Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 71-87

EDVIGE PUCCI (*)

Analisi gruppale dell'equazione $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ (**)

1 - Introduzione

In una recente nota [4] si sono esaminate le proprietà gruppali dell'equazione semilineare iperbolica $u_{xt} = f(u)$, utilizzando la teoria di Lie dei gruppi continui di trasformazione e si sono caratterizzati i gruppi di trasformazione puntuali ammessi dall'equazione per ogni $f(u)$, ed i gruppi più ampi ammessi per particolari scelte di $f(u)$.

In questa nota si conduce un'analisi dello stesso tipo per l'equazione (in due variabili)

$$u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x) \tag{1.1}$$

in cui $g(u, u_x)$ è una funzione degli argomenti sulla quale non si fa alcuna ipotesi, salvo supporre le opportune proprietà di regolarità e λ è un parametro non nullo. L'indagine viene condotta supponendo che la funzione g dipenda effettivamente da u_x, poichè in caso contrario l'equazione (1.1) si riconduce mediante un cambio di variabili a quella già esaminata in [4]. Ovviamente i risultati che si ottengono dipendono solo dal segno di λ, poichè con un semplice cambio di scala l'equazione può essere riportata a quella in cui è $\lambda = +1$, oppure $\lambda = -1$.

Questi risultati, unitamente a quelli di [4], consentono di definire le proprietà gruppali per tutte le equazioni semilineari ellittiche ed iperboliche in due variabili, in cui la parte non lineare dipenda, oltre che dalla funzione incognita, da una sola delle sue derivate prime.

Rientrano nella forma (1.1) con $\lambda < 0$ vari tipi di equazioni di evoluzione non lineare, come ad esempio l'equazione di propagazione non lineare alla Van der

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università di Perugia, via Vanvitelli 2, 06100 Perugia, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.F.M. (C.N.R.).
Ricevuto: 25-IX-1984.

Pool generalizzata [1] in cui è $g(u, u_x) = u_x - au_x^3$. Si ottengono equazioni del tipo (1.1) anche in problemi di teoria delle vibrazioni con perturbazioni regolari. L'analisi della (1.1) mostra in particolare che le proprietà gruppali dell'equazione perturbata dà risultati diversi da quelli relativi all'equazione non perturbata, poiché si riconosce che la dimensione dell'Algebra di Lie è infinita solo quando la g è lineare, mentre risulta finita in tutti gli altri casi.

Il caso $\lambda = 0$ (equazione parabolica) non viene qui esaminato; esso è stato l'oggetto di alcuni lavori della scuola russa [2], [3].

2 - Trasformazioni puntuali

Detti $X = \boldsymbol{R}^2(x, t)$ e $U = \boldsymbol{R}^1(u)$, sia u una applicazione $X \to U$ di classe $C_\infty(X)$. Siano U_1 ed U_2 gli spazi generati dalle derivate prime e seconde dell'applicazione u. Posto $Z = X \times U$, $Z_1 = Z \times U_1$ e $Z_2 = Z_1 \times U_2$ sono detti rispettivamente le continuazioni prime e seconde di Z definite dall'applicazione u. Sia $H: Z_2 \to R$, $H \in C_\infty(Z_2)$; l'equazione differenziale

$$H(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \tag{2.1}$$

definisce una varietà E dello spazio Z_2.

L'equazione (2.1) ammette un gruppo di trasformazioni Γ ad un parametro in Z, $x = X(x, t, u, \varepsilon)$, $t = T(x, t, u, \varepsilon)$, $u = U(x, t, u, \varepsilon)$ se la varietà $E \subset Z_2$ è invariante relativamente ad ogni trasformazione indotta da Γ su Z_2, cioè se si trasforma in se stessa per ogni trasformazione appartenente a Γ che, operando su Z, opera in conseguenza anche su U_1 ed U_2.

Come è noto [3] condizione necessaria e sufficiente affinchè la varietà E sia invariante relativamente a Γ è che sia verificata la condizione

$$\mathscr{X} H|_{H=0} = 0 \tag{2.2}$$

dove $\mathscr{X}$ è l'operatore differenziale

$$\mathscr{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial u_{tt}}\,.$$

Le funzioni

$$\xi(x, t, u) = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \qquad \tau(x, t, u) = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \qquad \eta(x, t, u) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}$$

rappresentano il campo vettoriale tangente del gruppo Γ e costituiscono l'operatore infinitesimale del gruppo; le α_i e β_i sono delle espressioni lineari omogenee delle ξ, τ, η e delle loro derivate prime e seconde che esprimono le estensioni prime e seconde dell'operatore infinitesimale.

La relazione (2.2) deve essere identicamente verificata sulla varietà $H=0$; quando sia assegnata la funzione H, la (2.2) si traduce in un sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee che caratterizza gli operatori infinitesimali del gruppo di invarianza. Una volta individuato l'operatore infinitesimale, il gruppo Γ di trasformazioni che lasciano invariante l'equazione si determina dal teorema di Lie e cioè risolvendo il problema di Cauchy

$$\frac{dX}{d\varepsilon}=\xi(X,T,U),\ X(0)=x;\ \ \frac{dT}{d\varepsilon}=\tau(X,T,U),\ T(0)=t;\ \ \frac{dU}{d\varepsilon}=\eta(X,T,U),\ U(0)=u.$$

Nel caso in esame è

$$H\equiv u_{tt}+\lambda u_{xx}-g(u,u_x)$$

e la relazione (2.2), in cui, esplicitando la condizione $H=0$, si ponga $u_{tt}=-u_{xx}+g(u,u_x)$, diviene

