Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 9-17

GIOVANNA REMORINI (*)

Sulla sovrapponibilità di moti in magnetofluidodinamica (**)

A Bianca Manfredi per il suo 70° compleanno

1 - Introduzione

Si considera nell'ambito della magnetofluidodinamica (MFD) un fluido incomprimibile, omogeneo, *viscoso* (stokesiano-lineare), dotato di *conducibilità elettrica finita*, soggetto a forze di massa non elettromagnetiche conservative e per il quale si tiene conto dell'*effetto Hall.*

Per un tale fluido in 2 si scrive la condizione necessaria e sufficiente per la sovrapponibilità tra due moti, valida sia nel caso stazionario che in quello non stazionario, dando così un *criterio di sovrapponibilità tra soluzioni delle equazioni non lineari* (MFD) *e contemporaneamente un modo di determinare nuove soluzioni esatte di dette equazioni.*

Il concetto di sovrapponibilità è stato formalizzato per la prima volta in idrodinamica nel 1940 da Ballabh (1), anche se studi sull'argomento erano già stati fatti per esempio da Kampé de Feriét, Berker ed è stato (2) ed è tuttora oggetto di indagine (cfr. $[12]_{2,3}$, [15]).

Tale concetto è stato poi esteso alla MFD da Kapur [8] e da Bhatnagar [2] ed è stato ed è tuttora oggetto di studio (cfr. [10], [11]).

In tutti i lavori di sovrapponibilità in MFD a conoscenza dell'autrice è stato

(*) Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università di Pisa, Via Diotisalvi 2, I-56100 Pisa.

(**) Ricevuto: 13-I-1986.

(1) cfr. anche Truesdell [14].

(2) Per un'ampia bibliografia cfr. $[12]_{2,3}$.

sempre trascurato l'effetto Hall e sono stati esaminati solo i casi di moti piani o di moti assialsimmetrici.

Nel presente lavoro, oltre a mettere in luce il ruolo svolto dall'effetto Hall sulla sovrapponibilità di due moti MFD, si generalizzano alcuni risultati trovati in precedenti lavori e si danno nuove soluzioni. Precisamente in 3 si esamina la sovrapponibilità di «moti alla Chandrasekhar» di preciso interesse MFD e si dà un'ampia esemplificazione; in 4 si esamina una classe di moti, anch'essi di preciso interesse MFD, per i quali risulta $\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ (essendo $\boldsymbol{B}$ il vettore induzione magnetica, $\boldsymbol{\omega}$ il vortice e λ una costante dipendente dal coefficiente di Hall) e si fornisce così una classe nuova di moti sovrapponibili; in 5 infine si esamina la sovrapponibilità tra moti MFD con campi di velocità irrotazionali, generalizzando risultati ottenuti per esempio in [2].

2 - Criterio di sovrapponibilità tra due moti MFD

Le equazioni non lineari MFD (in unità di Gauss) per il fluido di cui all'introduzione sono

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} + \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \operatorname{rot}\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) + \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B} + \beta \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \tag{2.2}$$

$$0 = \operatorname{div}\boldsymbol{v} \tag{2.3}$$

$$0 = \operatorname{div}\boldsymbol{B} \tag{2.4}$$

essendo ν, μ, ν_m rispettivamente i coefficienti (costanti) di viscosità cinematica, di permeabilità magnetica e di viscosità magnetica, c la velocità della luce nel vuoto, $\beta = \beta_H c^2/4\pi\mu$ con β_H coefficiente di Hall.

Considerando il rotore di ambo i membri della (2.1) si ottiene l'*equazione di compatibilità*

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B}) . \tag{2.5}$$

Se $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{B}_1)$ e $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{B}_2)$ sono due moti MFD, cioè due soluzioni solenoidali delle (2.2) e (2.5), condizione necessaria e sufficiente affinché i due moti MFD siano *sovrapponibili*, cioè affinché $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2)$ sia ancora soluzione solenoidale delle (2.2) e (2.5), è che siano verificate le due relazioni

$$0 = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{4\pi\mu\rho}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{B}_1 \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_2 \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_1) \tag{2.6}$$

$$0 = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{B}_1) + \beta\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{B}_1 \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_2 \wedge \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_1)\,. \tag{2.7}$$

La (2.6) si può anche scrivere ($\beta \neq 0$)

$$0 = \mathrm{rot}\,[(\boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{4\pi\mu\rho\beta}\boldsymbol{B}_1) \wedge \boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{\omega}_2 + \frac{1}{4\pi\mu\rho\beta}\boldsymbol{B}_2) \wedge \boldsymbol{v}_1]\,. \tag{2.8}$$

Si osservi che nelle (2.6) e (2.7), che esprimono la condizione di sovrapponibilità, non entra esplicitamente il valore di ν e ν_m, mentre ha un ruolo esplicito il coefficiente β: segue da qui, tra l'altro, che non tutti i moti universali ([3]) sono sovrapponibili.

