Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 29-41

DOMENICO FRENI (*)

Sur les hypergroupes de type U et sous-hypergroupes engendrés par un sous-ensemble (**)

Introduction

Ce travail est constitué essentiellement de deux sujets. Dans le premier paragraphe on continue l'étude des hypergroupes de type U, déjà introduits dans $[5]_1$, en determinant aussi des relations existantes avec la classe des hypergroupes quotients (voir Théorème 1.1).

En autre on trouve une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergroupe quotient H/h soit commutatif (h étant un sous-hypergroupe inversible à droite dans H), en améliorant ainsi quelques résultats déjà démontrés dans $[5]_1$.

Dans le deuxième paragraphe il est traité le problème des sous-hypergroupes engendrés par les parties non vides d'un hypergroupe donné, et on trouve des hypergroupes pour lesquels l'ensemble des parties stables non vides coïncides avec l'ensemble des sous-hypergroupes, en donnant aussi des exemples (hypergroupe de type U finis et join space associés a une géometrie projective (S, T)).

Notations et rappels

Dans tout ce travail H designe un hypergroupe et h un sous-hypergroupe de H.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Informatica e Sistematica, Università, Via Zanon 6, I-33100 Udine.

(**) Lavoro eseguito nel periodo di godimento di una borsa di studio per l'estero del C.N.R. – Ricevuto: 8-IV-1986.

Un sous-hypergroupe h de H est dit *clos à droit* (resp. *gauche*) dans H s'il verifie l'égalité $(H-h)h=(H-h)$ (resp. $h(H-h)=(H-h)$) et il est dit *inversible à droite* (resp. *gauche*) dans H, si, pour tout couple $(x, y) \in H^2$, $x \in yh$ implique $y \in xh$ (resp. $x \in hy$ implique $y \in hx$) et que h est *centralement inversible* si $x \in hyh$ implique $y \in hxh$. Un sous-hypergroupe inversible à droite et à gauche est dit *inversible*.

Il est clair que si h est inversible à droite (resp. gauche) la famille des classes à droite xh (resp. gauche hx) de H modulo h forme une partition de H et aussi la famille des doubles classes hxh si h est centralement inversible dans H. Ces deux familles seront notées $H_{/h}$ (resp. ${}_{h\backslash}H$) et ${}_{h\backslash}H_{/h}$ respectivement et on définit naturellement deux structures d'hypergroupes en posant

$$(xh)(yh)=\{zh \mid z \in xhy\} \qquad (hxh)(hyh)=\{hzh \mid z \in xhy\}\ .$$

De plus h est *ultra-clos à droite* (resp. *gauche*) dans H si et seulement si, pour tout x de H, il vérifie $xh \cap x(H-h)=\emptyset$ (resp. $hx \cap (H-h)x=\emptyset$). Un sous-hypergroupe ultra-clos à droite et à gauche est dit *ultra-clos*.

En outre, h est *conjugable* dans H s'il est clos et si, pour tout x de H, il existe x' de H (resp. x'' de H) tel que $xx' \subset h$ (resp. $x''x \subset h$) et on dit que h est *semi-invariant* à droite dans H (resp. à gauche) si, pour tout x de H, on a $xh \subset hx$ (resp. $hx \subset xh$) et *invariant* si $hx=xh$.

On a les propriétés suivantes.

(1) *Tous les sous-hypergroupes conjugables sont ultra-clos.*

(2) *Les sous-hypergroupes ultra-clos à droite* (resp. *gauche*) *sont inversibles à droite* (resp. *gauche*) *et clos dans H.*

(3) *Les sous-hypergroupes inversibles à droite* (resp. *gauche*) *dans H sont clos à droite* (resp. *gauche*) *dans H.*

On appelle *coeur* de H [1] et l'on note ω_H le plus petit sous-hypergroupe h de H tel que $H_{/h}$ soit un groupe.

---

[1] La notion de coeur d'un hypergroupe a été introduite par M. Dresher et O. Ore dans [4].

Dans les années suivantes plusieurs mathématiciens ont étudié sa structure; la caractérisation donnée par P. Corsini dans $[2]_1$, selon laquelle le coeur est l'intersection de tous les sous-hypergroupes conjugables, est particulièrement intéressante.