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad 0=\{&-g_u\eta-g_p\eta_x+\eta_{tt}+\lambda\eta_{xx}+\eta_u g-2\tau_t g\\ &+p[(\xi_x-\eta_u)g_p-\xi_{tt}+2\lambda\eta_{xu}-\lambda\xi_{xx}-\xi_u g]+p^2[\xi_u g_p-2\lambda\xi_{xu}+\lambda\eta_{uu}]+p^3[-\lambda\xi_{uu}]\}\\ &+q\{[\tau_x g_p+2\tau_{tu}-\tau_{tt}-\lambda\tau_{xx}-3g\tau_u]+p[-2\xi_{tu}+\tau_u g_p-2\lambda\tau_{xu}]+p^2[-\lambda\tau_{uu}]\}\\ &+q^2\{-\xi_{uu}p-2\tau_{tu}+\eta_{uu}\}+q^3\{-\tau_{uu}\}+v\{-2\xi_t-2\lambda\tau_x-2\lambda\tau_u p\}\\ &+qv\{-2\xi_u\}+r\{2\lambda\tau_t-2\lambda\xi_x-2\lambda\xi_u p\}+qr\{2\lambda\tau_u\}\ ,\end{aligned}$$

in cui si sono indicate $p=u_x$, $q=u_t$, $r=u_{xx}$, $v=u_{xt}=u_{tx}$.

La dipendenza da p dei termini tra parentesi graffa è in alcune parentesi nota essendo indipendente dalla scelta di $g(u,p)$, in altre invece è indeterminata essendo legata alle scelte di $g(u,p)$. L'annullarsi identico di (2.4) in q, r, v, dà luogo al sistema di equazioni

$$(2.5)\qquad \tau_u=0 \qquad \xi_u=0 \qquad \tau_t-\xi_x=0 \qquad \lambda\tau_x+\xi_t=0 \qquad \eta_{uu}=0$$

$$(2.6)\qquad \tau_x g_p+2\eta_{tu}=0$$

$$(2.7)\qquad \eta_{tt}+\lambda\eta_{xx}-\eta g_u-\eta_x g_p+g(\eta_u-2\tau_t)+p[g_p(\xi_x-\eta_u)+2\lambda\eta_{xu}]=0\ .$$

Il sistema di equazioni che determina l'operatore infinitesimale è costituito dalle equazioni (2.5) che non contengono p e da quelle che si ottengono imponendo l'annullarsi identico in p delle (2.6) e (2.7).

Le equazioni (2.5), che sono indipendenti dalla funzione g, impongono delle condizioni generali all'operatore infinitesimale; da esse si riconosce che qualunque sia $g(u, p)$, ogni campo vettoriale tangente del gruppo Γ di trasformazioni puntuali ammesse dall'equazione (1.1) deve necessariamente avere la forma seguente

$$\xi = \xi(x, t) \qquad \tau = \tau(x, t) \qquad \eta = a(x, t)u + b(x, t) \tag{2.8}$$

con $a(x, t)$ e $b(x, t)$ funzioni di (x, t), $\xi(x, t)$ e $\tau(x, t)$ legate dalle

$$\xi_t + \lambda\tau_x = 0 \qquad \xi_x - \tau_t = 0\,. \tag{2.9}$$

Tenuto conto delle (2.8), le (2.6) e (2.7) impongono le seguenti ulteriori condizioni in dipendenza della forma della funzione $g(u, p)$

$$\tau_x g_p + 2a_t = 0 \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} g_u(au + b) + g_p(a_x u + b_x) - a_{tt}u - b_{tt} - \lambda(a_{xx}u + b_{xx}) \\ + (2\tau_t - a)g + p[g_p(a - \tau_t) - 2\lambda_{a_x}] = 0\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

3 - Gruppo universale

La determinazione del gruppo universale, cioè degli operatori infinitesimali che lasciano invariata l'equazione per ogni scelta della funzione $g(u, p)$, comporta il verificarsi delle (2.10) e (2.11) per ogni funzione $g(u, p)$. Le equazioni (2.10) e (2.11) sono due equazioni polinomiali nelle variabili u, p, g, g_u, g_p, l'arbitrarietà della funzione g consente di trattare queste variabili come parametri indipendenti, imponendo il verificarsi delle due equazioni identicamente in essi. Per il principio di identità dei polinomi le (2.10) e (2.11) si traducono nelle $\tau_x = \tau_t = 0$, $a = b = 0$. Sussiste pertanto il seguente

Teorema 1. *Gli operatori infinitesimali del gruppo universale (valido cioè per ogni $g(u, p)$) sono*

$$\xi = \nu_1 \qquad \tau = \nu_2 \qquad \eta = 0\,.$$

4 - Gruppi particolari

Per la determinazione delle $g(u,p)$ in corrispondenza alle quali gli operatori infinitesimali particolari (cioé validi per quella particolare $g(u,p)$) costituiscono un insieme più ampio di quello universale, in relazione alla (2.10), essendo $g_p \neq 0$, si riconoscono due possibili eventualità

(4.1) $$\text{I:}\quad \xi=\omega x+\nu_1 \qquad \tau=\omega t+\nu_2 \qquad \eta=a(x)u+b(x,t)\ .$$

(4.2) $$\text{II:}\quad g(u,p)=hp+f(u) \qquad 2a_t/\tau_x=-h=\text{costante}\neq 0\ .$$

I eventualità

La (2.11) assume la forma

(4.3) $$f(u,p,x,t)g_p+h(u,x,t)g_u=k(u,p,g,x,t)$$

con

$$f(u,p,x,t)=a'\,u-(\omega-a)p+b_x \qquad h(u,x,t)=au+b$$

$$k(u,p,g,x,t)=2\lambda a'\,p-(2\omega-a)g+\lambda a''u+b_{tt}+\lambda b_{xx} \qquad a'=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} \qquad a''=\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}x^2}\ .$$