In particolare dalle (2.6) e (2.7) ponendo $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}$ si ha il criterio di autosovrapponibilità; mentre ponendo $\beta = 0$ si ha la condizione di sovrapponibilità in assenza di effetto Hall (cfr. [2]).

Si osservi che (come già in idrodinamica, cfr. $[12]_2$) in generale la pressione p corrispondente al moto MFD ($\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$) sarà diversa da $p_1 + p_2$, essendo p_1 e p_2 rispettivamente le pressioni corrispondenti ai moti ($\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{B}_1$) e ($\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{B}_2$).

3 - Moti alla Chandrasekhar (o di equipartizione)

Soluzione particolare della (2.6) è $\boldsymbol{B}_i = \pm 2\sqrt{\pi\mu\rho}\,\boldsymbol{v}_i$ ($i = 1,\ 2$) ([4]). Per la classe dei moti MFD del tipo ($\boldsymbol{v}$, $\pm 2\sqrt{\pi\mu\rho}\,\boldsymbol{v}$) le equazioni di base (2.2) e (2.5) cui deve soddisfare il campo solenoidale $\boldsymbol{v}$ ([5]) e la condizione di sovrapponibilità (2.7) si

---

([3]) Per la nozione di «moti universali in idrodinamica» cfr. per es. [4] ed in MFD cfr. per es. $[12]_1$.

([4]) Tali *moti* sono qui detti *alla Chandrasekhar* (o *di equipartizione*) dal nome dell'autore che per primo in $[3]_1$ osservò che ($\boldsymbol{v}$, $\pm 2\sqrt{\pi\mu\rho}\,\boldsymbol{v}$) sono, qualunque sia $\boldsymbol{v}$, soluzioni esatte stazionarie delle equazioni non lineari MFD (di un fluido non viscoso, incomprimibile, con conduttività elettrica infinita ed in assenza di effetto Hall) e ne dimostrò la stabilità; per tali moti in ogni punto le densità di energia cinetica e magnetica sono uguali (equipartizione dell'energia) (cfr. anche $[3]_2$, 157-158).

([5]) Per la classe dei moti in esame la solenoidalità di $\boldsymbol{v}$ assicura ovviamente la solenoidalità di $\boldsymbol{B}$.

scrivono rispettivamente

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{v} \pm 2\beta\sqrt{\pi\mu\rho}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{3.1}$$

$$0 = \beta\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_1)\,. \tag{3.2}$$

Sono quindi sovrapponibili due qualsiasi moti se $\beta = 0$, mentre per $\beta \neq 0$ sono sovrapponibili due moti che soddisfano la (3.2) che è analoga alla condizione di sovrapponibilità tra due moti idrodinamici (per es. cfr. $[12]_2$). Tale risultato generalizza quanto trovato per esempio in [2] in assenza di effetto Hall e limitatamente ai casi in cui $\boldsymbol{v}$ (e quindi $\boldsymbol{B}$) sia piano od assialsimmetrico.

Nel caso stazionario, escludendo le soluzioni irrotazionali $\boldsymbol{\omega}_i = 0$ $(i = 1,\ 2)$ di poco interesse in quanto in tal caso risulta $\mathrm{rot}\boldsymbol{B}_i = 0$ e quindi la forza magnetica nulla [6], si riconosce facilmente che:

(a) Per $\beta = 0$ sono sovrapponibili due qualsiasi moti con $\nabla^2 \boldsymbol{v} = 0$ (uniche soluzioni delle (3.1) per $\beta = 0$ e $\nu_m \neq 0$), quindi in particolare: i moti piani tali che $\nabla^2 \psi = \mathrm{cost}$, $\psi(x,\ y)$ essendo la funzione di corrente (uniche soluzioni piane di $\nabla^2 \boldsymbol{v} = 0$); i moti di rivoluzione con $D^2 \psi = \mathrm{cost}$ essendo $\psi(r,\ z)$ la funzione di corrente in coordinate cilindriche $r,\ \theta,\ z$ e $D^2\psi = -(1/r)\cdot(\partial\psi/\partial r) + \partial^2\psi/\partial r^2 + \partial^2\psi/\partial z^2$ (uniche soluzioni assialsimmetriche di $\nabla^2 \boldsymbol{v} = 0$); i moti spaziali per cerchi concentrici su ogni piano $z = \mathrm{cost}$

$$\boldsymbol{v} = (z(d_1 r + d_2/r) + c_1 r + c_2/r)\,\boldsymbol{e}_\theta\,.$$

Segue in particolare che tra i moti alla Chandrasekhar vi è anche un moto con $\boldsymbol{v}$ (e $\boldsymbol{B}$) per eliche circolari di Strakhovitch, sovrapposizione di un moto di rivoluzione per rette parallele (all'asse z) con un moto piano (ortogonale a z) per cerchi concentrici.

(b) Per $\beta \neq 0$ si constata che le equazioni di base (3.1) ammettono come soluzioni nel caso piano solo i moti con $\nabla^2 \psi$ costante (come per $\beta = 0$), nel caso assialsimmetrico solo il moto di rivoluzione per rette parallele con $D^2 \psi$ costante.

---

(6) Al fine di determinare nuove soluzioni della classe di moti in esame può essere interessante studiare la sovrapposizione di un moto vorticoso $(\boldsymbol{\omega}_1 \neq 0)$ con un moto non vorticoso $(\boldsymbol{\omega}_2 = 0)$.

La (3.2) indica poi che sono sovrapponibili: due moti piani per rette parallele (a rotore costante) (cfr. [12]$_2$) tali che $\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2 \neq 0$, affinché sia $\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2) \neq 0$; un moto piano per rette parallele e un moto piano per cerchi concentrici entrambi a rotore costante (cfr. [12]$_2$) con $\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2 \neq 0$; due moti piani per cerchi concentrici, di centri O_1 e O_2 qualsiasi, entrambi a rotore costante (cfr. [12]$_2$) con $\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2 \neq 0$; un qualsiasi moto di rivoluzione per rette parallele (all'asse z) ed uno per cerchi concentrici (ortogonale a z e a rotore costante) (cfr. [12]$_2$).

4 - Moti MFD del tipo $(\boldsymbol{v},\ -4\pi\mu\rho\beta\boldsymbol{\omega})$

Soluzione particolare della (2.8) è $\boldsymbol{B}_i=-4\pi\mu\rho\beta\boldsymbol{\omega}_i$ $(i=1,\ 2)$ (7); in tal caso le equazioni di base (2.1) e (2.2) cui deve soddisfare il campo solenoidale $\boldsymbol{v}$ (8) si scrivono

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\nu\nabla^2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}+\operatorname{grad}\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+4\pi\mu\rho\beta^2\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\operatorname{rot}\left((\boldsymbol{v}+4\pi\mu\rho\beta^2\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega})\wedge\boldsymbol{\omega}\right)+\nu_m\nabla^2\boldsymbol{\omega}\,. \tag{4.2}$$

Considerando il rotore di ambo i membri della (4.1) e sottraendo da questa membro a membro la (4.2) si ha

$$0=(\nu-\nu_m)\nabla^2\boldsymbol{\omega}\,. \tag{4.3}$$

Dalla (2.6) o dalla (2.7) segue che la condizione di sovrapponibilità tra due moti del tipo $(\boldsymbol{v},\ -4\pi\mu\rho\beta\boldsymbol{\omega})$ si scrive

$$0=\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{\omega}_1\wedge(\boldsymbol{v}_2+4\pi\mu\rho\beta^2\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}_2)+\boldsymbol{\omega}_2\wedge(\boldsymbol{v}_1+4\pi\mu\rho\beta^2\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}_1)\right)\,. \tag{4.4}$$

---

(7) È noto che in presenza di effetto Hall per un fluido non viscoso e perfetto conduttore dell'elettricità si ha l'effetto di «congelamento» delle linee di flusso di $\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}+4\pi\mu\rho\beta\boldsymbol{\omega}$, detto «campo magnetico modificato» (cfr. [5], [9]), mentre tale effetto non si verifica in generale per le linee di flusso del campo magnetico $\boldsymbol{B}$. È interessante notare che per la classe dei moti MFD $(\boldsymbol{v},\ -4\pi\mu\rho\beta\boldsymbol{\omega})$ presi qui in esame risulta $\tilde{\boldsymbol{B}}=0$.