Un élément ε d'un hypergroupe H est dit *identité partielle* à droite (resp. gauche) s'il existe un élément x de H tel que $x \in x\varepsilon$ (resp. $x \in \varepsilon x$). On dit que ε est *identité* à droite (resp. gauche) si, pour tout x de H, on a $x \in x\varepsilon$ (resp. $x \in \varepsilon x$) et si l'on a toujours l'égalité $x = x\varepsilon$ (resp. $x = \varepsilon x$) on dira que ε est *identité scalaire à droite* (resp. *gauche*).

1 - Sur les hypergroupes de type U

Une classe d'hypergroupes particulièrement intéressante est celle des hypergroupes de type U à droite déjà introduits dans $[5]_1$ et appliqués en homologie non abélienne (voir $[5]_2$).

On dit que H est un *hypergroupe de type U à droite* si les conditions suivantes sont satisfaites:

$(U)_1$ Il existe $\varepsilon \in H$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $x\varepsilon = x$.

$(U)_2$ Pour tout $(x, y) \in H^2$, $x \in xy$ implique $y = \varepsilon$.

On dit que *H est de type U* s'il est de type U à droite et à gauche.

Une telle classe contient celle des hypergroupes de type C à droite (un hypergroupe *H est dit de type C à droite* s'il a une identité scalaire à droite ε et si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de H, $xy \cap xz \neq \emptyset$ implique $\varepsilon y = \varepsilon z$), introduite par Y. Sureau dans un Congrès sur les hypergroupes fait à Taormine en octobre 1983, et par conséquent, contient aussi celle des hypergroupes obtenus comme quotients $G_{/g}$ d'un groupe G par un sous-groupe g de G (non necessairement invariant).

On rappelle la proprieté suivante.

(P) *Si h est un sous-hypergroupe inversible à droite de H, alors $H_{/h}$ est un hypergroupe de type U à droite si et seulement si h est ultra-clos à droite dans H.*

On démontre, maintenant, un résultat sur l'hypergroupe de double classe.

Théorème 1.1. *Soit h inversible à droit (resp. à gauche) dans H, les trois propriétés suivantes sont équivalentes*:

(1) *h est centralement inversible et ${}_{h\backslash}H_{/h}$ est un hypergroupe de type U.*

(2) *h est ultra-clos et invariant.*

(3) *$H_{/h}$ (resp. ${}_{h\backslash}H$) est un hypergroupe de type U.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit x un élément de H et $y \in xh$. Par reproductibilité, il existe $z \in H$ tel que $y \in zx \subset zhx$ ($z \in zh$ car h est inversible à droite). Ainsi $hxh = hyh \in (hzh)(hxh)$ et puisque ${}_{h\backslash}H_{/h}$ est de type u (à gauche) on déduit $hzh = h$ et puisque h est centralement inversible, $z \in h$, c'est-à-dire $y \in hx$, donc $xh \subset hx$.

De façon analoque, on démontre l'inclusion $hx \subset xh$.

Donc h est invariant dans H et aussi inversible à gauche. Mais alors, il est clair que l'on a ${}_{h\backslash}H_{/h} \simeq {}_{h\backslash}H \simeq H_{/h}$ et, en particulier, ${}_{h\backslash}H$ est de type U à gauche et $H_{/h}$ de type U à droite, ainsi, h est ultra-clos dans H (voir proprieté (P)).

(2) $\Rightarrow$ (3) Puisque h est ultra-clos et invariant, $H_{/h}$ est de type U à droite et h est identité scalaire à droite et à gauche.

Démontrons, maintenant que $H_{/h}$ est de type U à gauche. Soit $xh \in (yh)(xh)$, on a $xh \subset yhxh$ et supposons $y \in (H - h)$, alors $yhxh \subset (H - h)hxh = (H - h)xh = (H - hx)h = (H - xh)h = x(H - h)h = x(H - h) = (H - xh)$, d'où il s'ensuit $xh \notin yhxh$, ce qui est absurde, donc $y \in h$, c'est-à-dire $yh = h$.