Si osserva che al variare di (x,t) la (4.3) rappresenta una famiglia di ∞^2 equazioni lineari alle derivate parziali nella funzione incognita $g(u,p)$. La possibilità di caratterizzare una $g(u,p)$ in corrispondenza alla quale esista un operatore infinitesimale più ampio di quello universale, si attua se e solo se esistono $g(u,p)$ che verificano ognuna delle suddette equazioni. In particolare da (4.3) in corrispondenza a due coppie $(\bar{x},\bar{t})$ e $(\hat{x},\hat{t})$ si ottengono le due equazioni lineari in g_p e g_u

$$\bar{f}g_p+\bar{h}g_u=\bar{k} \qquad \hat{f}g_p+\hat{h}g_u=\hat{k}\ ;$$

i soprassegni stanno ad indicare che le funzioni f, h, k sono valutate in corrispondenza di $(\bar{x},\bar{t})$ e $(\hat{x},\hat{t})$ rispettivamente. Si riconosce agevolmente, mediante un calcolo diretto, che il determinante dei coefficienti (polinomio in u e p) si annulla identicamente se e solo se sono verificate le relazioni

$$\omega(\bar{a}-\hat{a})=0 \qquad \bar{a}'\,\hat{a}-\hat{a}'\,\bar{a}=0 \qquad \bar{b}_x\hat{b}-\hat{b}_x\bar{b}=0$$

$$\omega(\bar{b}-\hat{b})+\bar{a}\hat{b}-\hat{a}\bar{b}=0 \qquad \bar{a}'\,\hat{b}-\hat{a}'\,\bar{b}-\bar{a}\hat{b}_x+\hat{a}\bar{b}_x=0\ .$$

Vista l'arbitrarietà delle coppie $(\bar{x}, \bar{t})$, $(\hat{x}, \hat{t})$, si ha l'annullarsi identico del determinante dei coefficienti nei seguenti casi

$$\text{(i)}\quad \omega = 0 \quad a = a_0 \exp(kx) \quad b = b_0 \exp(kx), \qquad \text{(ii)}\quad a = \mathrm{cost} \quad b = \mathrm{cost},$$

$$\text{(iii)}\quad a = \omega = 0 \quad b = \tilde{b}(t) \exp(kx), \qquad \text{(iv)}\quad a = \omega \quad b = \tilde{b}(t),$$

con k parametro non nullo e $\tilde{b}(t)$ funzione arbitraria.

Se si esclude il verificarsi di uno dei casi (i), ..., (iv) si ottengono

$$g_p = \frac{\bar{k}\hat{h} - \hat{k}\bar{h}}{\bar{f}\hat{h} - \hat{f}\bar{h}} \qquad g_u = \frac{\hat{k}\bar{f} - \bar{k}\hat{f}}{\bar{f}\hat{h} - \hat{f}\bar{h}}. \tag{4.4}$$

Affinchè esista una $g(u, p)$ che verifichi entrambe le (4.4) e che sia sufficientemente regolare, imponendo l'uguaglianza delle derivate seconde miste si ottiene la relazione

$$K_1(u, p) g + K_2(u, p) = 0 \tag{4.5}$$

con
$$K_1(u, p) = A_0 p + A_1 u^2 + A_2 u + A_3$$

$$K_2(u, p) = (B_0 u + B_1) p^2 + (B_2 u^2 + B_3 u + B_4) p + (B_5 u^3 + B_6 u^2 + B_7 u + B_8),$$

A_i e B_i sono coefficienti determinati in relazione ai coefficienti di u, p, g nelle funzioni $\bar{f}$, $\hat{f}$, $\bar{h}$, $\hat{h}$, $\bar{k}$, $\hat{k}$, che non vengono riportati per ragioni di spazio.

Possono aversi due eventualità: o la (4.5) è identicamente verificata e in questo caso le (4.4) costituiscono un sistema completamente integrabile, o la (4.5) fornisce $g = -K_2/K_1$ che può essere, per opportuni valori dei coefficienti, soluzione di entrambe le (4.4). Un esame diretto delle due eventualità suddette permette di riconoscere che l'annullarsi identico di (4.5) si ha se e solo se si verifica uno dei seguenti casi

$$\text{(v)}\quad \omega = 0 \quad b = 0 \qquad \text{(vi)}\quad \omega = 0 \quad a = \mathrm{cost},$$

$$\text{(vii)}\quad a = \mathrm{cost} \quad b(x, t) = b_0 x + d_0 t^2 + d_1 t + d_2,$$

$$\text{(viii)}\quad a = -\omega x + a_1 \quad b = m(-\omega x + a_1), \qquad \text{(ix)}\quad a = a_0 x + a_1 \quad b = 0.$$

In corrispondenza all'altra eventualità si riconosce che la scelta dei coefficienti A_i e B_i per cui $g = -K_2/K_1$ è soluzione delle (4.4) conduce ad una funzione lineare in u e p e quindi si ricade nell'eventualità II. Si è così dimostrato il

Teorema 2. *Nell'eventualità* I, *condizione necessaria affinchè esistano delle* $g(u,p)$ *con operatori infinitesimali particolari più ampi di quello universale, è che il parametro* ω *e le funzioni* $a(x)$ *e* $b(x,t)$ *verifichino una delle condizioni* (i), ..., (ix).

Si esaminano ora singolarmente le condizioni (i), ..., (ix) individuando le $g(u,p)$ e i corrispondenti operatori particolari. È evidente che nei casi (i), ..., (iv) si otterranno classi di funzioni g che dipendono da funzioni arbitrarie, mentre in corrispondenza ai casi (v), ..., (ix), in accordo con la teoria dei sistemi completamente integrabili, le funzioni g dipenderanno da costanti arbitrarie.

(i) $\omega = 0 \qquad a = a_0 \exp(kx) \qquad b = b_0 \exp(kx)$.

