Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 41-51

GAETANO QUATTROCCHI (*)

Sul massimo numero di *DMB PTS* aventi 12 blocchi e immergibili in un *STS* (**)

1 – Siano P un n-insieme e $\mathscr{P}$ una famiglia di 3-sottoinsiemi di P detti *blocchi*. La coppia $(P, \mathscr{P})$ dicesi *sistema parziale di terne di Steiner di ordine* n $(PTS(n))$ se ogni 2-sottoinsieme di P è contenuto in al più in un blocco di $\mathscr{P}$.

Un elemento $x \in P$ ha *grado* $d(x) = h$ se x appartiene ad esattamente h blocchi di $\mathscr{P}$. Si ha $\sum_{x \in P} d(x) = 3|\mathscr{P}|$.

Dicesi *insieme dei gradi* (DS) di un PTS $(P, \mathscr{P})$ la n-pla $DS = [d(x), d(y), \ldots]$, dove $x, y, \ldots$ sono elementi di P. Se esistono r_i elementi di P aventi grado h_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, scriviamo $DS = [(h_1)_{r_1}, (h_2)_{r_2}, \ldots, (h_s)_{r_s}]$, dove $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = |P|$.

Un PTS $(P', \mathscr{P}')$ si dice *immergibile* in un PTS $(P, \mathscr{P})$, e si scrive $(P', \mathscr{P}') \subseteq (P, \mathscr{P})$, se è $P' \subseteq P$ e $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$.

Due PTS $(P', \mathscr{P}_1)$ e $(P', \mathscr{P}_2)$ si dicono *disgiunti e mutuamente bilanciati* (DMB) se $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \frown$ e se un 2-sottoinsieme di P è contenuto in un blocco di $\mathscr{P}_1$ se
e solo se è contenuto in un blocco di $\mathscr{P}_2$.

Indichiamo con $(P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_s)$ un insieme di s PTS $(P, \mathscr{P}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ a due a due DMB.

In un $(P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_s)$ si chiamano *elementi* gli elementi di P e *blocchi* gli elementi di $\bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{P}_i$.

Ogni elemento x di un $(P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_s)$ ha lo stesso grado $d(x)$ relativamente ad ogni $(P, \mathscr{P}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Quindi ad ogni $(P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_s)$ è possibile associare un unico DS.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Viale A. Doria 6, 95125 Catania, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) e con contributo finanziario M.P.I. (1983). — Ricevuto: 3-IX-1984.

Poniamo

$$M_r = \{x \in P\colon d(x) = r\} \qquad \{A(u) = x \in P\colon x \neq u \text{ ed esiste } b \in \bigcup_{i=1}^{s} P_i \text{ con } x \in b\}$$

$$A(u, \{u, v, w\}) = A(u) - \{v, w\} \qquad \text{con} \qquad \{u, v, w\} \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{P}_i\,.$$

Se ε è un numero reale, indichiamo con $[\varepsilon]$ il più grande intero minore o uguale ad ε.

In ogni $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s)$ si ha ($[3]_1$, proprietà 1, 5 e 6)

$$(1.1) \qquad |\mathcal{P}_1| = |\mathcal{P}_2| = \dots = |\mathcal{P}_s| \geqslant 4 \qquad |P| \geqslant 6\,,$$

poniamo quindi $m = |\mathcal{P}_i|$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ e $n = |P|$;

$$(1.2) \qquad m \geqslant 2h \qquad n \geqslant 2h + 1 \qquad \text{dove } h = \max\{d(x)\colon x \in P\}\,;$$

$$(1.3) \qquad d(x) \geqslant 2 \qquad \mu = \min\{d(x)\colon x \in P\} \geqslant \left[\frac{3m}{n}\right] \qquad s \leqslant 2\mu - 1\,;$$

$$(1.4) \qquad s \leqslant 2d(u) - \eta - 1 \qquad \text{dove } \eta = |A(u, \{u, v, w\}) - A(v, \{u, v, w\})|\,;$$

$$(1.5) \qquad s \leqslant 2r - 2 \quad (r = 2, 3) \quad \text{se esiste un blocco } b \text{ tale che } |b \cap M_r| \geqslant 2\,.$$

Un *sistema di terne di Steiner di ordine v* (*STS* (v)) è un *PTS* $(S, \mathcal{B})$ con $|S| = v$ e tale che ogni 2-sottoinsieme di S è contenuto in esattamente un blocco di $\mathcal{B}$. È noto che un $STS(v)$ esiste se e solo se $v \equiv 1$ o $3 \pmod 6$; tali v si dicono *ammissibili*. Si ha $|\mathcal{B}| = t_v = \dfrac{v(v-1)}{6}$.

Un $(P'; \mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_s)$ dicesi *immergibile* in un $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s)$ (e si scrive $(P'; \mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_s) \subseteq (P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s)$) se $(P'; \mathcal{P}'_i) \subseteq (P, \mathcal{P}_i)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, s$.

