesi (iv) (cfr. [10]).

(4) Si noti che si ha $\int_\Omega \{\langle \Gamma u, \varphi\rangle - \langle \Gamma^+\varphi, u\rangle\} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \langle \varphi, \Gamma^i u\rangle n_i \, ds$ se $\partial\Omega, u, \varphi$ sono sufficientemente regolari.

(5) Analogamente la condizione al bordo $\sum_{i=1}^n (\Gamma^i)^T u\nu_i = 0$ su $\partial\Omega \times I$ si riformula in senso debole supponendo $u \in \Delta_{\Gamma^+}$.

1.2 - Def. Chiamiamo *soluzione debole con energia finita di* (1), (2), (3), con $f \in L^2(D)$ ed $h \in L^2_{A(\cdot,0)}(\Omega)$ una funzione $u \in L^2_A(D)$ tale che

$$(6) \quad \int_D \{\langle Au, \varphi_t\rangle + \sum_{i=1}^n \langle u, A^i \varphi_{x_i}\rangle + \langle f, \varphi\rangle\} \, dx \, dt + \int_\Omega \langle A(x, 0) h(x), \varphi(x, 0)\rangle \, dx = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{F}^*$ tale che $\varphi(x, T) = 0$ q.d. in Ω.

2 - Esistenza delle soluzioni deboli

In questo paragrafo se $f \in L^2(D)$ col simbolo f_k ($k \in N$) indichiamo la mollificata di f mediante convoluzione col nucleo $\omega_k(y) = k^{n+1}\omega(k^{n+1}y)$ ove $\omega \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n+1})$, $\omega(y) \geqslant 0$ per ogni $y \in \boldsymbol{R}^{n+1}$, $\omega(y) = 0$ per $|y| \geqslant 1$, $\int \omega(y) \, dy = 1$. La stessa notazione viene usata per funzioni di $L^2(\Omega)$. Inoltre se A è una matrice, con la notazione A_k indichiamo, per ogni $k \in N$, la matrice mollificata di componenti $(a_{\alpha\beta})_k$.

Accanto alle ipotesi (i), (ii), (iii), (iv) poniamo la seguente

(v) *Esistono* $\mu \colon [0, T] \to \boldsymbol{R}^+ \cup \{0\}$, $\mu \in L^2([0, T])$ *e* $h_0 \colon D \to \boldsymbol{R}^+$ *tali che*

$$\left\langle \frac{A(x, t + h) - A(x, t)}{h} \lambda, \lambda \right\rangle \geqslant -\mu(t) |\lambda|^2$$

q.d. in D *per ogni* $\lambda \in \boldsymbol{R}^m$ *e per ogni* $h \in \boldsymbol{R}$, $|h| < h_0(x, t)$.

2.1 - Teorema. *Per ogni* $f \in L^2(D)$, $h \in L^2_{A(\cdot,0)}(\Omega)$ *nelle ipotesi* (i), (ii), (iii), (iv), (v) *esiste* $u_0 \in L^2_A(D)$ *soluzione debole del problema* (1), (2), (3) *soddisfacente la diseguaglianza dell'energia*

$$(7) \qquad E(t) \leqslant C\left(\int_\Omega \langle A(x, 0) h(x), h(x)\rangle \, dx + \int_D |f(x, t)|^2 \, dx \, dt\right),$$

ove la costante C *dipende solo da* T *e dalla matrice* A.

Dim. Sia B la diagonalizzata della matrice A, sia cioè

$$B(x, t) = P(x, t) A(x, t) P^{-1}(x, t),$$

con P matrice ortogonale a coefficienti misurabili e limitati. Indichiamo con $b_{\alpha\beta}$ le componenti di B. Poichè le proprietà (4) e (v) non dipendono dalla base, la matrice B soddisfa

$$\langle B(x,t)\lambda,\lambda\rangle \geq a|\lambda|^2 \qquad \text{per ogni } \lambda\in \boldsymbol{R}^m,\ (x,t)\in D, \text{ e} \tag{8}$$

$$\left\langle \frac{B(x,t+h)-B(x,t)}{h}\lambda,\lambda\right\rangle \geq -\mu(t)|\lambda|^2, \tag{9}$$

per λ, x, t, h come nella (v). Le proprietà (8), (9) sono ancora soddisfatte (cfr. [**8**]) da ciascuna delle matrici diagonali mollificate B_k di componenti $(b_{\alpha\beta})_k = b_{\alpha\beta} * \omega_k$.

