Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 85-90

CALOGERO TINAGLIA (*)

Sulle soluzioni non negative di un sistema lineare diofanteo (**)

1 – Considerata l'equazione diofantea lineare

$$a_1 x_1 + \ldots + a_i x_i + \ldots + a_n x_n = b$$

con $a_i > 0$, $b > 0$, $n > 2$, $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = 1$, i problemi riguardanti le eventuali soluzioni non negative (oppure anche positive) hanno dato luogo ad una letteratura di ampiezza molto rilevante e continuano a farlo (1) perché i predetti problemi, malgrado l'apparente semplicità, presentano sovente serie difficoltà e sono ancora in gran parte non completamente risolti. Ad esempio molta attenzione è stata dedicata al cosidetto problema di Frobenius, ancora irrisolto nella sua generalità, consistente nella determinazione del massimo valore di b per cui l'equazione non ha soluzioni non negative (oppure positive).

Se si passa alla considerazione di sistemi di equazioni

$$a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n = b_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

con a_{ij}, b_i interi, $n > 2$, $m < n$, $(a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}) = 1$, si trova che la relativa letteratura è assai meno abbondante, anche perché ovviamente i problemi, analoghi a quelli riguardanti singole equazioni, sono naturalmente più difficili.

In questo lavoro ci proponiamo di dare un contributo al problema di determinare condizioni affinché esistano soluzioni intere non negative di (1) e determinarne il numero.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, P.za di Porta S. Donato 5, I-40127 Bologna.

(**) Ricevuto: 21-V-1986.

(1) Basta consultare le ultime annate della Mathematical Reviews per rendersene conto.

Con questo lavoro ci si propone anche di dare un procedimento per la determinazione delle condizioni suddette, problema questo che la letteratura anche più recente apparentemente non tratta per $n > 2$.

Risolveremo il problema nel caso più semplice ossia per $m = n - 1$.

Supporremo ovviamente che il sistema (1) abbia soluzioni intere ossia che la matrice completa e la matrice incompleta, oltre che avere lo stesso rango, abbiano anche lo stesso divisore.

In questo caso il procedimento è il seguente:

Sia V il vettore parallelo alla retta r di $\mathbb{R}^n$, rappresentata dal sistema (1), che ha per componenti numeri interi primi tra loro e la prima componente positiva. Come vedremo più avanti non è restrittivo supporre che le componenti di V siano tutte non nulle.

Supposte dunque le componenti di V tutte con lo stesso segno (positivo), allora è ovvio che il sistema ha infinite soluzioni intere positive.

Se invece le componenti di V non hanno tutte lo stesso segno, siano $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ i punti in cui la retta r interseca rispettivamente gli iperpiani di equazione $x_1 = 0, \ldots, x_i = 0, \ldots, x_n = 0$.

Se esistono due punti A_p e A_q che hanno coordinate (razionali) non negative, allora il numero delle soluzioni intere non negative del sistema (1) supera al più di una unità la parte intera del numero razionale k_{pq} (che possiamo supporre positivo) tale che

$$A_p - A_q = k_{pq} V\,.$$

Il procedimento suddetto viene dato in **2**. Si osservi che, per le ipotesi poste, il sistema (1) può sempre scriversi nella forma *ridotta*

$$a_i x_1 + b_{i+1} x_{i+1} = p_i \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

con a_i, b_{i+1}, p_i interi ed $(a_i, b_{i+1}) = 1$.

In **3** si considera il caso $n = 3$. Determinati i sistemi che possono avere un numero finito di soluzioni intere non negative si applica il procedimento sopraindicato e si determinano le condizioni perché ciò accada.

2 – Dato il sistema

$$a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n = b_i \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{3}$$

con a_{ij} interi tali che $(a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}) = 1$, sia D_j il determinante che si ottiene dalla matrice incompleta sopprimendo la j-ma colonna. Supporremo che, almeno uno di tali determinanti sarà diverso da zero.