(8) La solenoidalità di $\boldsymbol{\omega}$ assicura quella di $\boldsymbol{B}$.

Escludendo le soluzioni banali $\omega_i = 0$, $v_i = -4\pi\mu\rho\beta^2 \operatorname{rot} \omega_i$, $\omega_i = \text{cost}$ $(i = 1, 2)$ (9), distinguiamo i casi $\nu \neq \nu_m$ e $\nu = \nu_m$.

(a) Se $\nu \neq \nu_m$ necessariamente dalla (4.3) si ha $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$.

Nel caso piano permanente le (4.2) e (4.3) ammettono come uniche soluzioni i moti piani per rette parallele, i moti per cerchi concentrici e i moti a rotore costante (cfr. [7]) e la (4.4) è analoga alla condizione di sovrapponibilità tra moti piani in idrodinamica (cfr. la (3.2) di $[\mathbf{12}]_2$). Valgono pertanto i risultati di $[\mathbf{12}]_2$ (n. 3) ma i soli casi di interesse per la classe dei moti MFD in esame, dovendo essere $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \neq \mathbf{cost}$ $(\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) \neq 0)$, sono la sovrapposizione di due moti per rette tra loro parallele e di due moti per cerchi concentrici aventi lo stesso centro (10).

Nel caso di moti di rivoluzione permanenti si riconosce che *sono sovrapponibili due qualsiasi moti con* $D^2\psi_i = h_i r^2$ $(i = 1, 2)$, $h_1 + h_2 \neq 0$, per esempio sono sovrapponibili i due moti MFD (11)

$$(4.5) \qquad \boldsymbol{v} = -2A(rz\,\boldsymbol{e}_r + (a^2 - 2r^2 - z^2)\,\boldsymbol{k}) \qquad \boldsymbol{B} = 40\pi\mu\rho\beta A r \boldsymbol{e}_\theta$$

$$(4.6) \qquad \boldsymbol{v} = (A_1 r + A_2/r)\,\boldsymbol{e}_r - (2A_1 z + 2C + 4Dr^2)\,\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{B} = -32\pi\mu\rho\beta D r \boldsymbol{e}_\theta$$

con $5A - 4D \neq 0$.

Si riconosce anche che per la classe dei moti in esame sono ammessi moti con $\boldsymbol{v}$ *moto di Strakhovitch* per eliche circolari

$$(4.7) \qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{v} = (A_2/r + C_2 r + D_2 r \log r)\,\boldsymbol{e}_\theta - (4A_1 r^2 + 2C_1 \log r + D_1)\,\boldsymbol{k} \\ &\boldsymbol{B} = -4\pi\mu\rho\beta[(8A_1 r + 2C_1/r)\,\boldsymbol{e}_\theta + (2C_2 + 2D_2 \log r + D_2)\,\boldsymbol{k}] \end{aligned}$$

(D_2 e A_1 non contemporaneamente nulle), sovrapposizione di un moto di rivoluzione per rette parallele e di un moto per cerchi concentrici.

---

(9) Al fine di determinare nuove soluzioni della classe dei moti in esame può essere interessante studiare la sovrapponibilità di un moto non vorticoso $(\boldsymbol{\omega}_1 = 0)$ ed uno vorticoso $(\boldsymbol{\omega}_2 \neq 0)$.

(10) In particolare si ha che i moti $(\boldsymbol{v}, -4\pi\mu\rho\beta\boldsymbol{\omega})$ con $\boldsymbol{v}$ piano per rette parallele o per cerchi concentrici sono autosovrapponibili.

(11) Si noti che il campo cinetico della (4.5) ha un preciso interesse idrodinamico in quanto caratterizza i ben noti *moti di Hill*, e che il campo cinetico della (4.6) è la sovrapposizione di un moto per rette parallele di Poiseuille e di un moto di rivoluzione irrotazionale (cfr. nota (9)).