(3) $\Rightarrow$(1) Puisque $H_{/h}$ est de type U, on a h ultra-clos à droite et h est identité scalaire bilatère de $H_{/h}$, donc, pour tout xh de $H_{/h}$, $(h)(xh) = xh$. Ainsi, pour tout $x \in H$, on a $hx \subset hxh \subset xh$. D'autre part, soit $y \in xh$. Puisque h est inversible à droite, on a $yh = xh$ et comme H est réproductible, il existe $z \in H$ tel que $y \in zx$, donc $xh = yh \subset zxh \subset zhxh$. Ainsi $xh \in (zh)(xh)$ et puisque $H_{/h}$ est de type U (à gauche) on a $zh = h$, c'est-à-dire $z \in h$ et donc $y \in hx$. Ainsi h est invariant dans H.

Enfin h est inversible à gauche, donc centralement inversible et ${}_{h\backslash}H_{/h} \simeq H_{/h}$, c'est-à-dire ${}_{h\backslash}H_{/h}$ est aussi de type U.

Dans le théorème suivant, on démontre un résultat qui généralise le Théorème 5.2 du travail $[5]_1$. On établit tout d'abord le suivant

Lemme 1.1. (1) *Soit* $\{h_i\}_{i\in I}$ *une famille de sous-hypergroupes ultra-clos et invariants d'un hypergroupe* H*, alors* $K = \bigcap_{i\in I} h_i$ *est non vide et il est un sous-hypergroupe ultra-clos et invariant de* H.

(2) *Si* $f\colon H \to H'$ *est un morphisme d'hypergroupes et* h' *un sous-hypergroupe ultra-clos de* H'*, alors si* h' *est invariant dans* H'*,* $f^{-1}(h')$ *l'est aussi dans* H (2).

(1) Par la Proposition 1.4 de $[8]_1$, K est non vide et il est un sous-hypergroupe

(2) Un morphisme d'un hypergroupe H dans un hypergroupe H', est une application f de H dans H' tel que $f(xy) \subset f(x)f(y)$ pour tout couple (x, y) d'éléments de H. Et si on a l'égalité $f(xy) = f(x)f(y)$, on dit que f est *bon*.

ultra-clos de H. De plus, on a

$$x(H-K)=\bigcup_{i\in I} x(H-h_i)=\bigcup_{i\in I}(H-xh_i)=\bigcup_{i\in I}(H-h_i x)$$

$$=\bigcup_{i\in I}(H-h_i)\,x=(H-K)\,x\,.$$

Ainsi $xK=Kx$.

(2) Pour tout couple (x, y) d'éléments de H tel que $x\in yf^{-1}(h')$, on a $f(x)\in f(y)\,h'=h'f(y)$ et, par la Proposition 2.2 de $[5]_1$, $x\in f^{-1}(h')\,y$, donc $yf^{-1}(h')\subset f^{-1}(h')\,y$. De façon analogue, on démontre l'inclusion $f^{-1}(h')\,y\subset y\,f^{-1}(h')$.

Maintenant, pour tout sous-ensemble A de H, on désigne par $\widetilde{A}$ l'intersection de tous les sous-hypergroupes ultra-clos et invariants qui contiennent A. Par le Lemme 1.1, $\widetilde{A}$ est ultra-clos et invariant.

En particulier, soit $N_H=\widetilde{\emptyset}$ l'intersection de tous les sous-hypergroupes ultra-clos et invariants de H.

On remarque que si $\omega_H\subset A$, alors $\widetilde{A}$ est aussi conjugable et il coincide avec l'intersection de tous les sous-hypergroupes invariants qui contiennent A (en effet, les sous-hypergroupes qui contiennet A, et donc ω_H, par la Proposition 2.6 de $[8]_1$, sont conjugables et, puisque ils sont invariants, leur intersection est un sous-hypergroupe conjugable et invariant (cf. Proposition 2.5 de $[8]_1$ et Lemme 1.1), c'est-à-dire quelle contient $\widetilde{A}$. La réciproque est vraie aussi).

On peut alors démontrer le

Théorème 1.2. *Soit h un sous-hypergroupe inversible à droite de H, alors*: (1) $N_{(H/h)}=\widetilde{h}_{/h}$. (2) *Si h est conjugable,* $N_{(H/h)}=\omega_{(H/h)}=\widetilde{h}_{/h}$.