Allo scopo di ricondurci al caso dei coefficienti limitati consideriamo ora le nuove matrici diagonali $B^{(k)}$ di componenti

$$b^{(k)}_{\alpha\beta}(x,t) = \begin{cases} (b_{\alpha\beta})_k(x,t) & \text{se } (b_{\alpha\beta})_k(x,t) \leq b_{\alpha\beta}(x,t) \\ b_{\alpha\beta}(x,t) & \text{altrove}. \end{cases} \tag{10}$$

Si ha q.d. in D e per ogni $\lambda\in\boldsymbol{R}^m$

$$a|\lambda|^2 \leq \langle B^{(k)}(x,t)\lambda,\lambda\rangle \leq \begin{cases} \langle B_k(x,t)\lambda,\lambda\rangle \\ \langle B(x,t)\lambda,\lambda\rangle. \end{cases}$$

Si noti poi che a causa della (ii) risultano ben definite in $L^2(\Omega)$ le matrici $P(x,0)$ e $B(x,0)$.

Consideriamo infine la nuova successione di matrici $(C^{(k)})_{k\in N}$ definita da

$$C^{(k)}(x,t) = P^{-1}(x,t)\,B^{(k)}(x,t)P(x,t),$$

che gode delle seguenti proprietà

$$c^{(k)}_{\alpha\beta}\in L^\infty(D); \tag{11}$$ $$c^{(k)}_{\alpha\beta} = c^{(k)}_{\beta\alpha} \quad \text{per ogni } \alpha,\beta = 1,\dots,m; \tag{12}$$

$$\alpha_0|\lambda|^2 \leq \langle C^{(k)}(x,t)\lambda,\lambda\rangle \leq \begin{cases} \alpha_k|\lambda|^2 \\ \langle A(x,t)\lambda,\lambda\rangle, \end{cases} \tag{13}$$

q.d. in D, per opportune costanti $\alpha_0,\alpha_k\in\boldsymbol{R}^+$;

$$\left\langle \frac{C^{(k)}(x,t+h)-C^{(k)}(x,t)}{h}\lambda,\lambda\right\rangle \geq -\mu^{(k)}(t)|\lambda|, \quad \mu^{(k)}\to\mu \quad \text{in } L^1([0,T]), \tag{14}$$

q.d. in D, per ogni $\lambda\in\boldsymbol{R}^m$ e per ogni $h\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, $|h|<h_0(x,t)$.

Siccome per ogni $\alpha, \beta=1, \ldots, m$ $(a_{\alpha\beta})_k \to a_{\alpha\beta}$ in $L^1(D)$, esiste una successione crescente di numeri naturali $(n_k)_{k\in N}$ tale che (per ogni $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$) $(a_{\alpha\beta})_{n_k}(x, t) \to a_{\alpha\beta}(x, t)$ q.d. in D e di qui anche $c_{\alpha\beta}^{(n_k)}(x, t) \to a_{\alpha\beta}(x, t)$ q. d. in D.

Per comodità di notazione assumiamo $n_k = k$ per ogni $k \in N$. Si ha allora quale che sia $u \in L^2_A(D)$

$$\langle C^{(k)}(x, t)u(x, t), u(x, t)\rangle \to \langle A(x, t)u(x, t), u(x, t)\rangle \qquad \text{q.d. in } D$$

ed inoltre per la (13)

$$\langle C^{(k)}(x, t)u(x, t), u(x, t)\rangle \leqslant \text{cost}\, \langle A(x, t)u(x, t), u(x, t)\rangle$$

e di qui, tenendo conto che $\langle Au, u\rangle \in L^1(D)$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, $\langle C^{(k)}u, u\rangle$ converge in $L^1(D)$ a $\langle Au, u\rangle$.

Ciò premesso consideriamo il problema

$$(C^{(k)}u)_t + \sum_{i=1}^{n} A^i u_{x_i} = f \qquad \text{su } D\,, \tag{15}$$

con le condizioni

$$u(x, 0) = h(x)\,, \qquad x \in \Omega; \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma^i u \nu_i = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \times I\,. \tag{17}$$

Tale problema, come visto in [**8**], ha per ogni $k \in N$ una soluzione debole $u^{(k)}$ (nel senso della definizione 1.1 di [**8**], richiamata nell'introduzione) soddisfacente la disuguaglianza dell'energia

$$E_k(t) \leqslant \exp\Big(\frac{1}{a}\int_0^t (\mu^{(k)}(s) + 1)\, ds\Big)\Big(E_k(0) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |f(x, s)|^2\, dx\, ds\Big)\,. \tag{18}$$

È agevole vedere che una tale $u^{(k)}$ è anche soluzione debole dello stesso problema nel senso della Def. 1.2.

