Riv. Mat. Univ. Parma (4) 11 (1985), 463-473

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Su alcune generalizzazioni di casi di effetto Levi-Civita «negativo» in balistica terminale (**)

1 - Premessa

1.1 – È noto (¹) che l'effetto Levi-Civita della balistica terminale è costituito dalla «deformazione impulsiva» subita da un proiettile nell'impatto con un mezzo solido: la legge che dà la resistenza w del proiettile nel mezzo è, in tal caso, espressa dalla formula

$$w = S(c_0 + c_2 v^2)(1 + kv_0) \qquad \text{(Levi-Civita, 1906)}, \tag{1.1}$$

dove S è l'area della massima sezione trasversale (sezione maestra) del proiettile prima dell'urto, c_0, c_2, k sono costanti positive, v è la velocità (²) del proiettile nel mezzo e v_0 è la velocità di impatto. La (1.1) generalizzava le classiche formule

$$w = c_0 S \qquad \text{(Eulero, 1753)}, \tag{1.2}$$

$$w = S(c_0 + c_2 v^2) \qquad \text{(Poncelet, 1839)}. \tag{1.3}$$

L'aggiunta del fattore $1 + kv_0$ all'espressione (1.3) di Poncelet era stata originata, come il Levi-Civita dichiarava all'inizio della Nota $[7]_1$, allo scopo di dare spiegazione di un «apparente paradosso» che gli era stato segnalato, e che era stato rilevato da esperienze compiute verso la fine dell'Ottocento,

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Ricevuto: 21-II-1985.

(¹) Cfr. $[7]_{1,2}$; $[\mathbf{15}]_2$, pp. 459-462; $[\mathbf{15}]_6$, pp. 619-622.

(²) Diremo, qui e nel seguito, *velocità* anziché *modulo della velocità*.

quando (a seguito della sostituzione della « polvere nera » con la « polvere senza fumo ») le velocità iniziali (dei proiettili delle armi da fuoco) erano notevolmente aumentate (fino a raggiungere i 700-800 m/s): si era constatato che all'aumentare della velocità di impatto v_0 non sempre la *penetrazione totale* del proiettile aumentava, ma che, per certi proiettili e/o per certi mezzi, esisteva una *velocità critica di impatto* v_0^* alla quale corrispondeva la *massima penetrazione totale* e oltre la quale la penetrazione totale diminuiva.

Le leggi di Eulero e di Poncelet si riferivano all'ipotesi di proiettili *indeformabili*; il Levi-Civita, applicando la teoria matematica dell'Elasticità e considerando, entro certi limiti, il proiettile come un corpo elastico, era pervenuto alla legge (1.1), che teneva conto della « deformazione impulsiva » (messa in risalto dal coefficiente $k > 0$, dipendente dal sistema proiettile-mezzo, ma non da v_0) subita dal proiettile nell'urto contro il mezzo.

La formula per la penetrazione totale X di Poncelet ([3])

$$X = h \log(1 + \beta v_0^2) \qquad (h = 1/(2c_2 S),\ \beta = c_2/c_0) \tag{1.4}$$

(ottenuta risolvendo l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dv} = -\frac{v}{w}, \tag{1.5}$$

dove $x = x(v)$ è la *penetrazione*, con la condizione iniziale $x(0) = X$), nella quale X risulta crescente con v_0, veniva dal Levi-Civita generalizzata nella seguente

$$X_k = h\,\frac{\log(1 + \beta v_0^2)}{1 + k v_0}, \tag{1.6}$$

che, nel caso limite $k = 0$ (ossia per proiettili indeformabili) si riduceva alla (1.4). La presenza del divisore $1 + kv_0$ fa sí che il secondo membro di (1.6) non risulti più crescente con v_0, ma presenti, come è facile constatare, il suo valore massimo X^* (massima penetrazione totale) in corrispondenza ad un certo valore v_0^* (velocità critica di massima penetrazione totale). Veniva così data una razionale spiegazione dell'apparente paradosso al quale si è sopra accennato (« paradosso di Levi-Civita » della balistica terminale).