(1) Notons $p\colon H\to H_{/h}$ la surjection canonique. Puisque $N_{(H/h)}$ est ultra clos et invariante dans $H_{/h}$, il en est de même de $p^{-1}(N_{(H/h)})$ dans H d'après la Proposition 2.1 de $[5]_1$ et le Lemme 1.1, et comme h est contenu dans $p^{-1}(N_{(H/h)})$ on a $\widetilde{h}\subset p^{-1}(N_{(H/h)})$, d'où $\widetilde{h}_{/h}=p(\widetilde{h})\subset N_{(H/h)}$.

Inversement, $\widetilde{h}$ étant ultra-clos et invariant, on sait que $H_{/h}$ est de type U (cf. Théorème 1.1) et, puisque $H_{/h}/\widetilde{h}_{/h}$ est isomorphe à $H_{/h}$ (3), il s'ensuit (par le même théorème cité ci-dessus) que $\widetilde{h}_{/h}$ est un sous-hypergroupe ultra-clos et invariant de $H_{/h}$. On a donc $N_{(H/h)}\subset\widetilde{h}_{/h}$ et, en définitive, $N_{(H/h)}=\widetilde{h}_{/h}$.

---

(3) On utilise le résultat suivant démontré dans [4]: «Si h et k sont deux sous-hypergroupes inversibles de H, tels que $k\subset h$, alors $H_{/k}/h_{/k}$ est isomorphe à $H_{/h}$».

(2) Si h est conjugable, alors on a $\omega_H \subset h$ et $\tilde{h}$ est conjugable et invariant. Donc $H_{/h}$ est un groupe isomorphe à $H_{/h}/\tilde{h}_{/h}$, ce qui implique $\omega_{(H_{/h})} \subset \tilde{h}_{/h} = N_{(H_{/h})} \subset \omega_{(H_{/h})}$, d'où l'égalité $N_{(H_{/h})} = \omega_{(H_{/h})} = \tilde{h}_{/h}$.

Remarque. Sous les hypothèses du Théorème 1.2 il est possible que l'on ait $N_{(H_{/h})} = \omega_{(H_{/h})} = \tilde{h}_{/h}$ sans que h soit conjugable. En effet, l'égalité ci-dessus est toujours vraie pour les hypergroupes H tels que les sous-hypergroupes ultra-clos soient conjugables (par exemples les hypergroupes de type C à droite (cf. Proposition 1.2. de $[5]_1$)) et où h est un sous-hypergroupe inversible à droite de H qui n'est pas ultra-clos.

Maintenant on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'hypergroupe quotient $H_{/h}$ (resp. ${}_{h\backslash}H$) soit commutatif et on démontre des propositions qui améliorent des résultats établis dans $[5]_1$. Pour cela, on pose, pour tout couple $(a, b) \in H^2$, $a/b = \{x \in H; a \in xb\}$, $b \backslash a = \{x \in H; a \in bx\}$ et l'on étend cette définition à l'ensemble des parties non vides $P^*(H)$ de H, en posant, pour tout couple (A, B) d'éléments de $P^*(H)$, $A/B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a/b$ et $A \backslash B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \backslash b$. Enfin, on note $D_1 = \bigcup_{(x,y) \in H^2} xy/yx$, $D_2 = \bigcup_{(x,y) \in H^2} xy \backslash yx$, $D = D_1 \cup D_2$.

Lemme 1.2. *Soit h un sous-hypergroupe inversible à droite de H (resp. gauche); les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'hypergroupe quotient $H_{/h}$ (resp. ${}_{h\backslash}H$) est commutatif.*

(ii) *Pour tout couple $(x, y) \in H^2$ et quel que soit a de yx on a $xy \backslash a \cap h \neq \emptyset$ (resp. $a/xy \cap h \neq \emptyset$).*

(iii) *Pour tout couple $(x, y) \in H^2$ on a $xy \subset yxh$ et h est semi-invariante à gauche (resp. $xy \subset hyx$ et h est semi-invariant à droite).*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque $H_{/h}$ est commutatif, $h_{/h} = h$ est identité scalaire, donc, pour tout $x \in H$, on a $hxh = xh$. Ainsi, pour tout couple $(x, y) \in H^2$, on a $yxh = yhxh = xhyh = xyh$ et puisque h est inversible à droite, pour tout a de yx, il s'ensuit $a \in yx \subset xyh$, d'où $xy \backslash a \cap h \neq \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit (x, y) un couple quelconque d'éléments de H. Par hypothèse, quel que soit a de xy, il existe $b \in yx$ tel que $b \backslash a \cap h \neq \emptyset$. Ainsi, $a \in bh \subset yxh$ et par conséquent, $xy \subset yxh$.