Si osservi che, dato un $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s)$, se esiste $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ tale che $(P, \mathcal{P}_j)$ è immergibile in un *STS* $(S, \mathcal{B}_j)$, allora per ogni $i = 1, 2, \dots, s$ le coppie $(S, \mathcal{B}_i)$, $\mathcal{B}_i = \mathcal{P}_i \cup (\mathcal{B}_j - \mathcal{P}_j)$, sono *STS* e si ha $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s) \subseteq (S; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_s)$.

Indichiamo con $D(v, k)$, $0 \leqslant k \leqslant t_v$, il massimo numero di $STS(v)$ che possono costruirsi sullo stesso v-insieme in modo tale che ogni due di essi hanno esattamente gli stessi k blocchi in comune. In [1] è stato posto da J. Doyen il problema di determinare $D(v, k)$ per ogni k e per ogni ammissibile v. Per $k = 0$ sono conosciuti molti risultati [4]. Per $k \neq 0$ in $[3]_{1,2}$ sono stati determinati alcuni valori di $D(v, k)$. In particolare è stato provato $[3]_1$ che, per ogni ammissibile v e w, $D(w, 0) = w - 2$ implica $D(v, t_v - t_w) = w - 2$ per ogni $v \geqslant 2w + 1$. Da cui, per $w = 9$, si ha $D(v, t_v - 12) = 7$ per ogni $v \geqslant 19$.

In questo lavoro si dimostra in 2 che $D(15, t_{15} - 12) = 3$. Inoltre in 3 e 4 si prova che, se esiste un sistema $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ con $n = 12, 13$ e $m = 12$, allora $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ non è immergibile in un $STS(13)$.

2 – Proviamo in questo paragrafo che $D(15, t_{15} - 12) = 3$.

Lemma 2.1. *Sia* $(P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3)$ *un sistema di* 3 *DMB PTS tale che* $P = M_3$. *Se esiste un blocco* $\{1,2,3\}$ *tale che* $|A(1, \{1,2,3\}) \cap A(1+i, \{1,2,3\})| = 3$, $i = 1, 2$, *allora* $A(2, \{1,2,3\}) - A(1, \{1,2,3\}) = A(3, \{1,2,3\}) - A(1, \{1,2,3\})$ *ed esiste un* $(P'; \mathscr{P}'_1, \mathscr{P}'_2, \mathscr{P}'_3)$, *con* $|\mathscr{P}'_1| = 8$, *immergibile in* $(P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3)$.

Dim. Poniamo $\{u_i\} = A(1+i, \{1,2,3\}) - A(1, \{1,2,3\})$ $(i = 1, 2)$ e $\mathscr{P}_1 = 3\{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2, u_1, 4\}, \{2,5,6\}\}$.

Se $u_1 \neq u_2$ si ha, poiché $|\{5,6\} \cap A(3)| \geq 1$, $u_1 \notin A(5) \cap A(6)$. D'altronde da $u_1 \notin A(1) \cup A(3)$ segue $\{2, u_1, 5\} \in \mathscr{P}_2$ e $\{2, u_1, 6\} \in \mathscr{P}_3$. Quindi $u_1 = u_2$.

Sia, per il momento, $4 \notin A(3)$. Allora $\{3, u_1, 6\}, \{3,5,7\} \in \mathscr{P}_1$; considerando che $u_1 \notin A(5)$ si ha $\mathscr{P}_2 = \{\{2,1,4\}, \{2,3,5\}, \{3,6,1\}, \{3, u_1, 7\}, \{6,5,x\}, \{5,4,y\}\}$ con $\{x, y\} = \{1, 7\}$ il che è assurdo.

Sia ora $4 \in A(3)$; è $\{3, u_1, x\} \in \mathscr{P}_1$ con $x \in \{5,6,7\}$. Se $x = 5$, si ha $\{3,4,y\} \in \mathscr{P}_1$ con $y = \{6, 7\}$.

$y = 6$ implica $A(7) \cap \{1,2,3,4,5,6\} = \{1,6\}$, $\{7,1,w\} \in \mathscr{P}_2$ con $w \neq 2,3,4,5,6$ e quindi $|A(1)| \geq 7$.

$y = 7$ implica o $\{6,2,u_1\} \in \mathscr{P}_2 \cup \mathscr{P}_3$ (e quindi $\{u_1, 6, 8\} \in \mathscr{P}_1$, $\{6,8,\alpha\} \in \mathscr{P}_2$, $\{6,8,\beta\} \in \mathscr{P}_3$ con $\alpha, \beta \in \{1,2,5,7\}$, $\alpha \neq \beta$, il che è assurdo), oppure $\{6,2,u_1\} \notin \mathscr{P}_2 \cup \mathscr{P}_3$, cioè, per esempio, $\{2, u_1, 3\} \in \mathscr{P}_2$ e $\{2, u_1, 5\} \in \mathscr{P}_3$ (quindi, essendo $6 \notin A(4)$, $\{2,5,4\}, \{2,6,1\} \in \mathscr{P}_2$, $\{2,1,\alpha\}, \{2,3,\beta\} \in \mathscr{P}_3$ con $\{\alpha, \beta\} = \{4, 6\}$ e ciò è impossibile).

