Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 161-173

LANDO DEGOLI (*)

Sulle varietà basi dei sistemi lineari di quadriche (**)

1 - Nello spazio lineare complesso S_r, riferito a coordinate proiettive omogenee x_i ($i=0, 1, 2, \ldots, r$) si assumano $d+1$ ($d \geqslant r$) quadriche linearmente indipendenti

$$f_q = \sum_{i=k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \qquad (q=0,\ 1,\ \ldots,\ d; \quad a_q^{ik} = a_q^{ki}) \ .$$

Un sistema lineare di quadriche di dimensione d è dato dalla relazione

$$\sum_{q=0}^{d} \rho_q f_q = 0 \ .$$

Supponiamo che la matrice Jacobiana a $r+1$ righe e $d+1$ colonne

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\| \qquad \binom{q=0,\ 1,\ \ldots,\ d}{i=0,\ 1,\ \ldots,\ r}$$

abbia caratteristica $m = r-k$.

È noto che quando la Jacobiana è identicamente nulla, l'intero S_r è luogo di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche del sistema. Se la caratteristica è $r-h$ ($h \geqslant 0$) un punto generico di S_r è coniugato con un S_h.

Dati due sistemi lineari L_a ed L_b, aventi in comune un sistema lineare L_c, il loro sistema congiungente risulta di dimensione $a+b-c$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata «G. Vitali», Via Campi 213/B, I-41100 Modena.

(**) Ricevuto: 24-IX-1986.

Diremo che il sistema $L_{d/m}$ $(m \leqslant d)$ è *riducibile* se congiunge dei sistemi subordinati, tra i quali almeno uno $L_{g/c}$ $(c \leqslant g)$ non ha quadriche in comune con gli altri. Altrimenti il sistema sarà detto *irriducibile di dimensione d e Jacobiana di caratteristica m.*

Un sistema lineare irriducibile $L_{d/m}$ sarà detto *di prima specie* se i suoi sistemi subordinati L_{d_i/m_i} $(m_i \leqslant d_i)$ hanno tutti caratteristica $m_i > m$.

Teorema. *Dato un sistema lineare di quadriche irriducibile di prima specie* $L_{d/r-k}$ $(r-k \leqslant d,\ d \geqslant r)$ *di* S_r*, la varietà base è necessariamente una delle seguenti:*

(I) *Un* S_k *doppio.*

(II) *Una varietà riducibile che possiede due varietà razionali di dimensione* h *ed* $r-h+k-1$ $(1 \leqslant h \leqslant r-2)$.

(III) *Una varietà irriducibile razionale di dimensione* $\dfrac{r+k-1}{2}$.

Dim. Supponiamo dapprima $k=0$. Sia quindi un sistema $L_{d/r}$ $(r \leqslant d)$ irriducibile di prima specie. Per un noto teorema (v. $[3]_1$) le quadriche di L_d passanti per un punto generico P di S_r hanno in comune una retta, che risulta corda della varietà base V del sistema.

Sia R il complesso di rette formato da tutte le corde di V, che per quanto detto riempono l'intero S_r.

Seghiamo detto complesso con un iperpiano S_{r-1}. Ogni retta del complesso sarà intersecata in un punto. È quindi possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'iperpiano e le rette del complesso R.

Perciò il complesso R è un ente razionale.

Supponiamo che le quadriche abbiano in comune un punto doppio A. Ne deriva che tutte le rette uscenti da A sono corde della varietà costituita dal punto A. Esse riempono tutto l'S_r ed evidentemente formano un complesso razionale.

Le quadriche non possono avere in comune nessun altro punto doppio B, altrimenti per un punto generico P passerebbe più di una corda: la retta PA e la retta PB.

Di conseguenza la caratteristica della Jacobiana sarebbe minore di r, contro l'ipotesi.

Ne deriva che le quadriche sono dei coni con un S_0-vertice in comune.

Escluso questo caso, poiché R è un ente razionale, ne deriva che le coordinate di retta delle sue rette, i cosidetti p_{ik}, cioè i minori estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_r \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

sono funzioni razionali di $r-1$ variabili indipendenti; quant'è la dimensione dell'iperpiano.

Possiamo ritenere che $M(x_0, x_1, \dots, x_r)$ ed $N(y_0, y_1, \dots, y_r)$ siano due punti qualsiasi della varietà base ed MN la corda che li congiunge.

Notiamo che, dette $x'_0, x'_1, \dots, x'_r$ le coordinate di un punto generico P di S_r, perché la corda MN passi per P occorre che si annullino tutti i minori del terzo ordine estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 & \dots & x'_r \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 & \dots & x'_r \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_r \end{matrix} \right\|$$

Questo comporta che i p_{hk} generici risultino combinazioni lineari dei p_{0h} e p_{0k} perché essendo nullo il minore

$$\left| \begin{matrix} x'_0 & x'_h & x'_k \\ x_0 & x_h & x_k \\ y_0 & y_h & y_k \end{matrix} \right|$$

dovrà essere

$$x'_0 p_{hk} - x'_h p_{0h} + x'_k p_{0k} = 0$$

e ciò mostra che perché siano razionali i p_{hk} è sufficiente lo siano i p_{0i} $(i = 1, 2, \dots, r)$.