(b) Se $\nu = \nu_m$ ([12]), la (4.3) è identicamente verificata; pertanto, oltre ai risultati ottenuti in (a) (per i quali è $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$), si riconosce che esistono anche soluzioni con $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \neq 0$, per esempio sono ammessi i moti MFD:

$$\boldsymbol{v} = \nu a \boldsymbol{i} - (de^{ax} + 2bx + d_1)\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{B} = 4\pi\mu\rho\beta(dae^{ax} + 2b)\,\boldsymbol{k} \tag{4.8}$$

($d \neq 0$, $a \neq 0$) con $\boldsymbol{v}$ sovrapposizione di un moto $\boldsymbol{v}_1$ per rette parallele (ad y) a rotore costante con un *moto* $\boldsymbol{v}_2$ *alla Jeffery* ($\nabla^2 \psi_2 = f(x)$, cfr. [**1**], 40);

$$\boldsymbol{v} = -2\nu/r\boldsymbol{e}_r - [(2c/r)\log r + a/r]\,\boldsymbol{e}_\theta \qquad \boldsymbol{B} = 8\pi\mu\rho\beta c/r^2\,\boldsymbol{k} \qquad (c \neq 0) \tag{4.9}$$

con $\boldsymbol{v}$ sovrapposizione di un moto per cerchi concentrici a rotore costante con un *moto di Hamel* ($\nabla^2 \psi_2 = f(r)$, cfr. [**1**], 41);

$$\boldsymbol{v} = -2\nu/r\,\boldsymbol{e}_r - (c/r^2 + 4dr^2 + 2a)\,\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{B} = -4\pi\mu\rho\beta(8dr - 2c/r^3)\,\boldsymbol{e}_\theta \ (c \neq 0) \tag{4.10}$$

con $\boldsymbol{v}$ sovrapposizione di un moto di rivoluzione per rette parallele con $D^2\psi_1 = hr^2$ e di un *moto di Strakhovitch* ($D^2\psi_2 = f(r)$, cfr. [**1**], 55).

Per brevità ci siamo limitati a riportare le soluzioni più semplici ma che dessero moti MFD significativi.

5 - Moti non vorticosi in MFD

Si osservi che, mentre nel caso idrodinamico due moti irrotazionali sono sempre sovrapponibili, nel caso MFD due moti $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{B}_1)$ e $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{B}_2)$ con $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = 0$ sono sovrapponibili se e solo se

$$0 = \operatorname{rot}(\boldsymbol{B}_1 \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_2 \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{B}_1) \tag{5.1}$$

$$0 = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{B}_1) \tag{5.2}$$

come si riconosce ponendo $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = 0$ nelle (2.6) e (2.7).

Le (5.1) e (5.2) valgono qualunque sia β.

Per la classe dei moti in esame ($\boldsymbol{\omega} = 0$) le equazioni di base (2.2) e (2.5) si

---

([12]) Tale situazione è di effettivo interesse fisico in quanto corrisponde al valore uno del numero di Prandtl magnetico (per es. cfr. [**6**], 154; [**13**], 257).

scrivono rispettivamente

$$(5.3) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) + \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B} \qquad\qquad (5.4) \qquad 0 = \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B})$$

quindi la forza magnetica per unità di volume è necessariamente conservativa. Ci limiteremo come nei numeri precedenti ai moti stazionari.

Se $\boldsymbol{B}_i = B_i(x, y)\boldsymbol{k}(i = 1, 2)$ (13), la (5.1) è identicamente verificata poiché risulta $\boldsymbol{B}_1 \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_2 \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B}_1 = \operatorname{grad}(\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2)$. Dalla (5.2) si riconosce per esempio che sono sovrapponibili i moti:

$$\boldsymbol{v}_1 = c\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{B}_1 = (Ay + C)\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{v}_2 = d\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{B}_2 = (Dx + E)\boldsymbol{k} \qquad \text{se } Dc + Ad = 0 \; ,$$

$$\boldsymbol{v}_1 = c/r\, \boldsymbol{e}_r \quad \boldsymbol{B}_1 = (A\theta + C)\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{v}_2 = d/r\, \boldsymbol{e}_\theta \quad \boldsymbol{B}_2 = (D \log r + E)\boldsymbol{k} \quad \text{se } Ad + Dc = 0 \; .$$