Si assume $a_0 \neq 0$ altrimenti si ottiene un sottocaso di (iii). La $g(u,p)$ è soluzione in questo caso dell'equazione

$$g_p(ka_0 u + kb_0 + a_0 p) + g_u(a_0 u + b_0) = k^2 \lambda (a_0 u + b_0) + a_0 g + 2\lambda a_0 kp$$

e quindi è, posto per brevità $v = a_0 u + b_0$,

$$g(u,p) = \frac{k^2\lambda}{a_0} v \log v - \frac{k^2\lambda}{a_0} v(\log v)^2 + 2\lambda kp \log v + vF(p/v - k \log v/a_0) . \tag{4.6}$$

Si ha quindi il

Teorema 3. *Se* $g(u,p)$ *è del tipo* (4.6) *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \nu_1 \qquad \tau = \nu_2 \qquad \eta = (a_0 u + b_0) \exp(kx) .$$

(ii) $a = \text{costante}, \qquad b = \text{costante}.$

In questo caso $g(u,p)$, dovendo essere soluzione dell'equazione $g_p(\omega - a)p - g_u(au + b) = (2\omega - a)g$, è

$$g(u,p) = p^{(2\omega - a)/(\omega - a)} F(p^{a/(\omega - a)}(au + b)) \qquad \text{se } \omega \neq a \quad a \neq 0 \tag{4.7}$$

$$g(u,p) = (au + b)^{-1} F(p) \qquad \text{se } \omega = a \tag{4.8}$$

$$g(u,p) = \begin{cases} p^2 F[p \exp(\omega u/b)] & \text{per } b \neq 0 \\ p^2 F(u) & \text{per } b = 0 \end{cases} \qquad a = 0 . \tag{4.9}$$

Sussiste pertanto il seguente

Teorema 4. *Per $g(u,p)$ del tipo (4.7) gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \omega x + \nu_1 \qquad \tau = \omega t + \nu_2 \qquad \eta = au + b \qquad \textit{con } \omega \neq a \textit{ e } a \neq 0\,;$$

per $g(u,p)$ del tipo (4.8) gli operatori infinitesimali particolari sono

$$\xi = \omega x + \nu_1 \qquad \tau = \omega t + \nu_2 \qquad \eta = b\,.$$

(iii) $a = \omega = 0 \qquad b = b(t)\exp(kx)$.

Dalla (4.3) si riconosce che deve risultare $b''/b = \beta_0^2 = \text{cost}$ e $g(u,p)$, dovendo essere soluzione dell'equazione $kg_p + g_u = \beta_0^2 + \lambda k^2$, è

$$g(u,p) = u(\beta_0^2 + \lambda k^2) + F(p - ku)\,; \tag{4.10}$$

sussiste pertanto il

Teorema 5. *Per $g(u,p)$ del tipo (4.10) gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \nu_1 \qquad \tau = \nu_2 \qquad \eta = c_0 \exp(kx + \beta_0 t) + c_1 \exp(kx - \beta_0 t)$$

con c_0 e c_1 parametri arbitrari.

(iv) $a = \omega \qquad b = b(t)$.

La (4.3) diviene $g_u(\omega u + b) = b'' - \omega g$, che è verificata se e solo se è $\omega = 0$, $b(t) = c_0 \exp(\beta_0 t) + c_1 \exp(-\beta_0 t)$ e $g(u,p) = \beta_0^2 u + F(p)$ si ottiene quindi il sottocaso di (iii) corrispondente a $k = 0$.

(v) $\omega = 0 \qquad b = 0 \qquad a = a(x)$.

Il sistema (4.4) assume in questo caso la forma

$$g_u = \frac{g}{u} - 2\lambda \frac{p^2}{u^2} + \gamma_1 - \gamma_0 \frac{p}{u} \qquad g_p = \gamma_0 + 2\lambda \frac{p}{u}$$

con $$\gamma_0 = \frac{\lambda(\hat{a}\bar{a}'' - \bar{a}\hat{a}'')}{\bar{a}'\,\hat{a} - \hat{a}'\,\bar{a}} \qquad \gamma_1 = \frac{\lambda(\bar{a}'\,\hat{a}'' - \hat{a}'\,\bar{a}'')}{\bar{a}'\,\hat{a} - \hat{a}'\,\bar{a}}$$

e ammette per soluzione

$$g(u,p) = \gamma_0 p + \lambda \frac{p^2}{u} + \gamma_1 u \log u + cu$$

con c costante arbitraria. Affinchè questa $g(u,p)$ sia soluzione di (2.11) indipendentemente dalla scelta della coppia (x, t) si riconosce che occorre e basta che $a(x)$ sia soluzione di

$$\lambda a'' - \gamma_0 a' - \gamma_1 a = 0 \tag{4.11}$$

e quindi, se $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$, è $a(x) = a_0 x + a_1$, altrimenti è $a(x) = c_0 \exp(\delta_1 x) + c_1 \exp(\delta_2 X)$, δ_1 ed δ_2 radici dell'equazione caratteristica di (4.11).

Si è così riconosciuta la validità del

Teorema 6. *Per* $g(u,p) = \gamma_0 p + \lambda(p^2/u) + \gamma_1 u \log u + cu$ *con* γ_0, γ_1, c *parametri arbitrari, gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \nu_1 \qquad \tau = \nu_{2'} \qquad \eta = (a_0 x + a_1) u \qquad \textit{per } \gamma_0 = \gamma_1 = 0,$$

altrimenti è

$$\xi = \nu_1 \qquad \tau = \nu_{2'} \qquad \eta = u c_0 \exp(\delta_1 x) + c_1 \exp(\delta_2 x)$$

con δ_1 e δ_2 *radici di* $\lambda\delta^2 - \gamma_0\delta - \gamma_1 = 0$.

