Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 345-350

GRAZIA RAGUSO e LUIGIA RELLA (*)

Sulla caratterizzazione delle $(k, n; f)$ - calotte di tipo $(1, n)$ (**)

Introduzione

Nella presente Nota si studiano le calotte di $S_{t,q}$, $t \geqslant 2$, con punti dotati di peso di tipo $(1, n)$, dette anche $(k, n; f)$-calotte, aventi peso massimo, ω, dei punti maggiore di 2 e minore di $n-1$, essendo già state trattate in [**4**]$_{1,2}$ quelle con $\omega = 2$ e $\omega = n-1$.

La nozione di $(k, n; f)$-calotta è stata introdotta da A. Barlotti in [**1**] e già, precedentemente, per $t = 2$ e con nome diverso, da M. Tallini Scafati allo scopo di caratterizzare graficamente le curve algebriche dei piani di Galois [**6**]$_3$.

In **1** si richiamano le nozioni fondamentali sulle $(k, n; f)$-calotte rinviando, per i particolari, a [**3**]$_{1,2}$, [**4**]$_2$.

In **2** si determina una condizione necessaria su ω, per l'esistenza di $(k, q+1; f)$-archi di un piano proiettivo finito (valida anche in $S_{t,q}$, $t \geqslant 3$). Se ne dà, successivamente, una caratterizzazione dalla quale si evince che l'esistenza di siffatti archi si riconduce a quella di $\{k, n\}$-archi in senso classico; in particolare dalla non esistenza dei $\{21, 3\}$-archi, dimostrata da A. Cossu in [**2**], si deduce la non esistenza dei $(k, n; f)$-archi [**2**].

In **3** si caratterizzano le $(k, n; f)$-calotte di $S_{t,q}$, $t \geqslant 3$, e quindi, in base ai risultati, sulle calotte classiche, di M. Tallini Scafati [**6**]$_{1,2}$ si perviene alla non esistenza delle stesse.

1 - Preliminari e richiami

Sia $S_{t,q}$ uno spazio proiettivo di ordine q (q qualsiasi se $t = 2$, $q = p^h$ con p primo se $t \geqslant 3$). Siano $\mathscr{P}$ ed $\mathscr{R}$, rispettivamente, l'insieme dei punti e delle

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università, Via Giustino Fortunato, 70125 Bari, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 26-I-1984.

rette di $S_{t,q}$. Si consideri una funzione f di $S_{t,q}$ in N, insieme dei numeri interi non negativi; si dica *peso* del punto $P \in \mathscr{P}$ il valore $f(P)$, e *supporto* di f l'insieme dei punti di $S_{t,q}$ di peso non nullo. Se $r \in \mathscr{R}$, si dica *peso* di r il valore $F(r) = \sum_{P \in r} f(P)$ e *peso totale* di $S_{t,q}$ il valore $w = \sum_{P \in \mathscr{P}} f(P)$.

Def. Si dice $(k, n; f)$-*calotta* di $S_{t,q}$ un sottoinsieme K di punti dello spazio tale che f sia una funzione di $\mathscr{P}$ in N, $k = |K|$ ed n il massimo peso di una retta.

In particolare per $t = 2$ si ha un $(k, n; f)$-*arco* [4]$_1$.

Per escludere casi banali, si assumerà $n \geqslant 2$ e $1 < k < Q_t$, ove $Q_t = q^t + q^{t-1} + \ldots + q + 1$. In tal caso, se $\omega = \max f$ risulta $\omega \leqslant n - 1$ (cfr. [3]$_2$). Se l_i è il numero dei punti di peso i, si ha

$$w = \sum_{i=1}^{\omega} i\, l_i\,, \qquad k = \sum_{i=1}^{\omega} l_i\,, \tag{1.1}$$

w si dice anche *peso della calotta*. K si dice *monoidale* se $\operatorname{Im} f = \{0, 1, \omega\}$ e $l_\omega = 1$.