A causa della proprietà (13) e del fatto che $\|\omega_k * \bar{\mu}\|_1 \leqslant \|\bar{\mu}\|_1$ si ha

$$E_k(t) \leqslant \sigma(t)\Big(\int_\Omega \langle A(x, 0)h(x), h(x)\rangle\, dx + \int_\Omega \int_0^t |f(x, s)|^2\, dx\, ds\Big)\,. \tag{19}$$

Applicando il lemma di Gronwall si ottiene facilmente $\int_0^T E_k(t)\, dt <$ costante. Esiste allora una sottosuccessione di $(u^{(k)})_{k\in N}$, che indicheremo ancora con

$(u^{(k)})_{k\in N}$, convergente debolmente in $L^2(D)$ ad una certa $u_0\in L^2(D)$ e tale inoltre che $(C^{(k)})^{\frac12}u^{(k)}$ converga debolmente ad $A^{1/2}u_0$ in $L^2(D)$ (cfr. [**8**]). Per provare che u_0 è soluzione debole del problema (1), (2) (3) ci basta considerare i termini

$$\int_D \langle C^{(k)}u^{(k)}, \varphi_t\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \qquad \int_\Omega \langle C^{(k)}(x,0)\,h(x), h(x)\rangle\,\mathrm{d}x$$

e mostrare che, per $k\to+\infty$, convergono rispettivamente a

$$\int_D\langle Au_0, \varphi_t\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \qquad \int_\Omega \langle A(x,0)\,h(x), \varphi(x,0)\rangle\,\mathrm{d}x\,.$$

Per quanto osservato in precedenza

$$\langle C^{(k)}\varphi_t, \varphi_t\rangle \to \langle A\varphi_t, \varphi_t\rangle \text{ in } L^1(D) \text{ e quindi } (C^{(k)})^{\frac12}\varphi_t\to A^{\frac12}\varphi_t \text{ in } L^2(D)\,,$$

ciò che, tenuto inoltre conto che $(C^{(k)})^{\frac12}u^{(k)}$ converge debolmente ad $A^{\frac12}u_0$ in $L^2(D)$ implica

$$\lim_{k\to+\infty}\int_D\langle C^{(k)}u^{(k)}, \varphi_t\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_D\langle Au_0, \varphi_t\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

In modo analogo si tratta l'altro termine. Infine la (7) segue dalla (19) passando al limite per $k\to+\infty$.

3 - Il teorema di unicità

Premettiamo un lemma elementare, conseguenza della definizione di Δ_Γ e Δ_{Γ^+}.

3.1 - Lemma. *Sia $\varrho\in L^2(\Omega)$. Se $u\in L^2(\Omega)$ è tale che*

$$\int_\Omega\langle u, \sum_{i=1}^n A^i\varphi_{x_i}\rangle\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega\langle\varrho, \varphi\rangle\,\mathrm{d}x \tag{20}$$

per ogni $\varphi\in\Delta_{\Gamma^+}$, allora $u\in\Delta_\Gamma$ e risulta

$$\sum_{i=1}^n A^i u_{x_i}(x) = \varrho(x) \qquad q.d. \text{ in } D\,, \tag{21}$$

e viceversa.

3.2 - Lemma. *Sia $\tilde{u}$ soluzione debole con energia finita del problema*

$$(Au)_t + \sum_{i=1}^{n} A^i u_{x_i} = \tilde{F} \qquad \tilde{F} \in C_0^\infty(D)\,, \tag{22}$$

$$u(x, T) = 0 \qquad x \in \Omega\,, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\Gamma^i)^T u\nu_i = 0 \qquad su\ \partial\Omega \times I\,, \tag{24}$$

e sia $\tilde{\tilde{u}}(t) = \int_T^t \tilde{u}(\tau)\,d\tau$ *e* $\tilde{\tilde{F}}(t) = \int_T^t \tilde{F}(\tau)\,d\tau$. *Allora* $\tilde{\tilde{u}} \in \mathscr{F}^*$ *e soddisfa*

$$A\tilde{\tilde{u}}_t(x, t) + \sum_{i=1}^{n} A^i \tilde{\tilde{u}}_{x_i}(x, t) = \tilde{\tilde{F}}(x, t) \qquad q.d.\ in\ D\,, \tag{25}$$

$$\tilde{\tilde{u}}(x, T) = 0 \qquad q.d.\ in\ \Omega\,. \tag{26}$$

Dim. In base alla definizione 1.2 è

$$\int_0^T \int_\Omega \{\langle A\tilde{u}, \varphi_t\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{u}, A^i \varphi_{x_i}\rangle + \langle \tilde{F}, \varphi\rangle\}\,dx\,dt = 0\,, \tag{27}$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{F}_+^*$ e tale che $\varphi(x, T) = 0$ q.d. in Ω. Scrivendo la (27) per funzioni φ del tipo