Esaminando i casi in cui $\boldsymbol{B}$ sia piano o di rivoluzione, si riconosce che per esempio sono sovrapponibili i moti MFD:

$$\boldsymbol{v}_1 = b/r\, \boldsymbol{e}_\theta \qquad \boldsymbol{B}_1 = (Ar + C/r)\, \boldsymbol{e}_\theta \qquad \boldsymbol{v}_2 = \nu_m/r\, \boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{B}_2 = (Dr + E)\, \boldsymbol{e}_\theta \qquad \text{se } C = 0 \; ,$$

$$\boldsymbol{v}_1 = b/r\, \boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{B}_1 = A/r\, \boldsymbol{e}_r + Cr\, \boldsymbol{e}_\theta \qquad \boldsymbol{v}_2 = \nu_m/r\, \boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{B}_2 = (Dr + E)\, \boldsymbol{e}_\theta \qquad \text{se } E = 0 \; ,$$

$$\boldsymbol{v}_1 = b/r\, \boldsymbol{e}_\theta \qquad \boldsymbol{B}_1 = (A \log r + C)\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{v}_2 = d\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{B}_2 = (D \log r + E)\boldsymbol{k} \; .$$

Bibliografia

[1] R. BERKER, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, band VIII/2 (1963), 1-384.

[2] P. BHATNAGAR, *Superposability and harmonic analysis of a viscous liquid in the presence of magnetic field*, Calcutta Math. Soc. Golden Jubilee Commemorat Vol. Part I (1958-1959), 205-216.

[3] S. CHANDRASEKHAR: [•]$_1$ *On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42 (1956), 273-276; [•]$_2$ *Hydro-dynamics and hydromagnetic stability*, University Press, Oxford, 1961.

---

(13) La (5.4) è identicamente verificata per entrambi i moti e dalla (5.3) si ha che i relativi campi cinetici (irrotazionali) sono necessariamente della forma $\boldsymbol{v}_i = \operatorname{grad} \psi_i(x, y) + (a_i z + b_i)\boldsymbol{k}$, $\nabla^2 \psi_i + a_i = 0$ per la solenoidalità di $\boldsymbol{v}_i$.

[4] R. FOSDICK and C. TRUESDELL, *Universal flows in the simplest theories of fluids*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 4 (1977), 323-341.

[5] C. GIMBLETT and D. ALLAN, *The electromotive force generated by driven plasma motions*, J. Plasma Physics **16** (1976), 389-398.

[6] W. HUGHES and F. YOUNG, *The electromagnetodynamics of fluids*, Wiley, 1966.

[7] J. KAMPÉ DE FERIÉT, *Sur quelques cas d'intégration des équations du movement plane d'une fluide visqueux incompressible*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles (A) **50** (1930), 77-80.

[8] J. KAPUR, *Superposability in Magnetohydrodynamics*: (I) Appl. Sci. Res. Section A 8 (1959), 198-208; (II) Appl. Sci. Res. Section A **9** (1960), 139-147.

[9] G. MATTEI, *Qualche contributo alla Meccanica dei fluidi elettroconduttori con effetto Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 293-301.

[10] P. MITTAL, *A note on steady laminar magnetohydrodynamic flow*, Bull. Calcutta Math. Soc. **73** (1981), 179-184.

[11] A. RAKHIMOV, *One class of magnetohydrodynamic flow*, Magnetohydrodynamics **16** (1980), 54-58.

[12] G. REMORINI: $[\bullet]_1$ *Sui moti universali in Magnetofluidodinamica*, Note Mat. **II** (1982), 189-212; $[\bullet]_2$ *Sulla sovrapponibilità dei moti idrodinamici*, Rend. Mat. (7) 3 (1983), 239-248; $[\bullet]_3$ *Ancora sulla sovrapponibilità dei moti idrodinamici*, Boll. Un. Mat. Ital. Suppl. 2 (1983), 173-185.

[13] P. ROBERTS, *An introduction to Magnetohydrodynamics*, Longmans, London, 1967.

[14] C. TRUESDELL, *The Kinematics of vorticity*, Indiana University Press, Bloomington, 1954.

[15] W. YIN, *Plane hydrodynamics flows with steady vorticity: a reduction theorem*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **35** (1984), 430-434.

Summary

The impact of the Hall effect on the superposability of two MFD *motions for an homogeneous, viscous, incompressible, electrically-conducting fluid is considered.*

Stated the necessary and sufficient superposability condition, three classes of MFD *motions are examined and some exact solutions are given.*

***