Se t_m è il numero delle rette di peso m, si dice che K è di *tipo* $(n_1, n_2, \ldots, n_h = n)$ con $n_i < n_j$, per $i < j$ se $t_m = 0$ per $m \neq n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ e $t_{n_i} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$.

Per le $(k, n; f)$-calotte di tipo $(1, n)$ valgono le seguenti proprietà (cfr. [3]$_2$, [4]$_2$):

(a) $\operatorname{Im} f = \{0, 1\}$ oppure $\operatorname{Im} f = \{0, 1, \omega\}$;

(b) indicati con v_1^s e v_n^s rispettivamente il numero delle rette di peso 1 e di peso n passanti per un punto di peso s risulta

$$v_1^s = \frac{(n-s)qQ_{t-2} - w + n}{n-1}\,, \qquad v_n^s = \frac{(s-1)qQ_{t-2} + w - 1}{n-1}\,; \tag{1.2}$$

(c) condizione necessaria per l'esistenza di una $(k, n; f)$-calotta di tipo $(1, n)$ è che sia $q \equiv 0 \pmod{(n-1)}$;

(d) il numero delle rette di peso 1 e di peso n è dato rispettivamente da

$$t_1 = \frac{Q_{t-1}}{n-1}\left(n\frac{Q_t}{Q_1} - w\right), \qquad t_n = \frac{Q_{t-1}}{n-1}\left(w - \frac{Q_t}{Q_1}\right); \tag{1.3}$$

(e) il peso w dello spazio deve essere radice dell'equazione di secondo grado

$$w^2 - w(nQ_{t-1} + 1) + nQ_{t-1}\frac{Q_t}{Q_1} + qQ_{t-2}\omega(\omega - 1)\, l_\omega = 0\,; \tag{1.4}$$

(f) condizione necessaria per l'esistenza di una $(k, n; f)$-calotta di tipo $(1, n)$ con $\omega \geqslant 2$ è che sia $w = (n - \omega) q Q_{t-2} + n$;

(g) l'intersezione di una $(k, n; f)$-calotta di tipo $(1, n)$ di $S_{t,q}$, $t \geqslant 3$, con uno spazio subordinato $S_{h,q}$, $h \geqslant 2$, contenente un punto di peso $\omega (\geqslant 2)$ e una retta di peso 1, è una $(k', n; f')$-calotta di tipo $(1, n)$ con $f' = f_{|S_{h,q}}$ e $\operatorname{Im} f' = \{0, 1, \omega\}$.

Nei paragrafi successivi si prenderanno in esame le $(k, n; f)$-calotte di tipo $(1, n)$ con $2 < \omega < n - 1$ (con $n = q + 1$ se $t = 2$ e con n qualsiasi se $t \geqslant 3$), essendo già state studiate quelle con $\omega = 2$ e $\omega = n - 1$ ($[4]_{1,2}$).

2 - $(k, q + 1; f)$-archi di tipo $(1, q+1)$ con $2 < \omega < q$.

Sia K un $(k, q + 1, f)$- arco di tipo $(1, q + 1)$ con $2 < \omega < q$ di un piano proiettivo, π, di ordine q. Per la (f) e dalle (1.1)-(1.4), si ha

$$(2.1) \quad v_1^0 = \omega, \quad v_{q+1}^0 = q+1-\omega, \quad v_1^1 = \omega - 1, \quad v_{q+1}^1 = q+2-\omega, \quad v_{q+1}^{\omega} = q+1,$$

$$t_1 = (\omega - 1)(q+1), \quad t_{q+1} = (q+1-\omega)(q+1)+1, \quad l_1 = q+1, \quad l_\omega = \frac{q(q+1)}{\omega} - q\,.$$

Proposizione 1. *Se K è un $(k, q + 1; f)$-arco ti tipo $(1, q + 1)$ di un piano proiettivo π di ordine q con $2 < \omega < q$, allora $q \equiv 0$ (mod. ω).*

Se K un $(k, q + 1; f)$-arco di tipo $(1, q + 1)$, i parametri (2.1) sono interi. Da $l_\omega = q(q + 1)/\omega - q$ segue allora $\omega | q(q + 1)$.