Se $x = 7$ si ha $\{3,4,6\} \in \mathscr{P}_1$ con $u_1 \notin A(6)$, da cui $\{2, u_1, 6\} \notin \mathscr{P}_2 \cup \mathscr{P}_3$.

Segue $\mathscr{P}_2 = \{\{2,u_1,5\}, \{u_1,4,3\}, \{2,1,4\}, \{2,3,6\}, \{3,1,7\}, \{4,5,6\}, \{1,5,6\}\}$, contrariamente alla definizione di *PTS*.

Se $x = 6$ si verifica facilmente (1) che esiste $(P'; \mathscr{P}'_1, \mathscr{P}'_2, \mathscr{P}'_3)$ immergibile in $(P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3)$ e tale che $|\mathscr{P}'_1| = 8$.

---

(1) Posto

$\mathcal{A}_1$			$\mathcal{A}_2$			$\mathcal{A}_3$			$\mathcal{A}_4$		
1	2	3	2	1	6	2	1	5	2	1	4
1	4	5	2	u_1	3	2	u_1	6	2	u_1	5
1	6	7	2	4	5	2	3	4	2	3	6
2	u_1	4	3	1	4	3	u_1	7	3	4	u_1
2	5	6	3	6	7	3	6	1	3	7	1
3	u_1	6	1	5	7	1	4	7	1	5	6
3	4	7	u_1	7	4	u_1	4	5	u_1	6	7
u_1	7	5	u_1	5	6	7	6	5	7	4	5

siano $\mathscr{P}'_1 = \mathcal{A}_1$ e $\mathscr{P}'_1, \mathscr{P}'_3$ coincidenti con due degli insiemi $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$. Allora $(P'; \mathscr{P}'_1, \mathscr{P}'_2, \mathscr{P}'_3) \subseteq (P; \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3)$.

In modo analogo al Lemma 3.3 di $[3]_2$ si prova il seguente

Lemma 2.2. *Sia* $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ *un sistema di 3 DMB PTS tale che* $P=M_3$. *Se* $|A(1,\{1,2,3\})-A(2,\{1,2,3\})|=2$, *allora esiste un* $(P';\mathcal{P}'_1,\mathcal{P}'_2,\mathcal{P}'_3)$ *immergibile in* $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ *e tale che* $|\mathcal{P}'_1|=9$.

Teorema 2.1. *Non esiste alcun* $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ *tale che* $P=M_3$ *e* $m\neq 8k+9h$ *con* h *e* k *interi non negativi.*

Dim. Sia $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ verificante le ipotesi e $\{1,2,3\}\in\mathcal{P}_1$. Se $A(1,\{1,2,3\})=A(2,\{1,2,3\})=A(3,\{1,2,3\})$, gli insiemi $P'=\{1\}\cup A(1)$, $\mathcal{P}'_i=\{b\in\mathcal{P}_i\colon\ b\cap P'\neq\emptyset\}$ $(i=1,2,3)$ formano un sistema $(P';\mathcal{P}'_1,\mathcal{P}'_2,\mathcal{P}'_3)$ con $|\mathcal{P}'_1|=7$. Poiché, [3], per ogni $v\geq 7$, $v\neq 9$, è $D(v,t_v-7)=2$, segue la tesi.

Se $|A(1,\{1,2,3\})\cap A(2,\{1,2,3\})|=3$ e $A(1,\{1,2,3\})=A(3,\{1,2,3\})$, poniamo $\mathcal{P}_1=\{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,8\,x\},\ \{2,u,v\}\}$, con $x,u,v\in\{4,5,6,7\}$. Da $1,3\notin A(8)$ segue $\{8,2,u\}\in\mathcal{P}_2$, $\{8,2,v\}\in\mathcal{P}_3$ e, essendo $u,v\in A(1)\cap A(2)\cap A(3)$, non esiste alcun blocco di $\mathcal{P}_1$ contenente la coppia $\{u,8\}$ oppure $\{v,8\}$.

Quindi $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ deve verificare le ipotesi del Lemma 2.1 o del Lemma 2.2 e pertanto esiste un $(P';\mathcal{P}'_1,\mathcal{P}'_2,\mathcal{P}'_3)$ con 8 o 9 blocchi, immergibile in $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$. D'altronde $(P-P';\mathcal{P}_1-\mathcal{P}'_1,\mathcal{P}_2-\mathcal{P}'_2,\mathcal{P}_3-\mathcal{P}'_3)$ è un sistema di 3 *DMB PTS* avente ogni elemento di grado 3. Ripetendo le precedenti considerazioni si ha la tesi.

Teorema 2.2. *Non esiste alcun* $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4)$ *avente* $DS=[(4)_3,(3)_8]$ *oppure* $DS=[5,4,(3)_9]$.