(vi) $\omega = 0 \qquad a = \text{cost.}$

In questo caso il sistema (4.4) assume la forma

$$g_u = \frac{s_0 p + s_1 g + s_2}{v_0 p + s_1 u + v_1} \qquad g_p = \frac{v_0 g - s_0 u + s_3}{v_0 p + s_1 u + v_1}$$

con: $s_0 = a(\hat{b}_{tt} + \lambda\hat{b}_{xx} - \bar{b}_{tt} - \lambda\bar{b}_{xx}) \qquad s_1 = a(\bar{b}_x - \hat{b}_x)$

$s_2 = \bar{b}_x(\hat{b}_{tt} + \lambda\hat{b}_{xx}) - \hat{b}_x(\bar{b}_{tt} + \lambda\bar{b}_{xx}) \qquad s_3 = \hat{b}(\bar{b}_{tt} + \lambda\bar{b}_{xx}) - \bar{b}(\hat{b}_{tt} + \lambda\hat{b}_{xx})$

$v_0 = a(\hat{b} - \bar{b}) \qquad v_1 = \bar{b}_x\hat{b} - \hat{b}_x\bar{b} \qquad s_0 v_1 + s_2 v_0 - s_3 s_1 = 0$

ed ha come soluzione, se è $s_1 \neq 0$,

$$g(u,p) = (cv_0 - s_0/s_1)\,p + cs_1\,u + cv_1 + s_2/s_1$$

e quindi una funzione lineare in u e p. Anche nei casi $a=0$ o $b_x=$ costante corrispondenti all'annullarsi di s_1 si determina una soluzione lineare in u e p. Si conclude quindi che il caso in esame è sempre un caso particolare dell'eventualità II.

(vii) $a = \text{cost} \qquad b(x,t) = b_0 x + d_0 t^2 + d_1 t + d_2.$

In questo caso il sistema (4.4) diviene

$$g_u = 0 \qquad g_p = \frac{2d_0 - (2\omega - a)\,g}{b_0 - (\omega - a)\,p}$$

e quindi risulta indipendente dalla scelta delle coppie $(\bar{x}, \bar{t})$ e $(\hat{x}, \hat{t})$.

La sua soluzione è

$$g(u,p) = g(p) = c\{b_0 - (\omega - a)p\}^{(2\omega-a)/(\omega-a)} + 2d_0/(2\omega - a) \quad \text{se} \quad \omega \neq a, \quad 2\omega \neq a$$

$$g(u,p) = g(p) = c\ \exp(-\,ap/b_0) + 2d_0/a \quad \text{se} \quad \omega = a$$

$$g(u,p) = g(p) = 2d_0 \log(b_0 + \omega p)/\omega + c \quad \text{se}\ 2\omega = a\ ;$$

il caso $\omega = a = 0$ che porta alla linearità di g rientra nell'eventualità II.

Tenendo conto dell'arbitrarietà dei parametri si riconosce la validità del

Teorema 7. *Se è* $g(u,p) = g(p) = \delta_0 + (\delta_1 + \delta_2 p)^\sigma, \sigma \neq 0, 1,\ \delta_2 \neq 0$, *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \omega x + \nu_1 \qquad \tau = \omega t + \nu_2$$

$$\eta = \omega(2-\sigma)u/(1-\sigma) - \delta_1 \omega x/\delta_2(\sigma - 1) + \delta_0 \omega\sigma t^2/2(\sigma - 1) + d_1 t + d_2;$$

se è $g(u,p) = g(p) = \chi_0 + \chi_1 \exp(\sigma p)\ \sigma \neq 0$, *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \omega x + \nu_1 \qquad \tau = \omega t + \nu_2 \qquad \eta = \omega u - \omega x/\sigma + \omega\chi_0 t^2/2 + d_1 t + d_2\ ;$$

se è $g(u,p) = g(p) = \theta_0 \log(\theta_1 p + \theta_2) + \theta_3$ *con* $\theta_1 \neq 0$, *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \omega x + \nu_1 \qquad \tau = \omega t + \nu_2 \qquad \eta = 2\omega u + \omega\theta_2 x/\theta_1 + \theta_0\, \omega t^2/2 + d_1 t + d_2 \,.$$

(viii) $a = -\,\omega x + a_1 \qquad b = m(-\,\omega x + a_1)$.

Il sistema (4.4) è in questo caso

$$g_u = \frac{2(g + \lambda p)}{p + u + m} \qquad g_p = \frac{g(u - p + m) - 2\lambda p^2}{(u + m)(p + u + m)}$$

e risulta ancora indipendente dalla scelta delle coppie; esso ha come soluzione

$$g(u,p) = 2\lambda p - \lambda(u + m) + c(p + u + m)^2/(u + m).$$

Tenendo conto dell'arbitrarietà di c si ha il

Teorema 8. *Se è* $g(u,p) = 2\alpha p + \alpha(u + m) + (\alpha + \lambda)\, p^2/(u + m)$ *con* α *parametro arbitrario, gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \omega x + \nu_1 \qquad \tau = \omega t + \nu_2 \qquad \eta = (u + m)(-\,\omega x + a_1) \,.$$

(ix) $a = a_0 x + a_1 \qquad b = 0$.

Il sistema (4.4), che anche in questo caso risulta indipendente dalla scelta delle coppie, è

$$g_u = \frac{-\,g(a_0 u + \omega p) + 2\lambda a_0 p^2}{u(-\,a_0 u + \omega p)} \qquad g_p = \frac{2\omega g - 2\lambda a_0 p}{-\,a_0 u + \omega p} \,.$$

Supponendo, per non ricadere in (v) $\omega \neq 0$, la soluzione del sistema è

$$g(u,p) = 2(\lambda a_0/\omega - \omega c a_0)\, p + a_0^2(c - \lambda/\omega^2)\, u + c\omega^2 p^2/u \,.$$

Tenendo conto dell'arbitrarietà di c, si riconosce la validità del

Teorema 9. *Se è* $g(u,p) = \alpha_1 p + \alpha_2 u + \alpha_3 p^2/u$ *con* $\alpha_1^2 + 4\alpha_2(\lambda - \alpha_3) = 0$, *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = \omega x + \nu_1 \qquad \tau = \omega t + \nu_2 \qquad \eta = (-\,2\alpha_2\, \omega x/\alpha_1 + a_1)\, u \,.$$

