Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 325-328

GIORDANO GALLINA (*)

Sui sistemi di annullatori nei quasi-anelli (**)

1 - Introduzione

In [1] si definisce «catena speciale di un quasi-anello (sinistro) N» una catena di ideali di N: $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_n = N$ tale che l'insieme degli annullatori in T_{i+2}/T_i si riduca ($\forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$) ad un sottoinsieme di $\{T_{i+1}/T_i, T_{i+2}/T_i\}$ o di $\{T_i/T_i, T_{i+2}/T_i\}$.

Tale concetto è stato utilizzato per fornire teoremi di struttura relativi a quasi-anelli, il cui semigruppo moltiplicativo soddisfi a particolari identità.

In [3] viene definita iperspeciale una catena speciale $T_1 \subset \ldots \subset T_n = N$, tale che T_1 sia uno zero-quasi-anello e N/T_{n-1} sia privo di annullatori propri.

Scopo di questo lavoro è quello di indicare condizioni sufficienti perchè un quasi-anello contenga una catena iperspeciale.

In particolare mostreremo che un quasi-anello con opportune condizioni catenarie, con gruppo additivo non semplice, se è nilpotente o è un nil-IFP-quasi-anello, ha una catena iperspeciale contenente O, ogni cui quoziente è uno zero-quasi-anello.

2 - Premesse

È necessario premettere alcune notazioni.

Se S è un sottoinsieme di N, chiamiamo *annullatore destro* di S l'insieme $A_d(S) = \{x \in N \mid Sx = 0\}$. Poniamo $A_0(N) = \{A_d(S) \mid S \subseteq N, S \text{ finito}\}$. Per altre notazioni, rimandiamo il lettore a [2].

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro parzialmente finanziato da fondi M.P.I. — Ricevuto: 15-XII-1983.

Oss. 1. Siano N un quasi-anello ed S un suo sottoinsieme tale che $A_d(S)$ sia un ideale e sia φ l'omomorfismo naturale $N \to N/A_d(S)$. Allora $\varphi^{-1}(A_d[b]) = A_d(Sb)$, con $b \in [b] \in N/A_d(S)$.

Se $[x] \in A_d([b])$, è $[b][x] = [0]$, sicchè esiste un elemento h di $A_d(S)$ tale che $bx = h$. Di qui, per ogni $s \in S$, $sbx = 0$. Pertanto, $x \in A_d(Sb)$. Dunque, $\varphi^{-1}(A_d([b])) \subseteq A_d(Sb)$. Sia $x \in A_d(Sb)$. Per ogni $s \in S$, risulta $sbx = 0$. Se h è un arbitrario elemento di $A_d(S)$, risulta $sbh = 0$, poichè $A_d(S)$ è un ideale. Conseguentemente, $sb(x+h) = sbx + sbh = 0$. Per l'arbitrarietà di h in $A_d(S)$, la classe $[x]$ di $N/A_d(S)$ è contenuta in $A_d([b])$. Pertanto, $A_d(Sb) \subseteq \varphi^{-1}(A_d([b]))$.

3 - Esistenza di catene iperspeciali

Veniamo ora al risultato annunciato.

Teorema 2. *Sia N un quasi-anello con le condizioni catenarie ascendente e discendente sugli elementi di $A_0(N)$ e con gruppo additivo non semplice. Allora*

(1) *se N è nilpotente, ha una catena iperspeciale contenente O, ogni cui quoziente è uno zero-quasi-anello* (1);

(2) *se N è un* nil-IFP-*quasi-anello, ogni catena (finita) di ideali di $A_0(N)$ può essere raffinata ad una catena iperspeciale contenente O, ogni cui quoziente è uno zero-quasi-anello.*

Dim. (1) Sia m il minimo intero tale che $N^m = 0$. Se $m = 2$, sia M^+ un sottogruppo normale proprio di N^+ (esistente per le ipotesi). La catena $0 \subset M \subset N$ è iperspeciale.

Supponiamo $m > 2$. Sia $T_0 = 0$, $T_1 = A_d(N)$. T_1 è un ideale non nullo di N, poichè N è nilpotente. Per le ipotesi poste sopra $A_0(N)$, esiste un sottoinsieme finito S_1 di N tale che $T_1 = A_d(S_1)$. Poniamo $N_1 = N/T_1$.

Sia, in N_1, $T_2/T_1 = A_d(N_1)$. Si nota che T_2/T_1 è un ideale di N_1 e che $T_2 = A_d(N^2)$ (Oss. 1).

Per le ipotesi e per l'Oss. 1, N_1 ha le condizioni catenarie ascendente e discendente sugli elementi di $A_0(N_1)$. Quindi, esiste un sottoinsieme finito S_2 di N_1, tale che $T_2/T_1 = A_d(S_2)$. Risulta dunque $T_2 \in A_0(N)$. Se si prosegue in questo modo, si determina una catena di ideali di $A_0(N)$

$$0 = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_m = N \,. \tag{1}$$

(1) Notiamo che, se N^+ fosse semplice, N sarebbe uno zero-quasi-anello non avente nessuna catena speciale propria.

Per la definizione di T_i, risulta che T_i/T_{i-1} è uno zero-quasi-anello (per $0 < i \leqslant m$).