([3]) Non presenta interesse, ai fini di questo studio, la considerazione della formula per la penetrazione totale di Eulero, $X = av_0^2$ $(a = 1/(2c_0 S))$ (cfr. [**45**]$_6$, pp. 619-620), il cui « andamento parabolico » si adatta solo ad un ristretto intervallo di basse velocità di impatto.

1.2 – La (1.6) di Levi-Civita tiene conto della sola « deformazione impulsiva » (legata al *coefficiente di deformazione impulsiva* $k > 0$) subita dal proiettile nell'istante dell'impatto col mezzo, ma non della « *deformazione progressiva* » che subiscono certi moderni tipi di proiettili (in particolare, fra la vasta gamma di quelli *deformabili* od *espansivi*, quelli cosiddetti *ad espansione controllata* (4), progettati per mutare la sezione maestra non solo *nell'impatto*, ma anche *durante la penetrazione nel mezzo*, anche nel caso di mezzi piuttosto « debolmente resistenti », come avviene per certi mezzi solidi o per mezzi semifluidi o fluidi).

In alcuni recenti studi [**15**]$_{2,3,4,7}$, mi sono occupato di generalizzare la (1.1) di Poncelet–Levi-Civita al caso dei proiettili a deformazione oltre che impulsiva anche progressiva, con leggi del tipo

$$w = \alpha S(1 + kv_0)(1 + \beta v_0^2)\sigma(x, \lambda) \,, \tag{1.7}$$

dove la funzione $\sigma(x, \lambda)$ è stata chiamata *funzione di deformazione progressiva* (del proiettile nel mezzo), e il parametro λ *coefficiente di deformazione progressiva*. Tali studi, ed alcuni esempi ivi riportati, riguardavano le ipotesi che σ fosse una funzione continua e crescente della x, con $\sigma(x, \lambda) \geqq 1$, $\lambda > 0$ ($\sigma(x, 0) \equiv 1$), ossia erano relativi ad un aumento progressivo del calibro del proiettile durante la penetrazione nel mezzo. In particolare, in [**15**]$_2$, erano state considerate svariate forme per la funzione $\sigma(x, \lambda)$, fra le quali mi limito a riportare qui le seguenti, particolarmente semplici ed espressive,

$$\sigma_1(x, \lambda) = 1 + \lambda x \,, \qquad \sigma_2(x, \lambda) = \exp \lambda x \,, \tag{1.8}$$

$$\sigma_3(x, \lambda) = 1 + \lambda x^2 \,, \qquad \sigma_4(x, \lambda) = \cosh(\sqrt{2\lambda}\, x) \,, \tag{1.9}$$

e per esse erano state calcolate, dall'equazione differenziale (1.5), le corrispondenti formule per la penetrazione totale. In [**15**]$_3$ mi ero poi occupato delle formule dei *tempi di penetrazione* e avevo stabilito un teorema di confronto, nel caso della legge di resistenza (1.1) di Levi-Civita, fra la velocità $\bar{v}_0$ di massimo tempo di penetrazione totale e la velocità v_0^* di massima penetrazione totale (5); in [**15**]$_4$ proponevo alcune varianti e generalizzazioni di una formula di penetrazione totale di Resal (1895), atte ad evitare un certo « paradosso del tempo infinito » (da me segnalato in [**15**]$_4$), provocato dalla legge di

---

(4) Per una esauriente descrizione di tali proiettili si veda, ad esempio, la recente opera [**16**], pp. 190-230.