De plus, pour tout $z \in hy$, il existe $w \in h$ tel que $z \in wy \subset ywh = yh$, donc $hy \subset yh$ pour tout $y \in H$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). On a $xhyh \subset xyhh = xyh \subset yxhh = yxh \subset yhxh$. Ainsi $xhyh \subset yhxh$ et symétriquement $yhxh \subset xhyh$, donc $xhyh = yhxh$ pour tout couple (x, y) de H et $H_{/h}$ est commutatif.

Remarque. Par le Lemme 1.2 si h est un sous-hypergroupe inversible à droite dans H et $H_{/h}$ est commutatif, alors h est semi-invariant à gauche.

Proposition 1.1. *Si h est un sous-hypergroup ultra-clos à droite* (resp. *gauche*) *de H, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'hypergroupe quotient $H_{/h}$ (resp. ${}_{h\backslash}H$) est commutatif.*

(2) *h est invariant dans H et pour tout couple $(x, y) \in H^2$, quel que soit a de yx, on a $xy\backslash a \cap h \neq \emptyset$ et $a/xy \cap h \neq \emptyset$.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Etant donné que h est ultra-clos à droite, l'hypergroupe $H_{/h}$ est de type U à droite, de plus, puisqu'il est commutatif, il est de type U à gauche également. Ainsi, par le Théorème 1.1, h est invariant et par conséquent h est inversible à gauche et ${}_{h\backslash}H$ est commutatif, car il est isomorphe à $H_{/h}$.

Enfin, par le Lemme 1.2, pour tout couple $(x, y) \in H^2$ et quel que soit $a \in yx$, on a $xy\backslash a \cap h \neq \emptyset$ et $a/xy \cap h \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Découle du Lemme 1.2.

Lemme 1.3. *Si h est un sous-hypergroupe inversible de H, alors $D_2 \subset h$ si et seulement si $D_1 \subset h$.*

Soit $D_2 \subset h$ et u un élément quelconque de D_1. Il existe un couple $(x, y) \in H^2$ tel que $u \in xy/yx$, donc $xy \cap uyx \neq \emptyset$. Pour tout élément v de uyx, il existe $w \in yx$ tel que $v \in uw$. Puisque $D_2 \subset h$, par le Lemme 1.2, on a $v \in uw \subset wuh \subset yxuh$, donc $uyx \subset yxuh$, et, par conséquent, on a $xy \cap yxuh \neq \emptyset$, d'où $\emptyset \neq (yx\backslash xy \cap uh) \subset D_2 \cap uh \subset h \cap uh$, et puisque h est clos dans H, on a $u \in h$, ainsi $D_1 \subset h$.

De façon analogue, on prouve que si $D_1 \subset h$, alors $D_2 \subset h$.

Théorème 1.2. *Si h est inversible dans H, il y a équivalence de:*

(i) *$H_{/h}$ est un groupe commutatif.* (ii) *h est conjugable et $D_2 \subset h$.* (iii) *h est conjugable et $D_1 \subset h$.* (iv) *${}_{h\backslash}H$ est un groupe commutatif.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Pour la démonstration on renvoie à l'article $[5]_1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Le Lemme 1.3 établit l'inclusion $D_1 \cup D_2 \subset h$, le Lemme 1.2 la commutativitè de $H_{/h}$ et l'invariance de h dans H et le Théorème 3.1 de [8] permet de conclure que $H_{/h}$ est un groupe.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Par le Lemme 1.3.