Dim. Sia $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4)$ un sistema verificante le ipotesi. Supponiamo dapprima che esiste un blocco $b\subseteq M_3$. Poiché $d(x)\geq 3$ per ogni $x\in P$, $m=12$ e $n=11$, posto $b=\{1,2,3\}\in\mathcal{P}_1$ esistono $8,9\in P-A(1)$ tali che $8,9\in A(2)\cup A(3)$.

Per (1.4) è $|A(1,\ \{1,\ 2,\ 3\})\cap A(i,\ \{1,\ 2,\ 3\})|\geq 3$ $(i=2,\ 3)$, quindi $8,9\notin A(2)\cap A(3)$. Siano $8\in A(2)$ e $9\in A(3)$.

Posto

$\mathcal{P}_1$			$\mathcal{P}_2$			$\mathcal{P}_3$			$\mathcal{P}_4$		
1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	2	6
1	4	5									
1	6	7									

si ha $|\{\{1,6,3\},\{1,6,5\}\} \cap \mathcal{P}_2| = 1$. Quindi è

$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$
1 2 3	1 2 4	1 2 5	1 2 6
1 4 5	1 6 3	1 6 4	1 7 4
1 6 7	1 7 5	1 7 3	1 3 5
	2 5 3	2 3 6	2 5 8
	2 8 6	2 4 8	2 3 4

oppure

$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$
1 2 3	1 2 4	1 2 5	1 2 6
1 4 5	1 6 5	1 6 3	1 7 5
1 6 7	1 7 3	1 7 4	1 3 4
	2 6 3	2 6 8	2 3 5
	2 8 5	2 3 4	2 4 8

e, in entrambi i casi, esiste un $i \in \{2,3,4\}$ tale che $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_i \neq \emptyset$.

Allora il sistema $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ non può contenere un blocco $b \in M_3$. Necessariamente è $DS = [(4)_3, (3)_8]$ e $|b \cap M_4| = 1$ per ogni blocco b.Poniamo $\{x, 1, i+1\} \in \mathcal{P}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ con $x \in M_4$. Allora $\{1,3,y\}$, $\{1,4,u\}$, $\{1,5,v\} \in \mathcal{P}_1$ con $y, u, v \in M_4$, da cui $|M_4| \geq 4$.

Teorema 2.3. $D(15, t_{15} - 12) = 3$.

Dim. Sia $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ un sistema, con $m = 12$, tale che $(P, \mathcal{P}_1)$ è immergibile in un $STS(15)(S, \mathcal{B})$. È $n \geq 11$, altrimenti $|\mathcal{B} - \mathcal{P}_1| \geq 25$. Da (1.3) segue $3 \leq d(x) \leq [36/n]$ per ogni $x \in P$, quindi è $n \leq 12$. Poiché $\sum_{x \in P} d(x) = 36$ e, per (1.2), $d(x) \leq (n-1)/2$ per ogni $x \in P$, si vede facilmente che $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4)$ può assumere uno dei seguenti insiemi dei gradi $DS = [(3)_{12}]$, $DS = [(4)_3, (3)_8]$ e $DS = [5, 4, (3)_9]$. Dai teoremi 2.1 e 2.2 segue $D(15, t_{15} - 12) \leq 3$.

Sia $(\overline{S}, \overline{\mathcal{B}})$ un $STS(7)$, con $\overline{S} = \{1,2,\ldots,7\}$ e $\{F_i \colon i = 1,2,\ldots,7\}$ una 1-fattorizzazione su $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$. Sia $\alpha = (5\,6\,7)$ una permutazione su $\overline{S}$. Poniamo

$$\mathcal{D}_1 = \{\{a_i, x, y\} : [x,y] \in F_i,\ i = 1,2,\ldots,7\}\ ,$$

$$S^* = \overline{S} \cup T\ , \qquad \mathcal{D}_2 = \{\{\alpha a_i, x, y\} : [x,y] \in F_i,\ i = 1,2,\ldots,7\}\ ,$$

$$\mathcal{D}_3 = \{\{\alpha^2 a_i, x, y\} : [x,y] \in F_i,\ i = 1,2,\ldots,7\}\ .$$

Per $i = 1,2,3$ $(S^*, \mathcal{D}_i \cup \overline{\mathcal{B}})$ sono tre $STS(15)$ intersecantesi in esattamente gli stessi 23 blocchi.

3 – Proviamo in questo paragrafo che non esiste un sistema $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$, con $m = 12$ e $n = 13$ tale che $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1,2,3)$ è immergibile in un $STS(13)$.

Salvo avviso contrario, nei teoremi che seguono, in questo e nel successivo paragrafo, è sempre dato un sistema di 3 *DMB PTS* del tipo $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$.