(5) Secondo tale teorema, sussiste la relazione $\bar{v}_0 < v_0^*$, potendo questi due valori essere anche molto diversi fra loro (come mostra un esempio, riportato in [**15**]$_3$, p. 859, che fornisce i valori $\bar{v}_0 = 301\ m/s$, $v_0^* = 760\ m/s$).

resistenza proposta da Resal (⁶) (applicando la quale si sarebbe trovato, per il tempo T di penetrazione totale, il paradossale risultato $T = +\infty$). Assai di recente, in [**15**]$_7$, mi sono invece occupato dell'influenza dell'effetto Levi-Civita (che chiameremo anche, brevemente, « effetto k ») sulle formule della *velocità residua*, ossia della velocità v del proiettile nel mezzo espressa sia in funzione della penetrazione x, sia in funzione del tempo di penetrazione t; ho poi esteso a tali formule le generalizzazioni ottenute per « effetto impulsivo-progressivo » (che chiameremo, brevemente, « effetto (k, λ) »), dalla legge di resistenza (1.7), o da una legge analoga nella quale la funzione $\sigma(x, \lambda)$ venga sostituita da una corrispondente funzione $\omega(t, \mu)$, dove μ è il *coefficiente di deformazione progressiva al variare del tempo di penetrazione* t, anziché, come era per λ, al variare della penetrazione x (parleremo, in questo caso, di « effetto (k, μ) »).

1.3 – In quanto precede si era sempre rimasti nell'ipotesi $k > 0$ (ipotesi originaria del Levi-Civita e aderente al problema che gli era stato allora posto (⁷)) e, conseguentemente, nelle generalizzazioni trattate, nell'ipotesi $\lambda > 0$ (oppure $\mu > 0$).

Scopo del presente studio è, invece, quello di prendere in considerazione, e ciò corrisponde (per certi tipi di moderni proiettili e per certi tipi di mezzi) a circostanze di fatto reali, il caso di effetto Levi-Civita « negativo », ossia *relativo ad una deformazione impulsiva*, all'atto dell'impatto proiettile-mezzo, *che procuri una diminuzione del calibro* del proiettile (ossia della sezione maestra S), ciò che corrisponde ad *un valore negativo del coefficiente* k.

Come vedremo, ciò porta ad alcuni cambiamenti qualitativi nel comportamento delle leggi di penetrazione totale e di quelle dei tempi di penetrazione totale, pur restando esse, formalmente, le stesse: ad esempio, con $k < 0$ viene a mancare la velocità critica di massima penetrazione totale (e così pure la velocità di massimo tempo di penetrazione totale) poiché in tale caso, ovviamente, la funzione a secondo membro della (1.6) risulta *crescente* con v_0 (anziché presentare un massimo in corrispondenza ad un certo valore v_0^* come si aveva per $k > 0$), così come *crescente* è la X (1.4) di Poncelet; analogamente accade per gli « effetti (k, λ)-negativi » e per gli « effetti (k, μ)-negativi ».

Un interessante esempio, relativo ad un caso sperimentato, fra svariati altri, dall'autore, conclude questo studio, fornendo anche i risultati numerici relativi all'« effetto (k, λ)-negativo » (e all'« effetto (k, μ)-negativo »), messi a confronto sia col solo « effetto k » di Levi-Civita, sia col caso classico di Poncelet. I risultati riguardano: le penetrazioni totali X (Poncelet), X_k (Levi-

(⁶) Cfr. [**11**], p. 397; [**3**]$_2$, p. 457; [**12**], p. 49; [**15**]$_4$, p. 469.

(⁷) Cfr. [**7**]$_1$, pp. 1149-1150, oppure [**7**]$_2$, pp. 505-506.

Civita, $k < 0$), $X_{k,\lambda}$ ($k < 0$, $\lambda < 0$), i corrispondenti tempi di penetrazione totale T, T_k, $T_{k,\mu}$ ($k < 0$, $\mu < 0$, dove il valore di μ *corrisponde*, nel senso che sarà precisato, al precedente valore di λ), ed infine l'accenno al calcolo delle tre velocità residue v, v_k, $v_{k,\lambda}$ (o $v_{k,\mu}$) in funzione della penetrazione x o del tempo di penetrazione t.