Si prova, innanzitutto, che ω non divide $(q + 1)$. Infatti, detto P un punto di peso 1 ed r una delle $q + 2 - \omega$ rette, di peso $q + 1$, per esso, siano x e y, rispettivamente, il numero dei punti di peso 1 e di peso ω di r. Si ha allora $x + \omega y = q + 1$; d'altra parte se $\omega | q + 1$ esiste un intero $h \neq 0$ tale $x = (h - y)\omega$ con $h - y \geqslant 1$ essendoci su ciascuna retta almeno il punto P di peso 1. Pertanto su ciascuna delle $q + 2 - \omega$ rette di peso $q + 1$ ci sono almeno $\omega - 1$ punti di peso 1 distinti da P, ed essendo $l_1 = q + 1$ si ha $(q + 2 - \omega)(\omega - 1) + 1 \leqslant q + 1$, da cui $q(\omega - 2) \leqslant (\omega - 2)(\omega - 1)$ cioè $q \leqslant \omega - 1$, essendo $\omega > 2$. Ma ciò è assurdo poichè $\omega < q$. Allora $\omega | q(q + 1)$ e $\omega \nmid (q + 1)$. Sia Q un punto di peso ω. Su ciascuna delle $q + 1$ rette (di peso $q + 1$) per Q c'è almeno un punto di peso 1 poichè $\omega \nmid (q + 1)$. Restano così individuati tutti i $q + 1$ punti di peso 1, per cui su ciascuna retta c'è esattamente 1 solo punto di peso 1 e q/ω punti di peso ω. Pertanto, essendo q/ω un intero, segue l'asserto.

Proposizione 2. *In un piano proiettivo π di ordine q, i $(k, q+1; f)$-archi di tipo $(1, q+1)$ con $2 < \omega < q$ sono tutti e soli quelli aventi come punti di peso 1 i punti di una retta e come punti di peso ω i punti di un $\{q(q+1-\omega)/\omega,\ q/\omega\}$-arco di tipo $(0, q/\omega)$.*

Sia K un $(k, q+1; f)$-arco di tipo $(1, q+1)$ e P un generico punto di K di peso ω. Su ciascuna delle $q+1$ rette per P c'è almeno 1 punto di peso 1 poichè, per la Prop. 1, $\omega | q$ e quindi $\omega \nmid q+1$. Ma essendo $l_1 = q+1$, su ciascuna retta c'è 1 solo punto di peso 1 e q/ω punti di peso ω. I punti di peso 1 sono allineati. Infatti la retta r congiungente due punti di peso 1 ha peso $q+1$ e non può contenere punti di peso ω per quanto detto precedentemente. Pertanto i punti di peso 1 sono tutti e soli quelli della retta r.

Detto K^* l'insieme di punti di peso ω, si può facilmente verificare che le rette di π, rispetto a K^*, sono o 0-secanti, o q/ω-secanti. Allora K^* è un $\{q(q+1-\omega)/\omega,\ q/\omega\}$-arco di tipo $(0, q/\omega)$.

Infine sia K un $(k, n; f)$-arco avente come punti di peso 1 quelli di una retta e come punti di peso ω quelli di $\{q(q+1-\omega)/\omega, q/\omega\}$-arco di tipo $(0, q/\omega)$. È ovvio che $n = q+1$ e le rette del piano hanno o peso 1 o peso $q+1$, quindi K è di tipo $(1, q+1)$. Onde l'asserto.

L'esistenza, dunque, dei $(k, n; f)$-archi con $n = q+1$ e ω qualsiasi è ricondotta alla esistenza di particolari $\{k', n'\}$-archi, in senso classico, come già rilevato in [**4**]$_1$ nel caso particolare $\omega = 2$.

