Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 65-70

VITTORIO MANGIONE (*)

Connessioni quasi complesse e strutture di tipo (V) (**)

1 - Introduzione

Su una varietà differenziabile M di dimensione $2n$ ($n \geqslant 2$) e classe $C^r (r \geqslant 3)$, dotata di una *struttura di tipo* (V) *secondo* H. Wakakuwa (1), si studia l'esistenza e la rappresentabilità locale di connessioni lineari *quasi complesse* rispetto a tale struttura (in altri termini, connessioni rispetto alle quali le tre strutture quasi complesse costituenti la struttura di tipo (V) riescano simultaneamente parallele) (2).

Dopo alcune premesse, per le connessioni del tipo indicato si stabilisce, oltre ad una condizione necessaria e sufficiente per la loro esistenza su M, una forma generale di rappresentazione espressa mediante opportuni endomorfismi di $\mathscr{T}_2^1$ (teoremi T_2, T_3, in 3).

Infine, se M è dotata di una metrica g, si costruisce una metrica hermitiana h *rispetto alla struttura di tipo* (V) (teorema T_1).

2 - Preliminari

Sia $\mathscr{F}$ l'algebra sui reali delle funzioni di classe C^∞ definite su M a valori reali e $\mathscr{T}_s^r$ l'$\mathscr{F}$-modulo dei campi tensoriali r volte contravarianti ed s volte covarianti. Intervengono alcuni noti endomorfismi di $\mathscr{T}_2^1$ dipendenti dalle strutture quasi

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Ricerca effettuata nell'ambito del Progetto «Geometria delle varietà differenziabili», M.P.I.—Ricevuto: 17-IX-1984.

(1) Una tale struttura è costituita da tre strutture quasi complesse, J_1, J_2, J_3, linearmente indipendenti sui reali e commutanti fra loro. Vedi [7] (p. 400). Alle strutture di tipo (V) è dedicato il lavoro [3].

(2) Le analoghe questioni riferite a due strutture quasi complesse linearmente indipendenti e generanti una sottoalgebra di dimensione 4 sono risolte in [6].

complesse J_1, J_2, J_3 [3], componenti la struttura di tipo (V) esistente su M, così definiti [4]

$$\lambda_i(L)(X, Y) = J_i(L(X, Y)) \qquad W_i(L)(X, Y) = -J_i(L(X, J_i(Y)) \tag{1}$$

$$O_i = \tfrac{1}{2}(I + W_i) \qquad O_i^* = I - O_i \tag{2}$$

per $i = 1, 2, 3$, per ogni X, Y di $\mathscr{T}_0^1$ e per ogni L di $\mathscr{T}_2^1$.

Sussistono le *relazioni* [5]

$$\lambda_i \lambda_i = -I \qquad W_i^2 = I \qquad \lambda_i W_i = W_i \lambda_i \tag{3}$$

$$O_i^2 = O_i \qquad O_i^{*2} = O_i^* \qquad O_i \lambda_i = \lambda_i O_i \qquad O_i^* \lambda_i = \lambda_i O_i^* \tag{4}$$

per $i = 1, 2, 3$.

In particolare *se le J_i commutano fra loro* si ha

P$_1$. *Gli endomorfismi λ_i, λ_j, W_i, W_j commutano fra loro; l'omomorfismo $O_i^* O_j$ è idempotente e riesce*

$$O_j^* O_i = O_i O_j^* \tag{5}$$ [6].

Sia ora ∇ una connessione di M [7]. Come è noto *sussistono le* [8]

$$O_i(\nabla J_i) = 0 \qquad O_i^*(\nabla J_i) = \nabla J_i \tag{6}$$

dove ∇J_i è il differenziale covariante di J_i.

In particolare, *in ipotesi di commutatività per le J_i*, si ha [9]

$$\lambda_i O_i^*(\nabla J_j) = \lambda_j O_j(\nabla J_i) \tag{7}$$

per $i, j = 1, 2, 3$.

---

(3) Una struttura quasi complessa J è un elemento di $\mathscr{T}_1^1$ tale che $J^2 = -I$, con I identità di $\mathscr{T}_1^1$. Vedi p.e. [2] (vol. II, p. 121).

(4) Vedi p.e. [7], [8], [6].

(5) Cfr. nota precedente.

(6) P$_1$ è di fatto nota. Vedi [6] (p. 178). La idempotenza di $O_i^* O_j$ si verifica immediatamente per via diretta.

(7) Per le generalità sulle connessioni vedi p.e. [2].

(8) Vedi [4], (p. 145: condizione $\bar{A}_1$), vedi anche [6] (p. 179).

(9) La (7) segue subito dalle (2.3) di [6] (p. 180).

3 - Connessioni quasi complesse e metriche hermitiane su M.