Teorema 3.1. *Sia* $a\in M_2$. *Si ha*

(3.1) *se* $|A(a)\cap M_4|=3$ *e* $|A(a)\cap M_3|=1$, *allora è* $m=9$ *oppure* $m\geqslant 13$;

(3.2) *se* $|A(a)\cap M_i|=2i-4$, *per* $i=2,3$, *allora* $A(a)-(M_3\cup M_4)\neq\emptyset$;

(3.3) *se* $m=12$ *e* $A(a)\subseteq M_3$, *oppure se* $m=12$, $|A(a)\cap M_3|=3$ *e* $A(a)-\mathrm{M}_3\subseteq M_4$, *allora* $(P,\mathcal{P}_i)$ $(i=1,2,3)$ *non è immergibile in un STS*(13);

(3.4) *se* $n\leqslant 12$, $m=12$, $|\mathrm{A}(a)\cap M_3|=3$ *e* $A(a)-\mathrm{M}_3\subseteq M_5$, *allora* $(P,\mathcal{P}_i)$ $(i=1,2,3)$ *non è immergibile in un STS*(13);

(3.5) *se* $n\leqslant 11$, $m=12$, $|\mathrm{A}(a)\cap M_3|=2$ *e* $|A(a)\cap M_4|=|\mathrm{A}(a)\cap M_5|=1$, *allora* $(P,\mathcal{P}_i)$ $(i=1,2,3)$ *non è immergibile in un STS*(13).

Dim. (3.1) e (3.2) seguono da $[3]_2$ (teoremi 2.2 e 2.4). Sia $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ un sistema verificante le condizioni di (3.3) o (3.4) oppure (3.5). Per ogni $\{x,y\}\subseteq\{a\}\cup A(a)$ esiste $b\in\mathcal{P}_1$ tale che $\{x,y\}\}b$. Quindi se $(P,\mathcal{P}_1)$ fosse immergibile in un *STS*(13) $(S,\mathcal{B})$ sarebbe $|\mathcal{B}-\mathcal{P}_1|\geqslant 15$.

Teorema 3.2. *Sia* $m=12$. *Se esiste* $x\in M_3$ *tale che* $|A(x)\cap M_2|\geqslant 3$, *allora* $(P,\mathcal{P}_i)$ $(i=1,2,3)$ *non è immergibile in un STS*(13).

Dim. Sia $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ un sistema verificante le ipotesi. Da (1.5) segue $|A(x)\cap M_2|=3$ e, posto $A(x)\cap M_2=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ e $1,2,3\in P$,

$\mathcal{D}_1\subseteq\mathcal{P}_1$	$\mathcal{D}_2\subseteq\mathcal{P}_2$	$\mathcal{D}_3\subseteq\mathcal{P}_3$
$x\ \alpha\ 1$	$x\ \alpha\ 2$	$x\ \alpha\ 3$
$x\ \beta\ 2$	$x\ \beta\ 3$	$x\ \beta\ 1$
$x\ \gamma\ 3$	$x\ \gamma\ 1$	$x\ \gamma\ 2$
$\alpha\ 2\ 3$	$\alpha\ 1\ 3$	$\alpha\ 1\ 2$
$\beta\ 1\ 3$	$\beta\ 1\ 2$	$\beta\ 2\ 3$
$\gamma\ 1\ 2$	$\gamma\ 2\ 3$	$\gamma\ 1\ 3$

Gli insiemi $D=\{x\}\cup A(x)$, $\mathcal{D}_i$ $(i=1,2,3)$ formano un sistema $(D;\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3)$ immergibile in $(P;\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$. Quindi $(P';\mathcal{P}_1-\mathcal{D}_1,\mathcal{P}_2-\mathcal{D}_2,\mathcal{P}_3-\mathcal{D}_3)$ è un sistema di 3 *DMB PTS* con $P'\subseteq P$.

Sia, per assurdo, $(P, \mathcal{P}_1)$ immergibile in un $STS(13) \subseteq (S, \mathcal{B})$. Se per qualche $u \in \{1,2,3\}$ è $u \notin P'$, esistono tre blocchi di $\mathcal{B} - \mathcal{P}_1$ contenenti u e quindi esiste $\{u, y, \cdot\} \in B - \mathcal{P}_1$ (2) con $y \in \{\alpha, \beta, \gamma, x\}$. Allora $1, 2, 3 \in P'$ e poiché $|\mathcal{P}_1 - \mathcal{D}_1| = 6$, da (1.3) segue che 1, 2, 3 hanno grado 2 relativamente al sistema $(P'; \mathcal{P}_1 - \mathcal{D}_1, \mathcal{P}_2 - \mathcal{D}_2, \mathcal{P}_3 - \mathcal{D}_3)$. Quindi $1, 2, 3 \in M_5$. Questo è impossibile altrimenti, dovendo esserci tre blocchi distinti di $\mathcal{B} - \mathcal{P}_1$ contenuti rispettivamente 1, 2 e 3, esiste $\{u, y, \cdot\} \in \mathcal{B} - \mathcal{P}_1$ con $u \in \{1,2,3\}$ e $y \in \{\alpha, \beta, \gamma, x\}$.

Teorema 3.3. *Se* $m = 12$ *e* $n = 13$, $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ *non è immergibile in un* $STS(13)$.