L'équivalence entre (iii) et (iv) se démontre de façon analogue à l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

2 - Sous-hypergroupe engendré par un sous-ensemble

Dans tout ce paragraphe, pour tous les sous-ensembles non vides A d'un hypergroupe H, $\overline{A}$ désigne l'intersection de tous les sous-hypergroupes de H contenant A.

En général $\overline{A}$ n'est pas un sous-hypergroupe de H; en effet il existe des hypergroupes possédant une famille de sous-hypergroupes telle que leur intersection soit non vide et ne soit pas un sous-hypergroupe, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.1. Soit H l'hypergroupe défini par l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ muni de l'hyperproduit donné par la table suivante

	a	b	c	d
a	a	a	a, b, c	a, b, d
b	a	a	a, b, c	a, b, d
c	a, b, c	a, b, c	a, b, c	c, d
d	a, b, d	a, b, d	c, d	a, b, d

Les ensembles $h_1 = \{a, b, c\}$ et $h_2 = \{a, b, d\}$ sont des sous-hypergroupes de H, mais leur intersection $\{a, b\} = h_1 \cap h_2$ ne l'est pas. Ce probléme ne se présente pas si les sous-hypergroupes sont clos. En effet, l'intersection d'une famille de sous-hypergroupes clos de H, si elle n'est pas vide, est encore un sous-hypergroupe clos.

On va déterminer dans la suite des conditions sur H, afin que $\overline{A}$ soit un sous-hypergroupe de H.

Pour tout x de H et pour tous les sous-ensembles non vides A de H, on note $\check{x} = \bigcup_{n \geq 1} x^n$ et $\check{A} = \bigcup_{\substack{a_i \in A \\ n \geq 1}} a_1 a_2 \dots a_n$.

On prouve trivialement les propriétés suivantes énoncées pour tout couple (x, y) d'éléments de H.

(I) $x\check{x} = \check{x}x$. (II) $\check{x} = \{x\} \cup x\check{x}$. (III) $x \in \check{y}$ si et seulement si $\check{x} \subset \check{y}$; donc on peut définir une relation de préordre dans H, en posant $x \propto y$ si et seulement si $x \in \check{y}$. (IV) $x \in x\check{x}$ si et seulement si $\check{x} = x\check{x}$ (si et seulement si $\check{x} = \check{x}x$).

On remarque que dans (IV) l'égalité $\check{x} = x\check{x}$ n'assure pas que $\check{x}$ soit un sous-hypergroupe de H. En effet, si on considére l'hypergroupe $H = \{a, b, c\}$ muni de l'hyperproduit donné par la table suivante

	a	b	c
a	a, b	b	H
b	b	b	H
c	H	H	H

$a \in a\check{a} = \check{a} = \{a, b\}$, mais $\check{a}$ n'est pas un sous-hypergroupe de H.

On donne la définition suivante.

Def. 2.1. On dira que H est *digne* lorsque, pour tous les couples (x, y) de H, on a $y \in y\check{x} \cap \check{x}y$. On dira que H est *respectable* si, pour tout couple (x, y) de H, on a $y \in x\check{P} \cap \check{P}x$ où $P = \{x, y\}$.

Il est clair que tous les hypergroupes dignes sont respectables. En effet on a $y\check{x} \cup \check{x}y \subset \check{P}$ et si H est digne on a $\check{x} = x\check{x} = \check{x}x$ d'où $y \in y\check{x} \cup \check{x}y = y\check{x}x \cap x\check{x}y \subset \check{P}x \cap x\check{P}$. Mais la réciproque est fausse, en effet, si on considère l'hypergroupe $H = \{a, b, c, d\}$ muni de l'hyperproduit donné par la table suivante

	a	b	c	d
a	a	c	c	H
b	c	H	H	H
c	c	H	H	H
d	H	H	H	H

On prouve trivialement que H est respectable, car $a = a\breve{a} = \breve{a}a = \breve{a}$ et, pour tout couple (x, y) de H tel que $(x, y) \neq (a, a)$, on a $\breve{P} = H$ où $P = \{x, y\}$. Mais H n'est pas digne, car $b \notin b\breve{a} \cap \breve{a}b = ba \cap ab = \{c\}$.