Anzi non è restrittivo supporre che tutti i determinanti D_j siano non nulli. Infatti se, per semplicità, fosse $D_1 \cdot D_2 \ldots D_m \neq 0$ ed $D_{m+1} = \ldots = D_n = 0$ il sistema dato sarebbe equivalente ad un sistema del tipo

$$a'_{i1} x_1 + \ldots + a'_{ij} x_j + \ldots + a'_{im} x_m = b'_i \qquad i = 1, \ldots, m-1$$

$$x_h = b'_h \qquad h = m+1, \ldots, n \; .$$

Questo sistema avrà soluzioni non negative se tutti gli interi b'_h sono non negativi e in tal caso per trovarle occorre e basta studiare il sistema costituito dalle prime $m-1$ equazioni che è un sistema dello stesso tipo (3) in cui i relativi determinanti D'_j sono tutti non nulli.

Supporremo quindi che sia $D_j \neq 0$ per qualunque $j = 1, \ldots, n$. Se D è il divisore della matrice incompleta sarà $D_j = D a_j$ con a_j interi tali che $(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = 1$ ed i vettori paralleli alla retta r di $\mathbb{R}^n$ rappresentata dal sistema (3) sono del tipo $(a_1 t, \ldots, (-1)^{j-1} a_j t, \ldots, (-1)^{n-1} a_n t)$ con t reale. Indicheremo con $V(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n)$ il vettore parallelo ad r che si ottiene per $t = 1$ se a_1 è positivo, per $t = -1$ se a_1 è negativo e porremo

$$d = \|V\| = (m_1^2 + \ldots + m_i^2 + \ldots + m_n^2)^{1/2} \; . \tag{4}$$

Se P_0 è un punto intero della retta r gli altri punti interi sono dati da

$$P = P_0 + tV \quad \text{(con } t \text{ intero qualsiasi).} \tag{5}$$

Infine indichiamo con $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ gli n punti di r che hanno rispettivamente la coordinata i-ma nulla ossia $A_i(x_1^i, \ldots, x_{i-1}^i, 0, x_{i+1}^i, \ldots, x_n^i)$. I numeri x_j^i sono razionali e si ha

$$A_i - A_j = k_{ij} V \qquad \|A_i - A_j\| = |k_{ij}|\, d \tag{6}$$

con k_{ij} razionale e $k_{ij} = 0$ se e solo se $i = j$ oppure $i \neq j$ ed $A_i = A_j$.

La dimostrazione di ciascuno dei tre lemmi seguenti è ovvia.

Lemma 1. *I punti interi di r sono in progressione aritmetica di ragione d.*

Lemma 2. *Sono equivalenti:*

(1) *Il sistema* (3) *ha infinite soluzioni in interi positivi.*

(2) *Gli interi* $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ *hanno tutti lo stesso segno.*

Lemma 3. *Se gli interi* $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ *non hanno lo stesso segno, sono equivalenti:*

(1) *La retta* r *contiene punti con coordinate (reali) tutte positive.*

(2) *Esistono due punti distinti* A_p *e* A_q *che hanno tutte coordinate non negative.*

Dai Lemmi 1 e 3 e dalle (6) discende subito il

Teorema 1. *Se gli interi* $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ *non hanno tutti lo stesso segno e se esistono due punti distinti di* r, A_p *e* A_q *con coordinate non negative, allora il numero dei punti di* r *che hanno le coordinate non negative supera al più di una unità la parte intera di* $|k_{pq}|$.

3 – Supponiamo ora che sia $n=3$. Supponendo che il vettore V ha tutte le componenti non nulle, in forma ridotta tali sistemi si scrivono

$$apx \pm bqy = \pm u \qquad a'px \pm cqz = \pm v \tag{7}$$

con a, b, c, p, q interi positivi tali che si abbia $(ap,\ bq) = (a'p,\ cq) = (b,\ c) = (a,\ a') = 1$ ed u, v interi non negativi.