2 - Le formule di penetrazione totale, dei tempi di penetrazione totale, delle velocità residue. Osservazioni. Confronti

2.1 – Oltre alle già ricordate formule per la penetrazione totale X di Poncelet, (1.4), e X_k di Levi-Civita, (1.6), ci limiteremo a ricordare qui la seguente formula

$$X_{k,\lambda} + \frac{\lambda}{2} X_{k,\lambda}^2 = X_k \,, \tag{2.1}$$

che proviene ([8]) dalla legge di resistenza (1.7) quando si consideri per la funzione di deformazione progressiva $\sigma(x, \lambda)$ il « caso lineare »

$$\sigma(x, \lambda) = 1 + \lambda x ; \tag{2.2}$$

indicando ancora con $X_{k,\lambda}$ l'unica radice positiva dell'equazione di secondo grado (2.1), si ha poi la formula

$$X_{k,\lambda} = \frac{1}{\lambda} \{\sqrt{1 + 2\lambda X_k} - 1\} \,, \tag{2.3}$$

che dà $X_{k,\lambda}$ in funzione di X_k (o, volendo, di X). Nella (2.3) per $\lambda \to 0$ il secondo membro si riduce alla X_k di Levi-Civita, come è facile constatare (scriveremo $X_{k,0} = X_k$; analogamente scriveremo $X_0 = X$, e anche $X_{0,0} = X$).

Abbiamo già osservato che per $k < 0$ (nell'ipotesi, aderente a circostanze di fatto reali, che resti anche $1 + kv_0 > 0$) la funzione X_k risulta crescente con v_0 (infatti, al crescere di v_0, il numeratore $\log(1 + \beta v_0^2)$ è crescente, mentre il denominatore $1 + kv_0$ è decrescente ([9])), quindi *l'effetto Levi-Civita « negativo »*

([8]) Cfr. [**15**]$_2$, pp. 466-467.

([9]) Indipendentemente da queste considerazioni elementari, ciò è in accordo col fatto che la velocità critica v_0^* (che si aveva per $k>0$) era l'unica radice (reale positiva) dell'equazione (cfr. [**7**]$_{1,2}$; [**8**], p. 56; [**15**]$_2$, p. 469)

$$2\beta v_0(1 + kv_0) - k(1 + \beta v_0^2) \log(1 + \beta v_0^2) = 0 \,, \tag{1}$$

la quale, per $k < 0$ non ha soluzioni (reali), poiché il primo membro risulta essere positivo (nell'ipotesi $1 + kv_0 > 0$).

fa sí che non si abbia una « velocità critica di massima penetrazione totale », come accadeva invece nell'ipotesi $k > 0$.

Dal confronto (1.6)-(1.4) risulta poi, evidentemente, $X_k > X$ (mentre risulterebbe $X_k < X$ per $k > 0$). Un facile confronto fra $X_{k,\lambda}$ $(\lambda < 0)$ e X_k conduce poi al risultato $X_{k,\lambda} > X_k$. Si conclude quindi che per $k < 0$, $\lambda < 0$ risulta $X_{k,\lambda} > X_k > X$.

2.2 – Per quanto riguarda le formule dei tempi di penetrazione totale, indicati con T e con T_k rispettivamente i tempi di penetrazione totale di Poncelet e di Levi-Civita, si ha [10]

$$T = 2h\sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}v_0)\,, \tag{2.4}$$

$$T_k = 2h\sqrt{\beta}\,\frac{\mathrm{arctg}\,(\sqrt{\beta}v_0)}{1+kv_0}\,. \tag{2.5}$$

Anche qui per $k < 0$, contrariamente a quanto avveniva per $k > 0$ (caso in cui T_k presentava un massimo $\overline{T}_k$ in corrispondenza ad un certo valore $\overline{v}_0$, velocità critica di massimo tempo di penetrazione totale [11]), la funzione T_k risulta crescente con v_0 e si ha inoltre $T_k > T$ (mentre risulterebbe $T_k < T$ per $k > 0$).

Qualora poi si consideri per la funzione $\omega(t, \mu)$ (alla quale si è fatto cenno in **1.2**) il « caso lineare »

$$\omega(t, \mu) = 1 + \mu t\,, \tag{2.6}$$

si otterrebbe dall'equazione differenziale [12]

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\,w \tag{2.7}$$

(analogamente a quanto è stato fatto per ottenere $X_{k,\lambda}$ dall'equazione differenziale (1.5)),

$$T_{k,\mu} + \frac{\mu}{2}\,T^2_{k,\mu} = T_k\,, \tag{2.8}$$

---

(10) Cfr. [**15**]$_3$, pp. 857-858. La (2.4) è anche riportata in quasi tutti i trattati e le monografie di Balistica esterna elencati nella bibliografia.