Dim. (1.5) implica $|M_2| \leqslant 6$. Quindi si vede facilmente che $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ ha uno dei seguenti *DS*:

(a) $[6, (3)_6, (2)_6]$, $[(4)_3, (3)_4, (2)_6]$, $[5, 4, (3)_5, (2)_6]$, $[5, (3)_7, (2)_5]$, $[(3)_{10}, (2)_3]$;

(b) $[4, (3)_8, (2)_4]$, $[(4)_2, (3)_6, (2)_5]$.

Se *DS* coincide con uno di quelli dati in (a) esiste $x \in M_3$ tale che $|A(x) \cap M_2| \geqslant 3$, quindi il Teorema 3.2 prova la tesi. Nei restanti casi la tesi segue da (3.2) e (3.3) del Teorema 3.1.

4 – In questo paragrafo si prova che non esiste un sistema $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ con $n = m = 12$ tale che $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ è immergibile in un $STS(13)$.

Teorema 4.1. *Se* $|A(x) \cap M_2| = 4$ *con* $x \in P$, *allora* $d(x) \geqslant 5$.

Dim. Ovviamente $d(x) \geqslant 4$. Sia $d(x) = 4$. Poniamo $A(x) \cap M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$. Per ogni $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ se $\{x, y, u\} \in \mathcal{P}_r$ e $\{x, y, v\} \in \mathcal{P}_s$, si ha $\{y, u, v\} \in \mathcal{P}_t$ con $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$. Quindi, posto per $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$ $\{x, j, u_j^i\} \in \mathcal{P}_i$ con $u_j^i \in P$, le $(u_1^i, u_2^i, u_3^i, u_4^i)$ sono tre permutazioni su 4 elementi verificanti le

(2) Usualmente, se non è necessario specificare un elemento di P, indichiamo tale elemento con $\cdot$.

proprietà

(1) $u^{i_1}_j \neq u^{i_2}_j$ per ogni $i_1, i_2 \in \{1,2,3\}$ $i_1 \neq i_2$, e per ogni $j \in \{1,2,3,4\}$;

(2) $u^{i_1}_{j_1} = u^{i_2}_{j_2} \Rightarrow u^{i_2}_{j_1} \neq u^{i_1}_{j_2}$ per ogni $i_1, i_2 \in \{1,2,3\}$, $j_1, j_2 \in \{1,2,3,4\}$ $i_1 \neq i_2$ e $j_1 \neq j_2$.

Poiché non esistono tre permutazioni di ordine 4 verificanti (1) e (2) si ha la tesi.

Teorema 4.2. *Se* $m = 12$ *e* $|A(x) \cap M_2| = 5$, $x \in P$, *allora* $d(x) \geq 6$.

Dim. Ovviamente $d(x) \geq 5$. Sia $d(x) = 5$. Poniamo $A(x) \cap M_2 = \{1,2,3,4,5\}$. Per ogni $y \in \{1,2,3,4,5\}$, $\{x,y,u\} \in \mathcal{P}_r$ e $\{x,y,v\} \in \mathcal{P}_s$ implicano $\{y,u,v\} \in \mathcal{P}_t$ con $\{r,s,t\} = \{1,2,3\}$. Quindi è lecito porre

$\mathcal{P}_1$			$\mathcal{P}_2$			$\mathcal{P}_3$		
x	1	6	x	1	u_1	x	1	v_1
x	2	7	x	2	u_2	x	2	v_2
x	3	8	x	3	u_3	x	3	v_3
x	4	9	x	4	u_4	x	4	v_4
x	5	0	x	5	u_5	x	5	v_5
1	u_1	v_1	1	6	v_1	1	6	u_1
2	u_2	v_2	2	7	v_2	2	7	u_2
3	u_3	v_3	3	8	v_3	3	8	u_3
4	u_4	v_4	4	9	v_4	4	9	u_4
5	u_5	v_5	5	0	v_5	5	0	u_5

con $\{u_i: i = 1,2,\ldots,5\} = \{v_i: i = 1,2,\ldots,5\} = \{6,7,8,9,0\} \subseteq P$. Siano b_1 e b_2 i due restanti blocchi di $\mathcal{P}_1$. Può essere $n = 11$ o 12. Se $n = 11$ si ha $b_1 \cup b_2 \subseteq \{6,7,8,9,0\}$ e $|b_1 \cap b_2| = 1$. Quindi per qualche $i \in \{1,2,\ldots,5\}$ è o $\{u_i, v_i\} \subseteq b_1$ oppure $\{u_i, v_i\} \subseteq b_2$. Se $n = 12$ è lecito porre $b_1 = \{\alpha, 6, 7\}$, $b_2 = \{\alpha, 8, 9\}$, $\alpha \in P$, $\{\alpha, 6, 8\}$, $\{\alpha, 7, 9\} \in \mathcal{P}_2$ e $\{\alpha, 6, 9\}, \{\alpha, 7, 8\} \in \mathcal{P}_3$. Quindi $\{\{6,8\}, \{7,9\}, \{6,9\}, \{7,8\}\} \subseteq \{\{u_i, v_i\}: i = 1,2,\ldots,5\}$ il che è assurdo.