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < \tau \\ (t - \tau)\,\psi(x) & \tau \leqslant t \leqslant T\,, \end{cases}$$

ove $\psi \in \Delta_\Gamma$, otteniamo

$$\int_\tau^T \int_\Omega \{\langle A\tilde{u}, \psi\rangle + (t - \tau)[\sum_{i=1}^{n} \langle u, A^i \psi_{x_i}\rangle + \langle \tilde{F}, \psi\rangle]\}\,dx\,dt = 0\,.$$

Derivando rispetto a τ abbiamo per quasi tutti i $\tau \in I$

$$-\int_\Omega \langle A(x, \tau)\tilde{u}(x, \tau), \psi(x)\rangle\,dx + \int_T^\tau \int_\Omega \{\sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{u}(x, t), A^i \psi_{x_i}(x)\rangle + \langle \tilde{F}(x,t), \psi(x)\rangle\}\,dx\,dt = 0,$$

e di qui, scambiando l'ordine di integrazione nel secondo integrale (teorema di Fubini) e ponendo $\tilde{\tilde{u}}(\tau) = \int_T^\tau \tilde{u}(t)\,dt$, $\tilde{\tilde{F}}(x, \tau) = \int_T^\tau \tilde{F}(x, t)\,dt$ si ha

$$\int_\Omega \{\sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\tilde{u}}(x, \tau), A^i \psi_{x_i}(x)\rangle + \langle \tilde{\tilde{F}}(x, \tau) - A(x, \tau)\,\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}(x, \tau)}{\partial \tau}\,, \psi(x)\rangle\}\,dx = 0\,, \tag{28}$$

per $\tau \in I \setminus N_\psi$ con $\mu_n(N_\psi) = 0$. L'insieme di misura nulla N_ψ in cui (28) può non valere dipende, a priori, da ψ. Tuttavia con ragionamento di tipo standard (cfr. Dim. del th. 7.2 di [**9**]$_1$) si vede che esiste un insieme di misura nulla N, tale che (28) vale per $\tau \in I \setminus N$ per ogni $\psi \in \Delta_\Gamma$.

Sfruttando il Lemma 3.1 si ha allora che per ogni $t \in I \setminus N$, $u(t) \in \Delta_{\Gamma^+}$ e risulta

$$A(x, t)\,\tilde{\tilde{u}}_t(x, t) + \sum_{i=1}^n A^i \tilde{\tilde{u}}_{x_i}(x, t) = \tilde{\tilde{F}}(x, t) \qquad \text{q.d. in } D\,.$$

Inoltre è evidentemente $\tilde{\tilde{u}}(T) = 0$.

3.3 - Osservazione. Più in generale si può dimostrare che se u è soluzione debole con energia finita del problema (1), (2), (3), allora, posto $\hat{u}(t) = \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ e $\hat{f}(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $\hat{u} \in \mathscr{F}_+^*$ e soddisfa

$$A(x, t)\,\hat{u}_t(x, t) + \sum_{i=1}^n A^i \hat{u}_{x_i}(x, t) = \hat{f}(x, t) + A(x, 0)\,h(x) \qquad \text{q.d. in } D$$

$$\hat{u}(0) = 0\,.$$

3.4 - Teorema. *Siano soddisfatte le ipotesi* (i), (ii), (iii), (iv) *ed inoltre*

(vi) *esistono* $\nu \in L^2([0, T])$, $\nu \geqslant 0$ *e* $h_0 \colon D \to \boldsymbol{R}^+$ *tali che*

$$\left\langle \frac{A(x, t+h) - A(x, t)}{h}\,\lambda, \lambda \right\rangle \leqslant \nu(t)\,|\lambda|^2$$

q.d. in D *per ogni* $\lambda \in \boldsymbol{R}^m$ *e per ogni* $h \in \boldsymbol{R}$, $|h| < h_0(x, t)$.