Cambiando eventualmente y con z, dei sedici sistemi (7) quelli che possono avere un numero finito non nullo di soluzioni sono i tre sistemi

$$\text{(I)}\ \begin{matrix} apx + bqy = u \\ a'px + cqz = v \end{matrix} \qquad \text{(II)}\ \begin{matrix} apx - bqy = u \\ a'px + cqz = v \end{matrix} \qquad \text{(III)}\ \begin{matrix} apx - bqy = -u \\ a'px + cqz = v. \end{matrix}$$

Il sistema (III) si ottiene da (II) ponendo $-u$ al posto di u. In entrambi i sistemi (I) e (II) il divisore della matrice incompleta è $D = q$ mentre quello della matrice completa è $D' = (D,\ apv - a'pu,\ bqv,\ cqu)$. Poiché $(p,\ q) = 1$ è $D' = D$ se e solo se è

$$av - a'u = kq \qquad \text{con } k \text{ intero.} \tag{8}$$

Nel sistema (III) è $D' = D$ se e solo se è

$$av + a'u = kq \tag{9}$$

con k intero (ovviamente non negativo).

Poiché supponiamo che il sistema ha soluzioni intere, la (8) o la (9) sono vere.

Indicando con N il numero delle soluzioni non negative del relativo sistema si ha

Teorema 2. *Se per il sistema* (I) *vale la* (8) *e se è* $k \geqslant 0$, *allora* N *supera al più di una unità la parte intera di* $u/abcpq$; *se è* $k > 0$, *allora* N *supera al più di una unità la parte intera di* $v/a'bcpq$. *Se per il sistema* (II) *vale la* (8) *e se è* $k \geqslant 0$, *allora* N *supera al più la parte intera di* $k/aa'bcp$; *se è* $k < 0$, *allora il sistema non ha soluzioni non negative.*

Se per il sistema (III) *vale la* (9), *allora* N *supera al più di una unità la parte intera di* $k/aa'bcp$.

Dim. Basta trovare i punti A_1, A_2, A_3 ed applicare il procedimento indicato in 2.

Bibliografia

[1] E. Ehrhart: $[\bullet]_1$ *Polinômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, International Series of Numerical Mathematics, vol. 35, Birkhauser Verlag, Basel-Stuttgart, 1977; $[\bullet]_2$ *Nombre de solutions d'un système diophantien eulérien*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 285 (1977), A317-320.

[2] M. A. Frumkin: $[\bullet]_1$ *On the number of nonnegative integer solutions of a system of linear Diophantine equations*, Studies on graphs and discrete programming, Brussels (1979), 95-108; North-Holland Math. Stud., 59; North-Holland, Amsterdam-New York, 1981; $[\bullet]_2$ *The number of natural solutions of a system of linear diophantine equations*, Mat. Zametki 28 (1980), 321-334, 447.

[3] G. Huet, *An algorithm to generate the basis of solutions to homogeneous linear Diophantine equations*, Inform. Process. Lett. 7 (1978), 144-147.

[4] M. I. Israilov, *Determination of number of solutions of linear Diophantine equations and their applications in the theory of invariant cubature formulas*, Sibirsk. Mat. Ž. 22 (1981), 121-136, 237.

[5] È. T. SAMSONADZE, *Determination of the number of integer solutions of system of linear inequalities and equations*, Fifth Works Young Scientists at Tbilisi State University of the Order of the Red Star (Russian), pp. 21-27. Tbilis. Univ., Tbilisi, 1976.

[6] R. P. STANLEY: $[\bullet]_1$ *Linear homogeneous Diophantine equations and magic labelings of graphs*, Duke Math. J. 40 (1973), 607-632; $[\bullet]_2$ *Linear Diophantine equations and local cohomology*, Invent. Math. 68 (1982), 175-193.

Summary

We determine the number of nonnegative integer solutions of a system of $n-1$ *linear Diophantine equations in* n *variables. We study particularly the case* $n=3$.

***