II eventualità

La (2.11), essendo $g(u,p) = hp + f(u)$ con $h =$ costante, assume la forma

$$-f'(au+b) - h(a_x u + b_x) + (a_{tt} u + b_{tt}) + \lambda(a_{xx} u + b_{xx}) + (a - 2\tau_t)(hp + f)$$
$$+ ph(\tau_t - a) + 2a_x p\lambda = 0$$

e il suo annullarsi identico in p fornisce, tenendo conto che è

$$2a_t + h\tau_x = 0 \ , \tag{4.12}$$

le relazioni

$$-f'(au+b) - h(a_x u + b_x) + b_{tt} + \lambda b_{xx} + f(a - 2\tau_t) = 0 \tag{4.13}$$

$$2\lambda a_x - h\tau_t = 0 \ . \tag{4.14}$$

Al variare di x, t la (4.13) rappresenta una famiglia di ∞^2 equazioni lineari nella funzione $f(u)$; la possibilità di caratterizzare una $f(u)$ in corrispondenza alla quale esista per $g(u,p) = hp + f(u)$ un operatore infinitesimale più ampio di quello universale si attua se e solo se esistono $f(u)$ che verificano ognuna delle equazioni suddette. Analogamente a prima, in corrispondenza a due coppie $(\bar{x}, \bar{t})$ e $(\hat{x}, \hat{t})$, si hanno

$$f'(\bar{a}u + \bar{b}) + f(2\bar{\tau}_t - \bar{a}) = -h(\bar{a}_x u + \bar{b}_x) + \bar{b}_{tt} + \lambda\bar{b}_{xx}$$

$$f'(\hat{a}u + \hat{b}) + f(2\hat{\tau}_t - \hat{a}) = -h(\hat{a}_x u + \hat{b}_x) + \hat{b}_{tt} + \lambda\hat{b}_{xx} .$$

Un'analisi dei casi in cui queste equazioni sono compatibili eseguita tenendo conto delle (2.9), (4.11) e (4.12) e dell'arbitrarietà delle coppie (x, t), porta a riconoscere che sono possibili solamente le seguenti eventualità:

(i)$_1$ $f(u) = c(u + b_0)^\sigma + b_1 u + b_2 \qquad b_1 = -h^2/4\lambda \qquad b_2 = -b_0 h^2/4\lambda$

$a(x,t) = c_1 \exp(\rho x + \rho_1 t) + c_2 \exp(\rho x - \rho_1 t) \qquad \rho_1 = \rho(-\lambda)^{\frac{1}{2}}, \ \rho = h(1-\sigma)/4\lambda$

$b(x,t) = b_0\, a(x,t)$

$\tau(x,t) = -2\rho_1 \{c_1 \exp(\rho x + \rho_1 t) - c_2 \exp(\rho x - \rho_1 t)/h\}$

$\xi(x,t) = 2\lambda a(x,t)/h$.

(i)$_2$ $f(u) = m_0 u + m_1$ (m_0, m_1 parametri generici)

$$a(x, t) = \nu_3 t + \nu_4 \qquad \tau(x, t) = -2\nu_3 x/h + \nu_2$$

$$\xi(x, t) = 2\nu_3 \lambda t/h + \nu_1 \qquad b(x, t) = \tilde{b}(x, t) + m_1(\nu_3 t + \nu_4)/m_0$$

con $\tilde{b}(x, t)$ soluzione di

$$\tilde{b}_{tt} + \lambda \tilde{b}_{xx} - h\tilde{b}_x - m_0 \tilde{b} = 0 \,. \tag{4.15}$$

(i)$_3$ $f(u) = -h^2 u/4\lambda + m_1$

$$a(x,t) = H_1(x + \sqrt{-\lambda}t) + H_2(x - \sqrt{-\lambda}t) \qquad (H_1,\ H_2 \text{ funzioni arbitrarie})$$

$$\tau(x,t) = -2\sqrt{-\lambda}(H_1 - H_2)/h + \nu_2$$

$$\xi(x,t) = 2\lambda(H_1 + H_2)/h + \nu_1$$

con $b(x, t)$ soluzione dell'equazione

$$b_{tt} + \lambda b_{xx} - hb_x + h^2 b/4\lambda + m_1(H_1 + H_2)(1 - 4\lambda/h) = 0 \,. \tag{4.16}$$

(i)$_4$ $f(u) = m_1$ $\qquad a(x, t) = \nu_3 t + \nu_4$

$$\tau(x, t) = -2\nu_3 x/h + \nu_2 \,, \qquad \xi(x, t) = 2\nu_3 \lambda t/h + \nu_1$$

con $b(x, t)$ soluzione di

$$b_{tt} + \lambda b_{xx} - hb_x - m_1(\nu_3 t + \nu_4) = 0 \,. \tag{4.17}$$

Si è così riconosciuta la validità del

Teorema 10 *Se è* $g(u,p) = hp + c(u + b_0)^\sigma - h^2 u/4\lambda - b_0 h^2/4\lambda$, $\sigma \neq 0, 1$ *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = 2\lambda\{c_1 \exp\rho(x + \sqrt{-\lambda}\, t) + c_2 \exp\rho(x - \sqrt{-\lambda}\, t)\}/h + \nu_1 \qquad \rho = h(1-\sigma)/4\lambda$$

$$\tau = -2\sqrt{-\lambda}\,\{c_1 \exp\rho(x + \sqrt{-\lambda}\, t) - c_2 \exp\rho(x - \sqrt{-\lambda}\, t)\}/h + \nu_2$$

$$\eta = h\{\xi(x, t) - \nu_1\}(u + b_0)/2\lambda \,.$$

Se è $g(u,p) = hp + m_0 u + m_1$ *con* h, m_0, m_1 *generici, gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = 2\nu_3 \lambda t/h + \nu_1 \qquad \tau = -2\nu_3 x/h + \nu_2$$

$$\eta = (\nu_3 t + \nu_4) u + \{\tilde{b}(x,t) + m_1(\nu_3 t + \nu_4)\}/m_0$$

con $\hat{b}(x,t)$ *soluzione di* (4.15).