Théorème 2.1. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(1) *H est respectable.* (2) *Pour tout élément A de $P^*(H)$, A est un sous-hypergroupe de H si et seulement si $AA \subset A$.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Il suffit de démontrer que $AA \subset A$ implique A sous-hypergroupe de H. Puisque H est respectable et $AA \subset A$, pour tout couple (x, y) de A, en posant $P = \{x, y\}$, on a $\breve{P} \subset A$ et $y \in x\breve{P} \cap \breve{P}x \subset xA \cap Ax$. Ainsi $A \subset xA \subset AA \subset A \subset Ax \subset AA \subset A$, c'est-à-dire $A = xA = Ax$, donc A est un sous-hypergroupe de H.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soient $(x, y) \in H^2$ et $P = \{x, y\}$. Alors on a $\breve{P}\breve{P} \subset \breve{P}$, donc P est un sous-hypergroupe de H et, par conséquent, $y \in \breve{P} \subset x\breve{P} \cap \breve{P}x$, c'est-à-dire H est respectable.

Proposition 2.1. *Soit H respectable.*

(1) *Pour tout élément A de $P^*(H)$, $\overline{A}$ est un sous-hypergroupe de H et de plus $\overline{A} = \breve{A}$.*

(2) *Si K_1, K_2 sont des sous-hypergroupes de H tels que $K_2K_1 \subset K_1K_2$, alors K_1K_2 est un sous-hypergroupe de H.*

(3) *Pour tout x de H, $h = \breve{x}$ est un sous-hypergroupe de H. De plus h est clos si et seulement si $(H - h)x = x(H - h) = (H - h)$.*

(1) Il est évident que l'on a $A \subset \breve{A}$ et $\breve{A}\breve{A} \subset \breve{A}$, donc, par le Théorème 2.1., $\breve{A}$ est un sous-hypergroupe de H qui contient A et par conséquent $\overline{A} \subset \breve{A}$. En outre, on a aussi $\overline{A}\,\overline{A} \subset \overline{A}$, qui donne l'inclusion $\breve{A} \subset \overline{A}$, et donc $\overline{A} = \breve{A}$.

(2) Par hypothèse, on a $K_1K_2K_1K_2 \subset K_1K_1K_2K_2 = K_1K_2$ et par le Théorème 2.1, K_1K_2 est un sous-hypergroupe de H.

(3) Compte tenu de (1), $h = \breve{x}$ est un sous-hypergroupe de H. Si h est clos dans H, puisque $x \in h$, on a $(H-h)x = (H-h)hx = (H-h)h = (H-h) = h(H-h) = xh(H-h) = x(h-h)$.

Inversement, soit $(H-h)x = (H-h) = x(H-h)$. On a $(H-h)x^2 = (H-h)xx = (H-h)x = (H-h)$ et par induction, pour tous $n \in N^*$, $(H-h)x^n = (H-h)$. Il s'ensuit $(H-h)h = (H-h)\breve{x} = (H-h)(\bigcup_{n\geq 1} x^n) = \bigcup_{n\geq 1}((H-h)x^n) = (H-h)$. De façon analogue, on démontre $h(H-h) = (H-h)$ et donc h est clos dans H.

Dans le théorème suivant, on détermine une classe d'hypergroupes dignes. Mais avant on démontre un lemme facile.

Lemme 2.1. (1) *Si H est un hypergroupe avec identité ε tel que, pour tout $x \in H$, $\varepsilon \in \breve{x}$ alors H est digne.*

(2) *Pour tout élément minimal x de H (pour le préordre $\propto$ défini dans* (III)) *$\breve{x}$ est un sous-hypergroupe de H.*

(1) Pour tout couple (x, y) d'éléments de H, on a $y \in y\varepsilon \cap \varepsilon y \subset y\breve{x} \cap \breve{x}y$ et donc H est digne.

(2) Pour tout x minimal, on a $x\breve{x} = \breve{x}$. En effet, quel que soit $z \in x^2$ on a $\breve{z} \subset x\breve{x} \subset \breve{x}$ et par minimalité $\breve{z} = x\breve{x} = \breve{x}$. Enfin, pour tout y de $\breve{x}$ encore par minimalité, $\breve{y} = \breve{x}$, donc $\breve{x} = \breve{y} = y\breve{y} = y\breve{x}$ et de façon analogue, $\breve{x}y = \breve{x}$.