Siano J_1, J_2, J_3 le strutture quasi complesse costituenti la struttura di tipo (V) di cui è dotata M e $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{1,2}{\nabla}$, generiche connessioni lineari quasi complesse rispetto a J_1, J_1 e J_2, rispettivamente ([10]). Si indichi poi con h *una metrica hermitiana rispetto alla struttura di tipo* (V), cioè tale che

$$h(J_1(X),\ J_1(Y)) = h(J_2(X),\ J_2(Y)) = h(J_3(X),\ J_3(Y)) = h(X, Y) \tag{8}$$

per ogni X, Y di $\mathscr{D}^1_0$.

Sussistono i teoremi:

T$_1$. *Se g è una metrica di M, la metrica definita da*

$$\begin{aligned} h(X, Y) = {} & g(X, Y) + g(J_1(X),\ J_1(Y)) + g(J_2(X),\ J_2(Y)) + g(J_3(X),\ J_3(Y)) \\ & + g(J_1 J_2(X),\ J_1J_2(Y)) + g(J_1 J_3(X),\ J_1J_3(Y)) + g(J_2 J_3(X),\ J_2 J_3(Y)) \\ & + g(J_1 J_2 J_3(X),\ J_1 J_2 J_3(Y)) \ , \end{aligned} \tag{9}$$

per ogni X, Y di $\mathscr{D}^1_0$, risulta hermitiana rispetto alla struttura di tipo (V).

T$_2$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una connessione lineare ∇ quasi complessa rispetto alla struttura di tipo* (V) *è che esista un campo C di $\mathscr{D}^1_2$ soddisfacente una delle*

$$O_3^* O_2 O_1(C) = \frac{1}{2} O_3^* O_1 \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2) - \frac{1}{2} \lambda_3(\overset{1}{\nabla} J_3) \tag{10}$$

$$O_3^* O_2 O_1(C) = -\frac{1}{2} \lambda_3(\overset{1,2}{\nabla} J_3) \ . \tag{11}$$

T$_3$. *Tutte e sole le connessioni ∇ quasi complesse rispetto ad una struttura di tipo* (V) *sono rappresentate dalla*

$$\nabla = \overset{1,2}{\nabla} - \frac{1}{2}(O_2 O_1 \lambda_3)(\overset{1,2}{\nabla} J_3) + O_1 O_2 O_3(C) \tag{12}$$

con C arbitrario elemento di $\mathscr{D}^1_2$.

([10]) Per le connessioni quasi complesse rispetto a J_1 vedi p.e. [8] (p. 135-136), [5] ((31) p. 19), [6] (2.6, p. 180). Per quelle quasi complesse rispetto a due strutture quasi complesse J_1, J_2, in particolare commutanti fra loro, vedi [6] (teorema T$_2$, 3.1, p. 181). Le considerazioni e le relazioni che seguono restano valide, in virtù della commutatività delle strutture interessate, per una qualsiasi rotazione degli indici che in esse figurano.

Tenuto conto della permutabilità di J_1, J_2, J_3 non è difficile verificare che la metrica definita dalla (9) soddisfa le condizioni (8). Ciò prova il teorema T_1.

Per provare T_2, conviene partire dalla (3.1) di [**6**] che fornisce la rappresentazione di tutte e sole le connessioni $\overset{1,2}{\nabla}$ quasi complesse rispetto a due strutture J_1, J_2 quasi complesse, linearmente indipendenti e commutanti fra loro. Risulterà anche $\overset{1,2}{\nabla} J_3 = 0$ *se e solo se*

$$(13) \qquad (\overset{1}{\nabla} J_3)(X, Y) - \frac{1}{2} O_1 \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, J_3(Y)) + \frac{1}{2} J_3(O_1 \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y)$$
$$+ O_2 O_1(C)(X, J_3(Y)) - J_3(O_2 O_1(C)(X, Y)) = 0$$

per ogni X, Y di $\mathscr{D}^1_0$.

Agendo con J_3 ad ambo i membri della (13) e tenute presenti le definizioni di λ_3, di O_3^* (v. 2), e che $J_3^2 = -I$, si perviene alla

$$\lambda_3(\overset{1}{\nabla} J_3) - O_3^* O_1 \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2) + 2 O_3^* O_2 O_1(C) = 0$$

che è la (10). Se come $\overset{1}{\nabla}$ si considera una connessione $\overset{1,2}{\nabla}$ quasi complessa anche rispetto a J_2, dalla precedente si perviene alla (11).

Per T_3, conviene notare anzitutto che tenuto conto della (11) e della (3.1) di [**6**], se in quest'ultima si sceglie come $\overset{1}{\nabla}$ una connessione lineare del tipo $\overset{1,2}{\nabla}$, le connessioni cercate potranno ammettere una rappresentazione del tipo

$$(14) \qquad \nabla = \overset{1,2}{\nabla} + O_2 O_1(C)$$

con C elemento di $\mathscr{D}^1_2$ verificante la (11). Si tratta quindi di risolvere l'equazione (11) in C di $\mathscr{D}^1_2$.