Se è $g(u,p) = hp - h^2 u/4\lambda + m_1$ *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = 2\lambda\{H_1(x + \sqrt{-\lambda}\, t) + H_2(x - \sqrt{-\lambda}\, t)\}/h + \nu_1 \qquad (H_1,\ H_2 \textit{ funzioni arbitrarie})$$

$$\tau = -2\sqrt{-\lambda}\,(H_1 - H_2)/h + \nu_2 \qquad \eta = (H_1 + H_2)\, u + b(x,t)$$

con $b(x,t)$ *soluzione di* (4.16).

Se è $g(u,p) = g(p) = hp + m_1$, *gli operatori infinitesimali particolari sono*

$$\xi = 2\nu_3 \lambda t/h + \nu_1 \qquad \tau = -2\nu_3 x/h + \nu_2 \qquad \eta = (\nu_3 t + \nu_4)\, u + b(x,t)$$

con $b(x,t)$ *soluzione di* (4.17).

I risultati sono riassunti nella seguente tabella nella quale sono state operate alcune modifiche di denominazione per un più agevole confronto.

5 - Alcune proprietà dei gruppi di trasformazione

L'esame della tabella riassuntiva dei risultati ottenuti permette di fare alcune considerazioni sulla struttura dei gruppi di trasformazioni puntuali ammessi dalla (1.1) in relazione alle diverse $g(u, u_x)$.

Si osserva innanzi tutto che se $g(u, u_x)$ è arbitraria, essendo i generatori del gruppo $\mathscr{X}_1 = \partial/\partial t$, $\mathscr{X}_2 = \partial/\partial x$, le sole trasformazioni puntuali ammesse sono traslazioni, lo spazio lineare L_2 generato da $\mathscr{X}_1$ ed $\mathscr{X}_2$ (di dimensione 2) è un'algebra di Lie, essendo chiusa rispetto all'operazione di commutazione.

Oltre al caso in cui è $g(u, u_x)$ arbitraria, si hanno trasformazioni puntuali banali (cioè con operatori infinitesimali lineari) nei casi (3), (4), (5), (6), (7).

Nei casi (2), ..., (16), in cui $g(u, u_x)$ è non lineare, gli spazi lineari L_h individuati dai generatori delle trasformazioni ammesse hanno dimensione finita

TABELLA

$g(u,p)$	$\xi(x,t,u)$	$\tau(x,t,u)$	$\eta(x,t,u)$
(1) arbitraria	ν_1	ν_2	0
(2) $\alpha v \log v - \alpha v(\log v)^2 + \beta p \log v + vF(\beta p/v - 2\alpha \log v)$, $v = \beta^2 u/4\alpha\lambda + \gamma$	ν_1	ν_2	$\nu_3(\beta^2 u + 4\lambda\alpha\gamma)\exp(\beta x/2\lambda)$
(3) $p^\sigma F(p^{\sigma-2}(\alpha u + \beta))$, $\sigma \neq 1$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	$\nu_3(2-\sigma)(u + \beta/\alpha)/(1-\sigma)$
(4) $pF(p^{-1}(\alpha u + \beta))$	ν_1	ν_2	$\nu_3(\alpha u + \beta)$
(5) $(\alpha u + \beta)^{-1} F(p)$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	$\nu_3(u + \beta/\alpha)$
(6) $p^2 F(p \exp(\sigma u))$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	ν_3/σ
(7) $p^2 F(u)$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	0
(8) $\alpha u + F(p - \beta u)$	ν_1	ν_2	$\nu_3 \exp(\beta x + \delta t) + \nu_4 \exp(\beta x - \delta t)$, $\delta = (\alpha - \lambda\beta^2)^{\frac{1}{2}}$
(9) $\alpha p + \lambda p^2/u + \beta u \log u + \gamma u$	ν_1	ν_2	$u\{\nu_3 \exp(x(\alpha+\delta)/2\lambda) + \nu_4 \exp(x(\alpha-\delta)/2\lambda)\}$ $\delta = (\alpha^2 + 4\lambda\beta)^{\frac{1}{2}}$
(10) $\lambda p^2/u + \gamma u$	ν_1	ν_2	$(\nu_3 x + \nu_4)u$
(11) $2\alpha p + \alpha(u+\beta) + p^2(\alpha+\lambda)/(u+\beta)$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	$(u+\beta)(-\nu_3 x + \nu_4)$
(12) $\alpha p + \beta u + \gamma p^2/u$, $\alpha^2 + 4\beta(\lambda - \gamma) = 0$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	$u(-2\beta\nu_3 x/\alpha + \nu_4)$
(13) $\alpha + (\beta p + \gamma)^\sigma$ $\sigma \neq 1$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	$u\nu_3(\sigma-2)/(\sigma-1) - \gamma\nu_3 x/\beta(\sigma-1) + \alpha\sigma\nu_3 t^2/2(\sigma-1) + \nu_4 t + \nu_5$
(14) $\alpha + \beta \exp(\sigma p)$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	$\nu_3 u - \nu_3 x/\sigma + \alpha\nu_3 t^2/2 + \nu_4 t + \nu_5$
(15) $\alpha \log(\beta p + \gamma) + \delta$	$\nu_1 + \nu_3 x$	$\nu_2 + \nu_3 t$	$2\nu_3 u + \gamma\nu_3 x/\beta + \alpha\nu_3 t^2/2 + \nu_4 t + \nu_5$
(16) $\alpha p + \beta(u+\gamma)^\sigma - \alpha^2 u/4\lambda - \gamma\alpha^2/4\lambda$, $\sigma \neq 1$	$\nu_1 + 2\lambda \cdot \{\nu_3 \exp(\rho(x + \sqrt{-\lambda}\, t)) + \nu_4 \exp(x - \sqrt{-\lambda t})\}/\alpha$	$\nu_2 - 2\sqrt{-\lambda} \cdot \{\nu_3 \exp(\rho(x + \sqrt{-\lambda}\, t)) - \nu_4 \exp(\rho(x - \sqrt{-\lambda t})\}/\alpha$	$(u+\gamma)\{\nu_3 \exp(\rho(x + \sqrt{-\lambda}\, t) + \nu_4 \exp\rho(x - \sqrt{-\lambda t})\}$ $\rho = \alpha(1-\sigma)/4\lambda$
(17) $\alpha p + \beta u + \gamma$	$\nu_1 + 2\nu_3 \lambda t/\alpha$	$\nu_2 - 2\nu_3 x/\alpha$	$(\nu_3 t + \nu_4)u + \{\bar{b}(x,t) + \gamma(\nu_3 t + \nu_4)\}/\beta$ (*)
(18) $\alpha p + \gamma$	$\nu_1 + 2\nu_3 \lambda t/\alpha$	$\nu_2 - 2\nu_3 x/\alpha$	$(\nu_3 t + \nu_4)u + b(x,t)$ (**)
(19) $\alpha p - \alpha^2 u/4\lambda + \beta$	$\nu_1 + 2\lambda\{H_1(x + \sqrt{-\lambda t}) + H_2(x - \sqrt{-\lambda t}\}/\alpha$	$\nu_2 - 2\sqrt{-\lambda}(H_1 - H_2)/\alpha$	$(H_1 + H_2)u + b(x,t)$ (***)