Allora il problema (1), (2), (3) *ha al più una soluzione debole con energia finita.*

Dim. Se u_1 ed u_2 sono soluzioni deboli con energia finita del problema (1), (2), (3) allora è

$$\int_D \langle u_1 - u_2,\, A\varphi_t + \sum_{i=1}^n A^i \varphi_{x_i} \rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0\,, \tag{29}$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{F}^*$ tale che $\varphi(T) = 0$. Osserviamo ora che l'ipotesi (vi) assicura, in base al Teorema 2.1 ed a considerazioni ovvie di simmetria, l'esistenza di soluzioni deboli del problema (22), (23), (24). Sia $\tilde{\varphi}$ una tale soluzione; allora per il Lemma 3.2 la funzione $\tilde{\tilde{\varphi}}$, definita da $\tilde{\tilde{\varphi}}(t) = \int_T^t \tilde{\varphi}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, è elemento di $\mathscr{F}^*$, soddisfa $\tilde{\tilde{\varphi}}(T) = 0$ e

$$A(x, t)\,\tilde{\tilde{\varphi}}_t(x, t) + \sum_{i=1}^n A^i \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_i}(x, t) = \tilde{\tilde{F}}(x, t) \qquad \text{q.d. in } D\,.$$

È quindi, per (29),

$$\int_D \langle u_1 - u_2, \tilde{\tilde{F}} \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_D \langle u_1 - u_2, A\tilde{\tilde{\varphi}}_t + \sum_{i=1}^{n} A^i \tilde{\tilde{\varphi}}_{x_i} \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \,.$$

Poichè l'applicazione $\mathscr{H}\colon C_0^\infty(D) \to C^\infty(D)$, definita da $\mathscr{H}(\tilde{F}) = \tilde{\tilde{F}}$ (ove $\tilde{\tilde{F}}(t) = \int_0^t \tilde{F}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$), è tale che $\mathscr{H}(C_0^\infty(D)) \supset C_0^\infty(D)$ si ha

$$\int_D \langle u_1 - u_2, F \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{per ogni } F \in C_0^\infty(D) \,,$$

da cui $$u_1(x, t) = u_2(x, t) \text{ q. d. in } D.$$

3.5 - Corollario. *Siano soddisfatte le ipotesi* (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi). *Allora esiste una ed una sola soluzione con energia finita del problema* (1), (2), (3) *e tale soluzione dipende con continuità dai dati.*

Dim. L'esistenza ed unicità della soluzione è contenuta nei Teoremi 2.1 e 3.4. Se indichiamo con u la soluzione, la dipendenza continua dai dati discende dalla disuguaglianza (immediata conseguenza di (7))

$$\|u\|_{L^2_A(D)} \leqslant K(\|h\|_{L^2_{A(\cdot,0)}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(D)})$$

e dalla linearità dell'operatore $Lu = (Au)_t + \sum_{i=1}^{n} A^i u_{x_i}$.

Bibliografia

[1] E. D. Conway, *Generalized solutions of linear differential equations with discontinuous coefficients and the uniqueness question for multidimensional quasilinear conservation laws,* J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 238-251.

[2] F. Colombini, E. De Giorgi et S. Spagnolo, *Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **6** (1979), 511-559.

[3] L. De Simon and G. Torelli, *First order linear partial differential equations with discontinuous coefficients,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **128** (1981), 325-340.

[4] M. Fabrizio and A. Hanyga, *Mixed problems for linear hyperbolic equations with unbounded coefficients* (in corso di pubblicazione).

[5] A. E. HURD, *A uniqueness theorem for weak solutions of symmetric quasilinear hyperbolic systems*, Pacific J. Math. **28** (1969), 555-559.

[6] A. E. HURD and D. H. SATTINGER, *Questions of existence and uniqueness for hyperbolic equations with discontinuous coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 159-174.

[7] E. JANNELLI, *Sistemi iperbolici simmetrici a coefficienti dipendenti solo dal tempo*, Suppl. Boll. Un. Mat. Ital. Analisi Funzionale e applicazioni **1** (1980), 153-175.

[8] E. SANTI, *Esistenza ed unicità delle soluzioni di un problema misto per un sistema iperbolico simmetrico con coefficienti discontinui*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **33** (1984), 185-200.

[9] C. H. WILCOX: $[\bullet]_1$ *Initial-boundary value problems for linear hyperbolic partial differential equations of the second order*, Arch. Rational Mech. Anal. **10** (1962), 361-400; $[\bullet]_2$ *The domain of dependence inequality and initial-boundary value problems for symmetric hyperbolic systems*, MRC Techn. Summary Rep. no. 333 (1962).

Summary

We consider, in a cilindrical space-time domain, an initial and boundary value problem with conservative boundary conditions, relating to a class of symmetric hyperbolic linear operators, with Maxwell's operator as a particular case. Admitting the possibility for the coefficients to be unbounded, we give conditions under which the problem, in a convenient weak sense, is well posed.

* * *