Dai risultati di Cossu, (cfr. Prop. XI di [**2**]) e dalla Proposizione precedente segue

Corollario. *In $S_{2,9}$ non esistono $(k, 10; f)$-archi di tipo $(1, 10)$ con $2 < \omega < 9$.*

3 - $(k,n;f)$-calotte di tipo $(1, n)$ con $2 < \omega < n-1$ di $S_{t,q}$, $t \geqslant 3$.

Si passa, ora, allo studio delle $(k, n; f)$-calotte K in $S_{t,q}$, $t \geqslant 3$, di tipo $(1, n)$ con $2 < \omega < n-1$ (essendo già state studiate quelle con $\omega = 2$ e $\omega = n-1$ in [**4**]$_2$) per le quali risulta $\mathrm{Im}\, f = \{0, 1, \omega\}$ [**3**]$_2$.

Proposizione 3. *Condizione necessaria perchè esista una $(k, n; f)$-calotta K di tipo $(1, n)$ di $S_{3,q}$ con $2 < \omega < n-1$ è che sia $n = q+1$ e $q \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ \omega)$.*

Sia K una $(k, n; f)$-calotta di tipo $(1, n)$ di $S_{3,q}$ con $2 < \omega < n-1$.
Il numero l_1 dei punti di peso 1 di K è dato da (cfr. (1.1) e (1.4))

$$l_1 = \frac{[\omega(q+1)-n](q^2+q+1)}{(\omega-1)(q+1)}.$$

Poichè l_1 è un intero $(\omega-1)(q+1)$ divide $[\omega(q+1)-n](q^2+q+1)$; in particolare anche $q+1$ divide il numeratore di l_1. Osservato che, nè $q+1$ nè un suo divisore divide q^2+q+1, necessariamente $(q+1)|[\omega(q+1)-n]$, da cui $q+1|n$ e quindi $n=q+1$ essendo anche $q\equiv 0(n-1)$ [**3**]$_2$.

Sia K' l'intersezione di K con un piano, π, passante per un punto di peso ω e una retta di peso 1. Per la proprietà (g), K' risulta un $(k', n; f')$-arco di tipo $(1, n)$ con $n=q+1$ e $2<\omega<q$ e quindi $\omega|q$ (cfr. Prop. 1). Onde l'asserto.

Proposizione 4. *In $S_{3,q}$ non esistono $(k, n; f)$-calotte di tipo $(1,n)$ con $2<\omega<n-1$.*

Sia K una $(k, n; f)$-calotta di tipo $(1, n)$. Per la proposizione precedente deve essere $n=q+1$, e dalle (1.1)-(1.4), si ha

$$(3.1)\quad v_1^0=\omega(q+1)\,,\quad v_{q+1}^0=q^2-(\omega-1)q-(\omega-1)\,,\quad v_1^1=(\omega-1)(q+1)\,,$$
$$v_{q+1}^1=q^2-(\omega-2)q-(\omega-2)\,,\quad v_{q+1}^{\omega}=q^2+q+1\,,\quad t_1=(\omega-1)(q+1)(q^2+q+1)\,,$$
$$t_{q+1}=(q^2+q+1)[q^2-(\omega-1)q-(\omega-2)],\quad l_1=q^2+q+1,$$
$$l_\omega=\frac{q}{\omega}[q^2-(\omega-1)(q+1)]\,.$$