(11) Cfr. loc. cit. in (10), p. 858, dove l'equazione (3.6) che dava, per $k > 0$, la velocità critica $\overline{v}_0$, è invece per $k < 0$ priva di radici (reali) per essere il suo primo membro positivo (in analogia a quanto si è già detto in (9) per l'equazione (1)).

(12) Cfr. loc. cit. in (10) (v. p. 857).

formula del tutto analoga alla (2.1); anche qui, indicando ancora con $T_{k,\mu}$ l'unica radice positiva della (2.8), si ha

$$T_{k,\mu} = \frac{1}{\mu}\{\sqrt{1+2\mu T_k} - 1\} . \tag{2.9}$$

Volendo poi che alla penetrazione totale $X_{k,\lambda}$ *corrisponda* il tempo di penetrazione totale $T_{k,\mu}$, i due coefficienti λ, μ (di deformazione progressiva al variare, rispettivamente, della penetrazione x e del tempo di penetrazione t) sono legati fra loro attraverso la relazione di eguaglianza delle relative sezioni maestre «finali» (cioè per $x = X_{k,\lambda}$, $t = T_{k,\mu}$, e che, con ovvio significato dei simboli, indicheremo con $S_{k,\lambda}$ e con $S_{k,\mu}$)

$$S_{k,\lambda} = S_k(1+\lambda X_{k,\lambda}) , \qquad S_{k,\mu} = S_k(1+\mu T_{k,\mu}) , \tag{2.10}$$

dove $S_k = S(1+kv_0)$ è la sezione maestra ottenuta da S per effetto Levi-Civita di deformazione impulsiva. Nei casi qui considerati ($k<0$, $\lambda<0$, $\mu<0$) risulta

$$S_{k,\lambda} = S_{k,\mu} < S_k < S; \tag{2.11}$$

risulta inoltre, in analogia con le rispettive penetrazioni totali, $T_{k,\mu} < T_k < T$. Osserviamo che μ e $T_{k,\mu}$ sono fra loro legati dall'essere soluzione del sistema costituito dalla seconda delle (2.10) (quando i valori di S_k e di $S_{k,\mu}$ si suppongano noti) e dall'equazione (2.8) (quando si supponga noto T_k). Osserviamo, infine, che risulta (come si era già mostrato in [**15**]$_7$, n. **6**, quando si era nelle ipotesi $k>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$)

$$X:T = X_k:T_k = X_{k,\lambda}:T_{k,\mu} , \tag{2.12}$$

in cui l'uguaglianza a sinistra è ovvia e quella a destra si prova tenendo conto che $S_{k,\lambda} = S_{k,\mu}$ (da cui si ha $\mu:\lambda = X_{k,\lambda}: T_{k,\mu}$) e dividendo membro a membro (2.3) e (2.9).

2.3 – Per quanto riguarda, infine, le formule che danno le tre espressioni v, v_k, $v_{k,\lambda}$ della velocità residua (del proiettile nel mezzo) espressa in funzione della penetrazione x, si ha

$$v = [(\frac{1}{\beta} + v_0^2)\exp(-\frac{x}{h}) - \frac{1}{\beta}]^{\frac{1}{2}} , \tag{2.13}$$

$$v_k = [(\frac{1}{\beta} + v_0^2)\exp(-\frac{(1+kv_0)x}{h}) - \frac{1}{\beta}]^{\frac{1}{2}} , \tag{2.14}$$

$$v_{k,\lambda} = [(\frac{1}{\beta} + v_0^2)\exp(-\frac{(1+kv_0)(x+\lambda x^2/2)}{h}) - \frac{1}{\beta}]^{\frac{1}{2}} , \tag{2.15}$$