Teorema 4.3. *Se* $DS = [(5)_2, (3)_6, (2)_4]$, $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1,2,3)$ *non è immergibile in un* $STS(13)$.

Dim. Per le (3.5) e (3.4) del Teorema 3.1 si può supporre $M_5 \subseteq A(i)$ per ogni $i \in M_2$. Quindi per ogni $i \in M_2$ esiste un blocco $b_i = \{i\} \cup M_5 \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ ma, essendo $|M_2| = 4$, ciò è assurdo.

Teorema 4.4. *Sia* $m = 12$, $M_6 = \emptyset$, $|M_5| = 1$, $1 \leq |M_4| \leq 2$ *e* $|M_2| \geq 3$. *Se* $M_4 \cap A(1) \cap A(2) \cap A(3) \neq \emptyset$ *con* $1,2,3 \in M_2$, *allora* $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1,2,3)$ *non è immergibile in un* $STS(13)$.

Dim. Sia, per assurdo, $(P, \mathcal{P}_1)$ immergibile in un $STS(13)$ $(S, \mathcal{B})$. Poniamo $0 \in M_4 \cap A(1) \cap A(2) \cap A(3)$ e $M_5 = \{\alpha\}$. Per le (3.2) e (3.3) del Teorema 3.1 è $\alpha \in A(1) \cap A(2) \cap A(3)$. Se per ogni $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, è $A(i) \cap A(j) = \{\alpha, 0\}$, si ha $|A(0)| \geq 10$ mentre per ipotesi $0 \in M_4$. Allora esiste almeno una coppia $\bar{i}, \bar{j} \in \{1,2,3\}$, $\bar{i} \neq \bar{j}$, per cui $|A(\bar{i}) \cap A(\bar{j})| \geq 3$. Per esempio sia $\bar{i} = 1$, $\bar{j} = 2$ e $4 \in A(1) \cap A(2)$. Poniamo $\{1, \alpha, 0\}$, $\{1,4,5\} \in \mathcal{P}_1$. Se $4 \in M_3$ si ha $5 \in M_4$ (altrimenti $|\mathcal{B} - \mathcal{P}_1| \geq 15$), mentre se $4 \in M_4$ è ovviamente $5 \in M_3$. In ogni caso $\mathcal{B} - \mathcal{P}_1$ contiene i tre blocchi distinti $\{3,5,\cdot\}$, $\{2,5,\cdot\}$, $\{3,4,\cdot\}$ e si ha

$$\mathcal{P}_1 = \{1,\alpha,0\}, \{1,4,5\}, \{3,\alpha,6\}, \{3,0,7\}, \{2,0,4\}, \{0,5,6\}, \{2,\alpha,7\}, \{\alpha,4,:\}, \{4,7,\cdot\}$$

con $6,7 \in P$. Quindi $4 \in M_4$. Ma, in tal caso, $7 \in M_3$ e poiché esistono al più due blocchi di $\mathcal{B} - \mathcal{P}_1$ contenenti 7 si ha un assurdo.

Dal Teorema 4.4 e dalle (3.3) e (3.4) del Teorema 3.1 segue il

Corollario 4.1. *Se* $DS = [5, 4, (3)_7, (2)_3]$, $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1,2,3)$ *non è immergibile in un* $STS(13)$.

Teorema 4.5. *Se* $DS = [5, (4)_2, (3)_5, (2)_4]$, $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1,2,3)$ *non è immergibile in un* $STS(13)$.

Dim. Sia, per assurdo, $(P, \mathcal{P}_1)$ immergibile in un $STS(13)$ $(S, \mathcal{B})$. Poniamo $M_2 = \{1,2,3,4\}$, $M_4 = \{5,6\}$, $M_5 = \{7\}$ e $M_3 = \{8,9,0,u,v\}$. Dalle (3.2), (3.3) e (3.4) del Teorema 3.1 segue $7 \in A(i)$ e $|M_4 \cap A(i)| \geq 1$ per ogni $i \in M_2$. Dai teoremi 4.1 e 4.4 segue che, per ogni $x \in M_4$, $|\{i \in M_2 \colon x \in A(i)\}| \leq 2$. Quindi, senza perdita di generalità, possiamo supporre $5 \in A(1) \cap A(2)$, $5 \notin A(3) \cap A(4)$, $6 \in A(3) \cap A(4)$, $6 \notin A(1) \cap A(2)$ e $\{1,7,5\}$, $\{3,7,6\} \in \mathcal{P}_1$. A meno di isomorfismi si ha uno dei seguenti casi

(I)

$\mathcal{P}_1$		
1	7	5
1	8	9
2	7	8
2	5	·
3	7	6
3	·	·
4	7	9
4	6	·
7	·	·
5	6	·
5	·	·
6	·	·

(II)

$\mathcal{P}_1$		
1	7	5
1	8	9
2	7	8
2	5	·
3	7	6
3	·	·
4	7	·
4	6	·
7	9	·
5	6	·
5	·	·
6	·	·

(III)

$\mathcal{P}_1$		
1	7	5
1	8	9
2	7	·
2	5	·
3	7	6
3	·	·
4	7	8
4	6	·
7	9	·
5	6	·
5	·	·
6	·	·

Nel caso (I), poiché $1,4 \in M_2$ e $9 \in M_3$, è $\{5,6,9\} \in \mathcal{P}_1$. Quindi, posto $b_1 = \{2,5,0\} \in \mathcal{P}_1$, si ha $b_2 = \{5,8,0\} \in \mathcal{P}_1$ e $|b_1 \cap b_2| = 2$.