(*) $\bar{b}(x,t)$ soluzione di (4.15)
(**) $b(x,t)$ soluzione di (4.17)
(***) $b(x,t)$ soluzione di (4.16) ed H_1 e H_2 funzioni arbitrarie dei loro argomenti.

$h > 2$ e contengono ovviamente L_2 come sottospazio. In particolare si riconosce che

$$h = 3 \qquad \text{nei casi} \qquad (2), (3), (4), (5), (6), (7);$$

$$h = 4 \qquad \text{nei casi} \qquad (8), (9), (10), (11), (12), (13);$$

$$h = 5 \qquad \text{nei casi} \qquad (14), (15), (16).$$

Dalle tavole dei commutatori si riconosce che tutti gli spazi sono algebre di Lie.

Nei casi (17), (18), (19), in cui per la particolare scelta di $g(u, u_x)$ l'equazione (1.1) è lineare, gli operatori infinitesimali dipendono da funzioni arbitrarie oltre che da parametri arbitrari; gli spazi lineari L hanno dimensione infinita e sono costruiti come somma diretta di spazi L_h di dimensione finita (in relazione al numero dei parametri arbitrari) e di spazi L_∞ di dimensione infinita (in relazione alle funzioni arbitrarie) $L = L_h \oplus L_\infty$.

Nel caso (17) i generatori di L_h sono

$$\mathscr{X}_1 \qquad \mathscr{X}_2 \qquad \mathscr{X}_3 = 2\lambda t/\alpha \frac{\partial}{\partial x} - 2x/\alpha \frac{\partial}{\partial t} + tu \frac{\partial}{\partial u} + t\gamma/\beta \frac{\partial}{\partial u} \qquad \mathscr{X}_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + \gamma/\beta \frac{\partial}{\partial u}$$

e quindi è $h = 4$, mentre L_∞ è individuato da

$$\hat{b}(x, t)/\beta \frac{\partial}{\partial u} \qquad \text{con } \hat{b}(x, t) \text{ soluzione di (4.15)} .$$

Nel caso (18) i generatori di L_h sono

$$\mathscr{X}_1 \qquad \mathscr{X}_2 \qquad \mathscr{X}_3 = 2\lambda t/\alpha \frac{\partial}{\partial x} - 2x/\alpha \frac{\partial}{\partial t} + tu \frac{\partial}{\partial u} \qquad \mathscr{X}_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

e quindi è $h = 4$, mentre L_∞ è individuato da $b(x, t)(\partial/\partial u)$ con $b(x, t)$ soluzione di (4.17).

Nel caso (19) infine $h = 2$ e L_∞ è individuato da

$$2\lambda(H_1 + H_2)/\alpha \frac{\partial}{\partial x} - 2\sqrt{-\lambda}(H_1 - H_2)/\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \{(H_1 + H_2)\, u + b(x, t)\} \frac{\partial}{\partial u}$$

con $b(x, t)$ soluzione di (4.16).

Bibliografia

[1] S. C. CHIKWENDU, *Nonlinear wave propagation solutions by Fourier transforms perturbation*, Internat. J. Non-Linear Mech. **16** (2) (1981), 117-128.

[2] T. M. NETESOVA, *Group analysis of onedimensional equation of parabolic type with a polinomial nonlinearity,* Nonlinear differential equations in applied problems, Izdanie Inst. Math. Akad. Nauk. Ukrain. SSR Kiev (1977), 114-120, 215-216.

[3] L. V. OVSIANNIKOV, *Group analysis of differential equation,* W. F. Ames, Academic Press ed., New York, 1982.

[4] E. PUCCI and M. C. SALVATORI, *Group properties of a class of semilinear hyperbolic equation,* Internat. J. Non-Linear Mech. (2) 21 (1986), 147-155.

Summary

A sistematic investigation of invariance properties under a one-parameter Lie group is given for the $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ *equation with arbitrary* $g(u, u_x)$.

* * *