A tal fine notiamo che in virtù delle (4) e di P_1, tenuto conto che grazie alle $(2)_1$ e a P_1 riesce $O_2 O_1 = O_1 O_2$, *l'omomorfismo* $O_3^* O_2 O_1$ *risulta idempotente*. In virtù di un noto lemma [11], la (11) ammetterà soluzioni in $\mathscr{D}^1_2$ in corrispondenza alle connessioni $\overset{1,2}{\nabla}$ in grado di soddisfare la

$$(15) \qquad (I - O_3^* O_2 O_1)(\lambda_3(\overset{1,2}{\nabla} J_3)) = 0\ .$$

Tenuto conto della (4), della (5) di P_1, il primo membro della precedente diviene

$$\lambda_3(\overset{1,2}{\nabla} J_3) + \lambda_3 O_2 O_1 O_3^* (\overset{1,2}{\nabla} J_3)\ ,$$

[11] Vedi p.e. [1] (Proposition 1, p. 7), vedi anche [8]) (p. 133).

che, grazie alla (6), si riduce a

$$\lambda_3(\overset{1,2}{\nabla} J_3) - \lambda_3 O_2 O_1 (\overset{1,2}{\nabla} J_3) . \tag{16}$$

In virtù della $(2)_2$ la (16) diviene

$$\lambda_3 O_2^* (\overset{1,2}{\nabla} J_3) + \lambda_3 O_1^* (\overset{1,2}{\nabla} J_3) - \lambda_3 O_2^* O_1^* (\overset{1,2}{\nabla} J_3)$$

e successivamente, avendo presente la $(3)_1$ e la proprietà P_1,

$$-\lambda_2 \lambda_3 \lambda_2 O_2^* (\overset{1,2}{\nabla} J_3) - \lambda_1 \lambda_3 \lambda_1 O_1^* (\overset{1,2}{\nabla} J_3) - \lambda_1 \lambda_3 O_2^* \lambda_1 O_1^* (\overset{1,2}{\nabla} J_3) .$$

Infine, tenuto conto della (7) e dell'ipotesi $\overset{1,2}{\nabla} J_1 = \overset{1,2}{\nabla} J_2 = 0$, si riconosce che l'espressione è nulla.

La (15) è quindi verificata per qualsiasi connessione $\overset{1,2}{\nabla}$.

La (11) è quindi risolvibile e, per il lemma sopra ricordato, tutte e sole le soluzioni sono fornite dalla

$$C = -\frac{1}{2}\lambda_3(\overset{1,2}{\nabla} J_3) + (I - O_3^* O_2 O_1)(L) \tag{17}$$

con L arbitrario elemento di $\mathscr{D}_2^1$.

Sostituendo la (17) nella (14), ricordata ancora la (5) e che nelle nostre ipotesi riesce $O_2 O_1 = O_1 O_2$, dopo alcuni passaggi, si perviene alla (12) e T_3 è dimostrato.

Conviene terminare osservando che, tenuto conto delle (13), (14) e (15) oltre che dei teoremi T_5 e T_6 del lavoro [3], segue subito che *le connessioni* (12) *risultano quasi complesse rispetto a tutte le strutture quasi complesse e quasi prodotto di* $A = \langle J_1, J_2, J_3 \rangle$.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Algèbre,* ch. 8, Herman, Paris 1955.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry,* Interscience, London, (I) 1963, (II) 1968.

[3] S. Donnini e V. Mangione, *Sulle varietà dotate di una struttura di tipo* (V) *secondo H. Wakakuwa,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 329-343.

[4] V. Mangione, *Su alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa,* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 139-153.

[5] G. B. Rizza, *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni su di una varietà quasi complessa,* Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste (I) **1** (1969), 9-25.

[6] F. TRICERRI, *Connessioni lineari e metriche hermitiane sopra varietà dotate di due strutture quasi complesse*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 177-186.

[7] H. WAKAKUWA, *On linearly independent almost complex structures in a differentiable manifold*, Tôhoku Math. J. (3) 13 (1961), 393-422.

[8] K. YANO, *Differential Geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New York 1965.

Summary

Let M be a differential manifold with a structure (V), *according to H. Wakakuwa. We study the existence and the local representation of linear connections* ∇ *such that* $\nabla J_1 = \nabla J_2 = \nabla J_3 = 0$, *where* J_1, J_2, J_3 *are the almost complex structures defining the structure* (V). *Hermitian metrics with respect to a structure* (V) *are also determined.*

* * *