Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 381-386

F. CALIÒ e E. MARCHETTI (*)

Sull' esistenza di polinomi supporto di particolari formule di quadratura (**)

Introduzione

Nell'ambito dell'approssimazione di integrali è talora indispensabile costruire formule di quadratura che coinvolgono un insieme prefissato di nodi (ad esempio punti in cui la funzione integranda ha un particolare andamento, o nodi di un problema sperimentale).

Inoltre se le formule di quadratura usate utilizzano ulteriori nodi, questi possono essere scelti in modo da migliorare in qualche senso l'accuratezza della formula stessa; uno dei criteri di scelta può essere quello di elevarne il grado polinomiale.

Le formule in questione sono del tipo

$$(1) \qquad \int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i) + \sum_{j=1}^{m} B_j f(\eta_j) + R_n f \ {}^{(1)}\,.$$

In (1) $w(x)$ è una funzione peso non negativa su (a, b), ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sono gli n nodi fissati, η_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ sono gli m nodi liberi, che scegliamo in modo che la (1) abbia grado polinomiale $d \geqslant n + 2m - 1$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del progetto di ricerca M.P.I. « Analisi numerica e Matematica computazionale ». — Ricevuto: 2-VII-1984.

(1) Anche se nella letteratura sono stati considerati casi in cui i nodi della (1) possono in parte coincidere, in questa nota consideriamo solo il caso in cui tali nodi esistono reali e distinti e possibilmente in (a, b).

Per questo come è noto (cfr. ad esempio [**5**]) si richiede che i nodi η_j siano zeri di polinomi $G_{n,m}(x, \boldsymbol{\xi}^{(n)})$ che verificano le seguenti relazioni

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
&G_{n,m}(\xi_i, \boldsymbol{\xi}^{(n)}) = 0 && i = 1, 2, \ldots, n\,, \\
&\int_a^b w(x)\, G_{n,m}(x, \boldsymbol{\xi}^{(n)})\, x^k \, \mathrm{d}x = 0 && k = 0, 1, \ldots, m-1\,,
\end{aligned}
$$

dove $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ è il vettore di componenti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Alla base della costruzione delle (1) è dunque lo studio dell'esistenza dei polinomi $G_{n,m}(x, \boldsymbol{\xi}^{(n)})$.

Tuttavia, poichè siamo interessati a polinomi con zeri tutti reali e distinti, è chiaro che se $G_{n,m}(x, \boldsymbol{\xi}^{(n)})$, pur esistendo, ha zeri complessi, può avere interesse l'analisi del comportamento di sequenze Γ_n di polinomi $G_{n,m+k}(x, \boldsymbol{\xi}^{(n)})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ soddisfacenti condizioni analoghe alle (2). Tali polinomi, infatti, possono a loro volta, con i loro zeri (quando reali e distinti), costituire un supporto per formule di quadratura del tipo

$$
(3) \qquad Q^k f = \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i) + \sum_{j=1}^{m+k} B_j f(\eta_j) \qquad \text{di ordine } d \geqslant n + 2(m+k) - 1\,.
$$

Lo studio delle sequenze Γ_n è utile anche nell'ambito dell'integrazione automatica ove si vogliono utilizzare formule di quadratura di tipo « common point ».

Monegato in [**5**] ha già esaminato l'esistenza delle sequenze Γ_n nel caso particolare in cui gli ξ_i coincidano con gli zeri del polinomio $\pi_n(x)$ di grado n appartenente alla base ortonormale su (a, b) rispetto alla funzione peso $w(x)$.

1 - Sulla classe Γ_n

Introduciamo le seguenti notazioni:

$\boldsymbol{\xi}^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ rappresenta un insieme di n ascisse distinte appartenenti all'intervallo (a, b).

$\pi_j(x)$ è il polinomio di grado j della base ortonormale su (a, b) rispetto alla funzione peso $w(x)$.

$$
(4) \qquad \bar{G}_{n,m+k}(x, \boldsymbol{\xi}^{(n)}) = \begin{vmatrix}
\pi_{m+k}(x) & \pi_{1+m+k}(x) & \ldots & \pi_{n+m+k}(x) \\
\pi_{m+k}(\xi_1) & \pi_{1+m+k}(\xi_1) & \ldots & \pi_{n+m+k}(\xi_1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\pi_{m+k}(\xi_n) & \pi_{1+m+k}(\xi_n) & \ldots & \pi_{n+m+k}(\xi_n)
\end{vmatrix}.
$$

Per ogni s, $1 \leqslant s \leqslant n$:

$$\overline{C}_s^{(k)}(\xi^{(n)}) = [\pi_{j-1+m+k}(\xi_i)]\,, \qquad \overline{D}_s^{(k)}(\xi^{(n)}) = [\pi_{n-j+1+m+k}(\xi_i)]$$

$$i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Per ogni r, $1 \leqslant r \leqslant n$: $\xi^{(r)} = (\xi_{h_1}, \xi_{h_2}, \ldots, \xi_{h_r})$ r-upla di elementi appartenenti a $\xi^{(n)}$, $C_r^{(k)}(\xi^{(r)})$, $D_r^{(k)}(\xi^{(r)})$ determinanti di matrici del tipo:

$$\overline{C}_r^{(k)}(\xi^{(r)}) = [\pi_{j-1+m+k}(\xi_{h_i})]\,, \qquad \overline{D}_r^{(k)}(\xi^{(r)}) = [\pi_{n-j+1+m+k}(\xi_{h_i})]$$

$$i = 1, 2, \ldots, r\,, \quad j = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Poniamo $G_{n,m+k}(x, \xi^{(n)}) = \det \overline{G}_{n,m+k}(x, \xi^{(n)})$.