l'ultima delle quali proviene dal « caso lineare » (2.2) per la funzione $\sigma(x, \lambda)$ ([13]). Qui l'ipotesi $k < 0$ e $\lambda < 0$ porta (per $x > 0$ e a parità dei valori di β, h, k, v_0) al risultato, evidente dal confronto delle ultime tre formule,

$$v_{k,\lambda} > v_k > v \, .$$

Per le formule che danno, invece, le velocità residue $v, v_k, v_{k,\mu}$, espresse in funzione del tempo di penetrazione t, si ha

$$v = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{\beta}\, v_0) - \frac{t}{2h\sqrt{\beta}}\right), \tag{2.16}$$

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{\beta}\, v_0) - \frac{(1 + kv_0)t}{2h\sqrt{\beta}}\right), \tag{2.17}$$

$$v_{k,\mu} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{\beta}\, v_0) - \frac{(1 + kv_0)(t + \mu t^2/2)}{2h\sqrt{\beta}}\right), \tag{2.18}$$

l'ultima delle quali proviene dal « caso lineare »

$$\omega(t, \mu) = 1 + \mu t \tag{2.19}$$

della funzione di deformazione progressiva espressa in funzione del tempo di penetrazione t (anziché, come nella (2.15), in funzione della penetrazione x) ([14]). Anche qui il confronto fra le ultime tre formule, nell'ipotesi $k < 0$ e $\mu < 0$, conduce, per $t > 0$, al risultato $v_{k,\mu} > v_k > v$.

3 - Un esempio

L'esempio, al quale abbiamo accennato alla fine di 1.3, si riferisce alla penetrazione, in un blocco di legno di quercia, a venatura assai « regolare » e pressoché rettilinea, *con direzione della penetrazione parallela alla venatura del legno* (e non ad essa ortogonale, come accade in molte esperienze « tabulate » ([15])), di un proiettile cal. 357 Magnum,

---

([13]) Cfr. [**15**]$_7$, nn. **2, 3, 4**. Per quanto riguarda il valore $c = 1$ (qui assunto per il « coefficiente di restituzione » c, talvolta usato dal Levi-Civita e che figurava in varie formule riportate in [**15**]$_7$, si veda quanto è stato precisato in [**15**]$_4$, p. 484, oppure in [**15**]$_7$, annotazione ([18]).

([14]) Cfr. [**15**]$_7$, n. **6**.

([15]) Cfr., ad es., la tabella riportata in [**3**]$_1$ (v. p. 238), che era stata definita una « istruttiva tabella » dal Levi-Civita, ai fini del suo studio [**7**]$_1$; la stessa tabella è riportata in [**3**]$_2$ (v. p. 461).

del peso di 10,2 grammi, del tipo MP (Metal Piercing), a punta tronco-conica blindata, con base superiore del tronco di cono del diametro di 2 *mm*, base inferiore del diametro di 9 *mm* (eguale al calibro del proiettile) e con parte cilindrica in piombo nudo, pure del calibro di 9 *mm*; la parte blindata sporgente dal bossolo ha calibro di 8,6 *mm*, mentre la breve parte blindata entro il bossolo ha calibro di 9 *mm*. Velocità di impatto v_0 di 400 *m/s*; tramite del proiettile pressoché rettilineo e della lunghezza (fino alla parte anteriore del proiettile) di 164 *mm*; calibro del proiettile recuperato (leggermente allungato rispetto alla lunghezza originaria di 20 *mm*, e con perdita di peso trascurabile) di 8,2 *mm*, ossia con *una diminuzione di calibro* dell'8,9%.

Il particolare sistema proiettile-mezzo aveva favorito un effetto Levi-Civita «negativo» (effetto che sarebbe stato «positivo», pur con lo stesso proiettile e con lo stesso mezzo, nel caso in cui l'impatto fosse avvenuto *normalmente*, anziché *parallelamente* alla venatura del legno) ed inoltre un successivo effetto, pure «negativo», di deformazione progressiva; questo secondo effetto risultava anche evidente da un esame del tramite (a blocco di legno spezzato), che presentava una leggera ma graduale diminuzione del diametro.