Supponiamo che la catena (1) non sia speciale. Allora, esiste un $i \in \{0, \dots, m-2\}$, tale che l'insieme degli annullatori destri in T_{i+2}/T_i non si riduca ad un sottoinsieme di $\{T_{i+1}/T_i,\ T_{i+2}/T_i\}$ [2].

Sia T'/T_i un annullatore di T_{i+2}/T_i diverso da T_{i+1}/T_i e da T_{i+2}/T_i. In base alla definizione dei T_j, $T_{i+1} \subset T' \subset T_{i+2}$.

Notiamo che T'/T_i è, dal punto di vista additivo, un sottogruppo normale di N/T_i, essendo l'intersezione di un annullatore destro di N/T_i, con T_{i+2}/T_i. Il T' è poi un ideale, poichè è un sottogruppo normale di N^+ tale che $T_{i+1} \subset T' \subset T_{i+2}$. Inoltre T' è appartenente ad $A_0(N)$ (Oss. 1).

Possiamo aggiungere T' alla catena (1). Se il raffinamento considerato non è una catena speciale, proseguiamo in modo analogo. Per le ipotesi, dopo un numero finito di passi troviamo una catena iperspeciale che verifica l'asserto.

(2) Possiamo supporre che N non sia uno zero-quasi-anello.

Sia B una catena di elementi di $A_0(N)$. Con l'eventuale aggiunta di 0 e di N a B, otteniamo una catena

$$(2) \qquad 0 = I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_h \subset N = I_{h+1} \qquad \text{con } I_1, \dots, I_h \in B\,.$$

Se, per un $t \leqslant h$, I_{t+1}/I_t ha un annullatore proprio H/I_t, aggiungiamo H alla catena (2), tenuto presente che, per la Oss. 1, $H \in A_0(N)$. Se si prosegue in questo modo, in base alle ipotesi, troviamo una catena di ideali di $A_0(N)$, tutti i cui quozienti sono privi di annullatori propri.

Supponiamo che esista uno $j \in \{0, \dots, h-1\}$ tale che l'insieme degli annullatori destri in I_{j+2}/I_j non si riduca ad un sottoinsieme di $\{I_{j+1}/I_j, I_{j+2}/I_j\}$. Sia I'/I_j un annullatore destro di I_{j+2}/I_j diverso da I_{j+1}/I_j e da I_{j+2}/I_j. Poniamo $I'/I_j = A_d([a])$. Dimostriamo che

$$(3) \qquad (I'/I_j) \cap (I_{j+1}/I_j) \neq I_j/I_j\,.$$

È $(I_{j+2}/I_j)^4 = I_j/I_j$. È ovvio che non può essere $(I_{j+2}/I_j)^2 = I_j/I_j$. Se $(I_{j+2}/I_j)^3 = I_j/I_j$, ogni elemento $[x]$ di $(I_{j+2}/I_j)^2 \subseteq I_{j+1}/I_j$ è tale che $[a][x] = [0]$, ed in questo caso la (3) sussiste. Se $(I_{j+2}/I_j)^3 \neq I_j/I_j$, ogni elemento di $(I_{j+2}/I_j)^3$, che è contenuto in I_{j+1}/I_j, è appartenente a I'/I_j. Pertanto, vale la (3).

Se I' contiene I_{j+1}/I_j, aggiungiamo I' alla catena (2). Se non lo contiene, risulta $I_j \neq I' \cap I_{j+1} \neq I_{j+1}$ per la (3). In tale caso, aggiungiamo $I' \cap I_{j+1}$ alla catena (2).

---

[2] Notiamo che, poichè T_{i+2}/T_i è nilpotente, in esso non vi può essere nessun annullatore uguale a T_i/T_i.

Se il raffinamento ottenuto non è una catena speciale, proseguiamo in modo analogo. Per le ipotesi, dopo un numero finito di passi troviamo una catena iperspeciale che verifica l'asserto.

Da quanto detto sopra, si ha subito il

Corollario 3. *Se N è un* IFP-*quasi-anello con le condizioni catenarie ascendente e discendente sugli ideali di $A_0(N)$, ogni catena di ideali di $A_0(N)$ può essere raffinata ad una catena $0 = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_m = N$ di ideali di N, tale che per ogni $i > 1$, T_i/T_{i-1} è privo di annullatori propri e tale che, per ogni $i = 0, 1, \ldots, m-2$,*

(1) *l'intersezione di un annullatore di T_{i+2}/T_i con T_{i+1}/T_i è uguale o a T_i/T_i o a T_{i+1}/T_i;*

(2) *non vi sono annullatori propri in T_{i+2}/T_i che includano propriamente T_{i+1}/T_i.*

Bibliografia

[1] C. Cotti Ferrero, *Sugli stems il cui prodotto è distributivo rispetto a se stesso*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972), 203-220.

[2] G. Pilz, *Near rings*, North-Holland, 1977.

[3] R. Scapellato, *On autodistributive near-rings*, Riv. Mat. Univ. Parma (4), **10** (1984), 303-310.

Summary

We determine hyperspecial chains on a class of nil near-rings.

* * *