Nel caso (II) sia $\{2,5,x\} \in \mathcal{P}_1$ con $x \in M_3$. Poiché le coppie $\{5,8\}$, $\{x,8\}$ sono contenute in due blocchi distinti di $\mathcal{P}_1$ e $8 \in M_3$, si ha $x = 9$ e $\{3,0,u\} \in \mathcal{P}_1$. Posto infine $\{4,7,0\}$, $\{7,9,u\} \in \mathcal{P}_1$, si ha che $d(v) = 2$, contrariamente all'ipotesi $v \in M_3$.

Nel caso (III) è $\{5,6,8\} \in \mathcal{P}_1$. Sia $\{4,6,x\} \in \mathcal{P}_1$, allora $x \in A(8)$ e quindi $x = 9$. Poiché $9 \in A(5)$, si ha $d(9) \geqslant 4$ mentre abbiamo supposto $9 \in M_3$.

Teorema 4.6. *Sia $n = m = 12$. Allora $(P, \mathcal{P}_i)$ $(i = 1,2,3)$ non è immergibile in un $STS(13)$.*

Dim. Per la (1.2) è $d(x) \leqslant 5$ per ogni $x \in P$. Poiché $\sum_{x \in P} d(x) = 36$, il sistema $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ ha uno dei seguenti DS:

(a) $[(3)_{12}]$;

(b) $[4,(3)_{10},2]$, $[(4)_2,(3)_8,(2)_2]$, $[(4)_3,(3)_6,(2)_3]$, $[(4)_4,(3)_4,(2)_4]$, $[(4)_5,(3)_2,(2)_5]$, $[5,(3)_9,(2)_2]$;

(c) $[5,(4)_4,3,(2)_6]$, $[(5)_2,(4)_2,(3)_2,(2)_6]$, $[(5)_3,(3)_3,(2)_6]$;

(d) $[5,(4)_3,(3)_3,(2)_5]$, $[(5)_2,4,(3)_4,(2)_5]$;

(e) $[(4)_6,(2)_6]$, $[(5)_2,(3)_6,(2)_4]$, $[5,(4)_2,(3)_5,(2)_4]$, $[5,4,(3)_7,(2)_3]$.

Nei casi (a), (b) e (c) la tesi segue rispettivamente dai teoremi 2.1, 3.1 e 3.2.
Nel caso (d) la tesi segue dai teoremi 3.2, 4.1 e 4.2.
Infine nel caso (e) la tesi segue dai teoremi 4.1, 4.3, 4.5 e dal Corollario 4.1.

Ringrazio il prof. Mario Gionfriddo per le interessanti conversazioni avute sull'argomento.

Bibliografia

[1] J. Doyen, *Constructions of disjoint Steiner triple systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 409-416.

[2] C. C. Lindner and A. Rosa, *Steiner triple systems having a prescribed number of triples in common*, Canad. J. Math. **27** (1975), 1166-1175.

[3] S. Milici and G. Quattrocchi: $[\bullet]_1$ *Some results on the maximum number of STS(s) such that any two of them intersect in the same block-set*, J. of Inform. Optim. Sci. 7 (1986), 291-302; $[\bullet]_2$ *Alcune condizioni necessarie per l'esistenza di tre DMB PTS con elementi di grado 2*, Matematiche (in corso di stampa).

[4] A. Rosa, *Intersection properties of Steiner systems*, Ann. Discrete Math. 7 (1980), 115-128.

Abstract

Let $\mathcal{D}(v, k)$ ([1], [4]) *be the maximum number of sSTS(v) that can be constructed in such a way that any two of them have exactly k blocks in common, these k blocks being moreover in each of the STS(v).*

It is known $[3]_1$ *that* $\mathcal{D}(v, t_v - 12) = 7$ $(t_v = v(v-1)/6)$ *for every admissible* $v \geq 19$. *In this paper we prove that* $D(15, t_{15} - 12) = 3$. *Moreover, given a* $(P; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ *such that* $|P| = 12, 13$, $|\mathcal{P}_1| = |\mathcal{P}_2| = |\mathcal{P}_3| = 12$, *we prove that do not there exists a* $STS(13)$ $(S, \mathcal{B})$ *such that* $(P, \mathcal{P}_1)$, *or* $(P, \mathcal{P}_2)$, *or* $(P, \mathcal{P}_3)$, *is embedded in* $(S, \mathcal{B})$.

* * *