Sia K' il $(k', q+1; f')$-arco di tipo $(1, q+1)$ ottenuto intersecando K con un piano π per un punto di peso ω e per una generica retta di peso 1 ((g)). Dalla Proposizione 2 segue che i punti di peso 1 di K' sono i punti di una retta e i punti di peso ω sono quelli di un $\{q/\omega(q+1-\omega), q/\omega\}$-arco di tipo $(0, q/\omega)$. Sul piano π, per le (3.1), ci sono esattamente $(\omega-1)(q+1)$ rette di peso 1, per cui essendo $t_1=(\omega-1)(q+1)(q^2+q+1)$, si deduce che le t_1 rette si distribuiscono ad $(\omega-1)(q+1)$ a $(\omega-1)(q+1)$ sui q^2+q+1 piani per P. Si verifica facilmente che le $(q^2+q+1)\cdot[q^2-(\omega-1)q-(\omega-2)]$ rette di peso $q+1$ si distribuiscono su ciascun piano π per P in numero di $(q-\omega)\cdot(q+1)+1$ rette non passanti per P e di $q+1$ rette passanti per P.

In definitiva le rette di $S_{3,q}$ rispetto all'insieme K^* dei punti di K di peso ω sono o 0-secanti o q/ω-secanti, per cui K^* risulterebbe una $\{q/\omega[q^2-(\omega-1)\cdot(q+1)], q/\omega\}$-calotta di tipo $(0, q/\omega)$, il che contraddice il risultato di Tallini Scafati (cfr. Prop. VIII [**4**]$_1$, [**6**]$_2$) secondo cui in $S_{3,q}$ non esistono calotte di tipo $(0, n^*)$ con $2\leqslant n^*\leqslant q-1$.

Proposizione 5. *Non esistono in $S_{t,q}$, $t>3$, $(k, n; f)$-calotte di tipo $(1, n)$ con $2<\omega<n-1$.*

Se esistesse una $(k, n; f)$-calotta K di tipo $(1, n)$ con $2<\omega<n-1$, in $S_{t,q}$, $t>3$, l'intersezione di K con un $S_{3,q}$, contenente un punto di peso ω e una retta di peso 1, sarebbe una $(k', n; f')$-calotta di tipo $(1, n)$ con $2<\omega<n-1$ in $S_{3,q}$ contraddicendo la proposizione precedente.

Bibliografia

[1] A. BARLOTTI, *Recent results in Galois geometries useful in coding theory*, Internationaux du C.N.R.S. n. 276, Théorie de l'Information Cachan, 4-8 July 1977, editions du C.N.R.S. (1978), 185-187.

[2] A. COSSU, *Su alcune proprietà dei $\{k, n\}$-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*, Rend. Mat. (5) **20** (1961), 271-277.

[3] E. D'AGOSTINI: $[\cdot]_1$ *Alcune osservazioni sui $(k, n; f)$-archi di un piano finito*, Atti Accad. Sci. Istit. Bologna Rend. **6** (1979), 211-218; $[\cdot]_2$ *Sulla caratterizzazione delle $(k, n; f)$-calotte di tipo $(n-2, n)$*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **29** (1980), 263-275.

[4] G. RAGUSO e L. RELLA: $[\cdot]_1$ *Sui $(k, n; f)$-archi di tipo $(1, n)$ di un piano proiettivo finito*, Note di Mat. Lecce **3** (1983), 307-320; $[\cdot]_2$ *Sulle $(k, n; f)$-calotte di tipo $(1, n)$*, Note di Mat., Lecce **3** (1983), 267-280.

[5] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[6] M. TALLINI SCAFATI: $[\cdot]_1$ *Calotte di tipo (m, n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$*, (I), (II), Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **40** (1966), 812-818, 1020-1025; $[\cdot]_2$ *Sulla caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di $S_{r,q}$*, Rend. Mat. **26** (1967), 273-303; $[\cdot]_3$ *Graphic curves on a Galois plane*, Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue Applicaz., Perugia (1971), 413-419.

Summary

In this Note the $(k, q+1; f)$-arcs of type $(1, q+1)$ of a finite projective plane and the $(k, n; f)$-caps of type $(1, n)$ of a Galois spaces $S_{t,q}$ $(t \geq 3)$, having maximum weight ω of points, such that $2 < \omega < n-1$, are characterized.

* * *