Il caso in esame fornisce, come elementi di partenza: $X_{k,\lambda} = 0{,}164\,m$, $S_{k,\lambda} = \pi \cdot 4{,}1^2\,mm^2 = 52{,}81\,mm^2$ (mentre risultava, prima dell'impatto $S = \pi \cdot 4{,}5^2\,mm^2 = 63{,}62\,mm^2$). Qualora si ipotizzi, per il solo effetto Levi-Civita «negativo», una diminuzione del calibro da 9 a 8,6 *mm* (tenuto conto che 8.6 *mm* corrisponde al calibro della parte blindata sporgente dal bossolo e che la penetrazione avviene in un mezzo che offre una notevole resistenza «trasversale», anche rispetto ad altre varietà di legno, quali, ad esempio, l'abete o il pioppo), si avrebbe per la corrispondente sezione maestra $S_k = S(1 + kv_0) = \pi \cdot 4{,}3^2\,mm^2 = 58{,}09\,mm^2$, da cui si deduce $k = -2 \cdot 10^{-4}$. Dall'espressione di $S_{k,\lambda}$, nel «caso lineare» trattato per $\sigma(x, \lambda)$, ossia dalla prima delle (2.10), si ha $\lambda = -0{,}554$. Con questo valore di λ, dalla formula (2.1) si ottiene $X_k = 0{,}157\,m$ (questa risulterebbe essere la penetrazione totale di un proiettile delle stesse caratteristiche qualora si tenesse conto del solo effetto Levi-Civita «negativo»). Dal legame fra X_k e X si otterrebbe poi $X = 0{,}144\,m$.

Avendosi $X_{k,\lambda} - X = 0{,}02\,m$, nel caso sperimentato di «effetto (k, λ)-negativo» (con $k = -2 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = -0{,}554$), si è quindi avuto, rispetto al caso di un proiettile delle stesse dimensioni e peso ma supposto *indeformabile* (caso Poncelet, o di «effetto (0, 0)»), un aumento di penetrazione del 14%.

Il valore $X = 0{,}144\,m$, tenuto conto della (1.4), nella quale è da assumere il valore $\beta = 2 \cdot 10^{-5}$ (16), permette di dedurre $h = 0{,}100345$, valore che approssimeremo in $h = 0{,}1$ (17).

Con questi valori di h, β, k, λ, tenuto conto delle formule (2.13), (2.14), (2.15), risulterebbe facile costruire i tre diagrammi delle velocità residue v, v_k, $v_{k,\lambda}$ in funzione della penetrazione x (diagrammi che qui, per brevità, ci asteniamo dal riportare, ma che risultano assai espressivi).

Per quanto riguarda i tempi di penetrazione totale T, T_k, $T_{k,\mu}$ corrispondenti a X, X_k, $X_{k,\mu}$, si ottengono dalle (2.4), (2.5) i valori $T = 95 \cdot 10^{-5}\,s$, $T_k = 103 \cdot 10^{-5}\,s$. Il calcolo di μ e di $T_{k,\mu}$, che si ottiene risolvendo il sistema costituito dalla (2.8) e dalla

(16) I valori di β, ottenuti sperimentalmente per vari mezzi, si trovano tabulati in molti dei trattati di Balistica riportati nella bibliografia: si veda, ad esempio [**3**]$_2$, p. 459, oppure [**6**], vol. I, p. 354.

(17) Sul significato di h si veda, ad esempio, loc. cit. in (16), rispettivamente p. 458 e p. 353.

seconda delle (2.10), in cui T_k, S_k, $S_{k,\mu} = S_{k,\lambda}$ sono noti, fornisce i valori $\mu = -84{,}16$, $T_{k,\mu} = 108 \cdot 10^{-5}\, s$.

Osserviamo che alla maggiore penetrazione totale di $2\, cm$, ottenuta per « effetto (k, λ)-negativo » (rispetto all'ipotesi di « effetto $(0, 0)$ » di Poncelet), corrisponde un maggiore tempo di penetrazione totale $T_{k,\mu} - T = 13 \cdot 10^{-5}\, s$, ottenuto per « effetto (k, μ)-negativo » (ossia, in percentuale, un aumento del 14%, pari, in base alla (2.12), a quello dell'aumento della penetrazione totale).