Affrontiamo perciò lo studio della sequenza Γ_n analizzando le matrici di tipo (4) al variare di k. I risultati di questo studio sono contenuti nei teoremi 1, 2, 3 le cui dimostrazioni sono riportate in **2**.

Supponiamo che esista il polinomio $G_{n,m}(x, \xi^{(n)})$ di grado $n + m$ (grado pieno).

Teorema 1. *$D_n^{(0)}(\xi^{(n)}) \neq 0$ è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e unicità del polinomio $G_{n,m+1}(x, \xi^{(n)})$ di grado $n + m + 1$.*

Teorema 2. *Sia $D_n^{(0)}(\xi^{(n)}) = 0$ e $\xi^{(n)}$ non sia un sottoinsieme degli zeri di $\pi_{n+m}(x)$. Sia s $(0 < s < n)$ il massimo intero r per cui la caratteristica della matrice $\overline{D}_{n-r}^{(0)}(\xi^{(n)})$ è $n - r$. Allora:*

(t$_1$) *il polinomio $G_{n,m+k}(x, \xi^{(n)})$, se non è identicamente nullo, ha grado $n + m$ per $k = 1, 2, \ldots, s$ e risulta*

$$G_{n,m+k}(x, \xi^{(n)}) = \varrho_k G_{n-k,m+k}(x, \xi^{(n-k)}) = \sigma_k G_{n,m}(x, \xi^{(n)})\,; \tag{5}$$

nella (5) ϱ_k e σ_k sono costanti (²), *$\xi^{(n-k)}$ è un qualunque sottoinsieme di $n - k$ elementi di $\xi^{(n)}$, tale che* $\det[\pi_{j-1+m+k}(\xi_{h_i})]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k;\ j = 1, 2, \ldots, n-k)$ *sia diverso da zero;*

(t$_2$) *esiste unico il polinomio $G_{n,m+s+1}(x, \xi^{(n)})$ di grado $n + m + s + 1$;*

(t$_3$) *se $Q_k(x)$ è un qualsiasi polinomio di grado $k \leqslant m + s - 1$, le condizioni*

(²) Dipendenti da n, m, $\xi^{(n)}$.

di ortogonalità

$$\int_a^b w(x)Q_k(x)G_{n,m}(x,\, \xi^{(n)})x^j\,\mathrm{d}x = 0$$

sono soddisfatte per $j = 0, 1, \ldots, m + s - k - 1$.

Se $s > 1$ *e* $k \leqslant [s/2]$ *la* (t$_3$) *consente di determinare un'ampia classe di polinomi di grado* $n + m + k$ *soddisfacente le condizioni* (*analoghe alle* (2))

$$(2)' \qquad \begin{aligned} &P_{n+m+k}(\xi_i) = 0\,, && i = 1, 2, \ldots, n;\\ &\int_a^b w(x)P_{n+m+k}(x)x^j\,\mathrm{d}x = 0\,, && j = 0, 1, \ldots, m + k - 1\,. \end{aligned}$$

Teorema 3. *Se* $\xi^{(n)}$ *è un sottoinsieme degli zeri del polinomio* $\pi_{n+m}(x)$, *allora*

(t$_1$) *i polinomi* $G_{n,m+k}(x,\, \xi^{(n)})$ *per* $k = [n/2] + 1, \ldots, n$ *hanno grado* $n + m$ *e inoltre*

$$G_{n,m+k}(x,\, \xi^{(n)}) = \varrho_k \pi_{m+n}(x) = \sigma_k G_{n,m}(x,\, \xi^{(n)})$$

con ϱ_k *e* σ_k *costanti. Continuano a valere* (t$_2$) e (t$_3$) *per* $s = n$.

Conclusioni. I risultati ottenuti ci permettono di trarre alcune conclusioni sulle formule di quadratura del tipo (3) in cui $k = 0, 1, \ldots, [s/2]$. Infatti, sotto le ipotesi del Teorema 2, indicando con $\xi^{(n)} \cup \eta^{(m)}$ gli zeri del polinomio $G_{n,m}(x,\, \xi^{(n)})$, si fa vedere che si possono costruire sugli $n + m$ nodi $\xi^{(n)} \cup \eta^{(m)}$ (³) formule di quadratura del tipo (3) di ordine $d = n + 2(m + [s/2]) - 1 \geqslant n + 2(m + k) - 1$ per $k = 0, 1, \ldots, [s/2]$. (Tali formule sono, per questi valori di k, ottimali). Infatti, comunque si scelgano ulteriori k nodi su cui costituire la (3), per $k = 0, 1, \ldots, [s/2]$ i pesi B_j relativi sono nulli.