Remarque. Il existe des hypergroupes dignes sans identité. En effet, soit H (avec $|H| > 2$) l'hypergroupe défini par l'hyperproduit suivant: pour tout couple $(x, y) \in H^2$, $xy = yx = H$ si $x \neq y$ et $xx = H - \{x\}$. H est digne, car $\breve{x} = H$ pour tout x et l'on a donc $y \in H = yH = y\breve{x}$ $(y \in H = Hy = \breve{x}y)$ et, pour tout $x \in H$, x n'est pas une identité.

Théorème 2.2. *Si H est un hypergroupe fini de type U à droite d'identité ε, alors H est digne.*

Par le Lemme 2.1-(1), il suffit de prouver que, pour tout x de H, $\varepsilon \in \breve{x}$. Et puisque H est fini, il est suffisant d'après (III) de considérer le cas où $\breve{x}$ est minimal. Alors, par le Lemme 2.1.-(2), $\breve{x}$ est un sous-hypergroupe de H, en particulier $x \in x\breve{x}$, donc il existe $y \in \breve{x}$ tel que $x \in xy$ d'où, puisque H est de type U à droite, on déduit $y = \varepsilon$.

Remarque. Il est aussi possible de déterminer des hypergroupes dignes de cardinalité infinie comme on le montre dans l'exemple suivant.

Example. Dans [7], W. Prenowitz et J. Jantosciak ont introduit une nouvelle classe d'hypergroupes, appellés *join spaces*, commutatifs et tels que, pour tout quadruplet $(x, y, z, t) \in J^4$, $x/y \cap z/t \neq \emptyset$ implique $xt \cap yz \neq \emptyset$. Dans le même travail il est prouvé qu'à chaque système (S, T) de géometrie projective (S est un ensemble dont les élèments sont dits points et T est une famille de sous ensembles de S, appellés lignes, qui satisfent trois axiomes) il est possible d'associer un join space $(S', \circ)$ avec identité scalaire ε qui, par le Théorème 3′ de [7] appartient à x^2, pour tout élément x de $S' - \{\varepsilon\}$. Donc, par le Lemme 2.1, $(S', \circ)$ est digne.

Bibliographie

[1] P. Bonasinga e P. Corsini, *Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi*, Boll. Un. Mat. Ital. **1-B** (1982), 717-727.

[2] P. Corsini: $[\bullet]_1$ *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1980); $[\bullet]_2$ *Ipergruppi semiregolari e regolari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **40** (1982), 35-46; $[\bullet]_3$ *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi*, Boll. Un. Mat. Ital. **2-A** (1983), 133-138.

[3] P. Corsini et Y. Sureau: *Sur les sous-hypergroupes d'un hypergroupe*, Riv. Mat. Univ. Udine (à paraitre).

[4] M. Dresher and O. Ore, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math. **60** (1938), 705-733.

[5] D. Freni: $[\bullet]_1$ *Structure des hypergroupes quotients et des hypergroupes de type U*, Ann. Sci. Univ. Clermont Math. fasc. 22 (1984), 51-77; $[\bullet]_2$ *Hypergroupes cambistes - Hypergroupes de type U - Applications à la théorie de la dimension et à l'homologie non abélienne*, Thèse de Doctorat, Univ. de Clermont-Ferrand II, 1985.

[6] M. Krasner, *La loi de Jordan-Hölder dans les hypergroupes et les suites gènèratrices des corps de nombres β-adiques*, Duke Math. J. **6** (1940), 120-140.

[7] W. Prenowitz and J. Jantosciak, *Géometries and join spaces*, J. Reine Angew. Math. **257** (1972), 100-128.

[8] Y. Sureau: $[\bullet]_1$ *Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble*, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. de Clermont-Ferrand II, 1980; $[\bullet]_2$ *Hypergroupes de type C*, Conférence Taormine, 1983.

Summary

In this paper the Author continues the study of the hypergroupes of type U, already introduced in [4], *and of quotient-hypergroups. Moreover the problem of subhypergroups generated by not empty subsets of a given hypergroups is examined.*

***