Coi valori, sopra indicati, di h, β, k, μ risulterebbe pure facile costruire, tenuto conto delle formule (2.16), (2.17), (2.18), i tre diagrammi delle velocità residue v, v_k, $v_{k,\mu}$ in funzione del tempo di penetrazione t.

Bibliografia

[1] G. Boffa, *Balistica esterna razionale*, S.M.E., Roma 1967.

[2] G. Bruno, *Balistica esterna*, vol. I (*Balistica razionale*), Roggero e Tortia, Torino 1934.

[3] C. Cranz: [•]$_1$ *Ballistik*, Enc. der Math. Wiss., Bd. IV, **3**, Heft 2 (1903), 185-279; [•]$_2$ *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. I, Julius Springer, Berlin 1925.

[4] E. Della Valle, *Balistica esterna* (*sperimentale ed applicata*), Castello, Torino 1955.

[5] J. Didion, *Traité de Balistique*, 2^{me} édit., Dumaine et Mallet-Bachelier, Paris 1860.

[6] G. Galanzino, *Balistica esterna*, vol. I, II, III, Libr. Stato, Roma 1943-1956.

[7] T. Levi-Civita: [•]$_1$ *Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi*, Ist. Veneto Sci. Lett. Arti Cl. Sci. Mat. Natur. **65**, parte II (1906), 1149-1158; (lo stesso lavoro si trova in: [•]$_2$ *Opere matematiche*, vol. II (1901-1907), Zanichelli, Bologna 1956; pp. 505-513).

[8] T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Nozioni di Balistica esterna*, Zanichelli, Bologna 1935.

[9] H. Molitz und R. Strobel, *Äussere Ballistik*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[10] J. V. Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle*, Bruxelles 1839.

[11] H. Resal, *Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides*, C.R. Acad. Sci. Paris **120** (1895), 397-401.

[12] K. Sellier, *Schusswaffen un Schusswirkungen*, Bd. I, 2. Aufl. (1982), Bd. II (1977), Schmidt- Römild, Lübeck.

[13] F. Siacci, *Balistica*, 2^a ediz., Casanova, Torino 1888.

[14] R. Sutterlin, *Les projectiles*, Mémor. Artill. Franç. **41**, 1er fasc. (1967), 13-76.

[15] L. Tanzi Cattabianchi: [•]$_1$ *I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 357-389; [•]$_2$ *Su alcune generalizzazioni di una formula di Levi-Civita per deformazioni impulsive*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 459-474; [•]$_3$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulle formule dei tempi*: *un teorema di confronto*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 855-860; [•]$_4$ *Su alcune varianti e generalizzazioni di una formula di balistica terminale di Resal*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6**

(1980), 468-484; [•]$_5$ *I contributi di Guido Fubini e di Francesco Severi ad alcuni problemi di balistica esterna*, Supplem. vol. **145** Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (1981), 217-233; [•]$_6$ *Generalizzazioni di una formula di Levi-Civita sulla penetrazione dei proiettili deformabili*, Atti Conv. Balistica Forense, Montagnoli Edit., Roma 1982; pp. 619-625; [•]$_7$ *Influenza dell'effetto Levi-Civita sulla velocità residua: generalizzazioni e confronti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **40** (1984), 359-372.

[16] A. UGOLINI, *L'esperto balistico*, vol. I, 2ª ediz., Editoriale Olimpia, Firenze 1984.

Summary

We are presenting cases of a «negative» Levi-Civita effect of impulsive deformation, in terminal ballistics, and its generalizations, when, under various laws, a «negative» effect of progressive deformation is also taken into consideration. That leads to some qualitative changes as regard the corresponding «positive» effect considered by Levi-Civita, and, in recent generalizations, dealt with by the Author.

* * *

Finito di stampare il 15 Luglio 1986 Tipografia Compositori Bologna