Possiamo inoltre osservare che per $k = [s/2] + 1, \ldots, s$ non esiste la formula di quadratura di tipo (3) associata al polinomio $G_{n,m+k}(x,\, \xi^{(n)})$.

Infine, sotto le ipotesi del Teorema 3, è evidente che le formule di quadratura del tipo (3) associate al polinomio $G_{n,m+k}(x, \xi^{(n)})$, $k = 0, 1, \ldots, n$, sono le formule di quadratura gaussiane di ordine $2(m + n) - 1$.

(³) Quando tali nodi sono reali e distinti.

Dimostrazione del Teorema 1. Basta osservare che

$$D_n^{(0)}(\xi^{(n)}) = C_n^{(1)}(\xi^{(n)}) . \tag{6}$$

Dimostrazione del Teorema 2. Osserviamo innanzitutto che i polinomi $G_{n,m+k}(x, \xi^{(n)})$ $(k = 1, 2, ..., s)$, se non sono identicamente nulli, non esistono di grado pieno in quanto $C_n^{(k)}(\xi^{(n)}) = 0$ per le ipotesi fatte.

D'altra parte, la condizione $C_n^{(0)}(\xi^{(n)}) \neq 0$ implica che almeno un minore di ordine $n - k$ di $\bar{C}_{n-k}^{(k)}(\xi^{(n)})$ sia diverso da zero. Pertanto dal teorema di [**1**] (punto (b)), se $G_{n,m+k}(x, \xi^{(n)})$ non è il polinomio identicamente nullo, segue che

$$G_{n,m+k}(x, \xi^{(n)}) = \varrho_k G_{n-k,m+k}(x, \xi^{(n-k)}) . \tag{7}$$

La prima parte della (5) è così dimostrata.

La seconda parte della (5) si ricava dal fatto che $G_{n-k,m+k}(x, \xi^{(n-k)})$ soddisfa le seguenti relazioni

$$G_{n-k,m+k}(\xi_i, \xi^{(n-k)}) = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n ,$$

$$\int_a^b w(x) G_{n-k,m+k}(x, \xi^{(n-k)}) x^j \, dx = 0 \qquad j = 0, 1, ..., m + k - 1 .$$

La (t_1) è così dimostrata.

Per dimostrare la (t_2) osserviamo che il minore di ordine $n - s$ della matrice $\bar{D}_{n-s}^{(0)}(\xi^{(n)})$, diverso da zero per ipotesi, è il complemento algebrico di $\pi_{m+s}(x)$ nella matrice $\bar{G}_{n-s,m+s}(x, \xi^{(n-s)})$. Quindi, tenendo conto della (7), segue che $D_n^{(s)}(\xi^{(n)}) \neq 0$. Poichè $D_n^{(s)}(\xi^{(n)}) = C_n^{(s+1)}(\xi^{(n)})$, la (t_2) è così dimostrata.

Dalla (5) segue che $G_{n,m}(x, \xi^{(n)})$ soddisfa le relazioni seguenti

$$\int_a^b w(x) G_{n,m}(x, \xi^{(n)}) x^j \, dx = 0 \qquad j = 0, 1, ..., m + s - 1 .$$

Quindi se $0 \leqslant k \leqslant m + s - 1$, qualunque sia il polinomio $Q_k(x)$

$$\int_a^b w(x) G_{n,m}(x, \xi^{(n)}) Q_k(x) x^j \, dx = 0 \qquad j = 0, 1, ..., m + s - k - 1 ,$$

la (t_3) è così dimostrata.

Dimostrazione del Teorema 3. La (t_1) segue dal Teorema di [1] (punto (a)).
Per provare la (t_2) osserviamo che il complemento algebrico di $\pi_{m+n+1}(x)$ nell'espressione (4) del polinomio $G_{n,m+n+1}(x, \xi^{(n)})$ è proporzionale a un determinante di Vandermonde. Essendo gli elementi di $\xi^{(n)}$ distinti segue la (t_2). La (t_3) si dimostra in modo analogo alla (t_3) del Teorema 2, con $s = n$.

Bibliografia

[1] F. CALIÒ, L. GOTUSSO e E. MARCHETTI, *Costruzione di particolari formule di quadratura a massimo ordine*, Rend. Mat. (in corso di stampa).

[2] A. DRAUX, *Polynomes orthogonaux formels - Applications*, Lectures notes in Mathematics, **974**, Springer-Verlag 1983.

[3] F. E. HOHN, *Elementary matrix algebra* (3th ed.), MacMillan, New York 1973.

[4] W. GAUTSCHI, *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, Birkhauser Verlag, Basel 1981.

[5] G. MONEGATO, *On polynomials orthogonal with respect to particular variable-signed weight functions*, ZAMP **31** (1980), 549-555.

[6] T. N. L. PATTERSON, *The optimum addition of points to quadrature formulae*, Math. Comp. **22** (1968), 847-856.

Summary

In this paper we study conditions of existence of elements belonging to sequences Γ_n formed by particular polynomials related to the theory of quadrature formulae.

* * *