Se la varietà base è riducibile, dovranno esistere in essa due varietà subordinate W e Z di dimensione h ed $r-h-1$ $(1 \leq h \leq r-2)$. Viene scartato il caso $h=0$ ed $h=r-1$ perché in tal caso le quadriche, dovendo contenere almeno un iperpiano, sarebbero coppie di iperpiani aventi un iperpiano in comune. Gli altri iperpiani della coppia dovrebbero contenere quando il loro numero è massimo un S_0. Ma in tal caso sarebbero soltanto ∞^{r-1}. Pertanto il sistema di quadriche avrebbe dimensione $d = r-1$ contro l'ipotesi che sia $r \leq d$.

Che le varietà W e Z debbano avere le dimensioni citate è provato dal fatto che proiettando W da un punto generico P si ottiene una W_{h+l} che interseca Z soltanto in un punto Q esterno alla varietà intersezione di W con Z.

Infatti, risultando la retta PQ corda di V, solo in tal caso P risulta coniugato con un solo punto rispetto a tutte le quadriche del sistema.

Indichiamo con

$$x_0 = 1 \qquad x_i = \Phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

le equazioni parametriche di W.

Quelle di Z potranno essere indicate con

$$y_0 = 1 \qquad y_i = \Psi_i(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-h-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

I primi rp_{ik} estratti dalla matrice (1) risultano $p_{oi} = \psi_i - \varphi_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Se ne deduce che le differenze $\Psi_i - \Phi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ devono risultare razionali nei parametri α_m, β_h. Pertanto l'eventuale parte irrazionale di Ψ_i e Φ_i deve scomparire per differenza.

Se ne deduce che

$$\Phi_i = A_i + R_i \qquad \Psi_i = B_i + R_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

dove A_i e B_i sono funzioni razionali e R_i è l'eventuale parte irrazionale di Φ_i e Ψ_i.

Fissiamo un punto M su W: restano individuati $A_i = A$ ed $R_i = R$ (A ed R = costanti).

Facendo variare il punto N su Z è chiaro che, perché la differenza $\Phi_i - \Psi_i$ risulti sempre razionale, R_i dovrà essere costantemente uguale ad R perciò $R_i = \text{cost}$. Analogamente, se teniamo fisso Ψ_i e facciamo variare Φ_i su W, si ottiene lo stesso risultato.

Ma se R_i è costante in entrambe le varietà, non è più irrazionale. Quindi Φ_i e Ψ_i sono razionali, come volevasi dimostrare.

Supponiamo ora che V sia irriducibile. Se h è la sua dimensione, poiché le sue corde sono ∞^{2h} ed in ogni corda possiede ∞^1 punti, dovrà essere

$$2h - 1 = r \qquad \text{cioè} \qquad h = \frac{r-1}{2}\,.$$

Se ne deduce che r è necessariamente dispari.

Ripetendo il ragionamento fatto precedentemente, scegliamo due punti $\mathrm{M}(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ ed $\mathrm{N}(y_0 = y_1, \ldots, y_r)$ su detta varietà. Scriviamo V in forma parametrica

$$x_0 = 1 \qquad x_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

$$y_0 = 1 \qquad y_i = \Omega_i(\beta_i, \beta_2, \ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

I primi p_{ik} risultano

$$p_{0i} = \Omega_i(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}) - \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Ripetendo le considerazioni già fatte, possiamo fissare il punto M e quindi le $\Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}})$ e far variare il punto N su tutte le varietà. Per il ragionamento precedente, poiché i p_{0k} $(k = 1, 2, \ldots, r)$ risultano razionali, anche le Ω_i saranno razionali, come volevasi dimostrare.

Abbiamo quindi dimostrato che la varietà base di un sistema lineare di quadriche irriducibili di prima specie $L_{d/r}$ $(r \leqslant d)$ può essere soltanto:

(1) *Un punto doppio ed in tal caso le quadriche sono degli S_0-coni con S_0-vertice in comune.*

(2) *Una varietà riducibile che possiede due varietà razionali di dimensioni h ed $r-h-1$ $(1 \leqslant h \leqslant r-2)$.*

(3) *Una varietà irriducibile razionale di dimensione $\frac{r-1}{2}$, purché r sia dispari.*

Ora passiamo al caso successivo.

Sia un sistema $L_{d/r-1}$ $(r-1 \leqslant d)$ irriducibile. Sezioniamo tale sistema con un iperpiano. Per un noto teorema di Terracini [5] si ottiene un sistema di quadriche irriducibile di S_{r-1}, avente la stessa dimensione e la stessa caratteristica.

Denotiamo tale sistema con $L_{\alpha/r-1}$. Poiché lo spazio ambiente ha dimensione $r-1$, tale sistema soddisfa la prima parte del teorema, pertanto la sua varietà è una delle seguenti:

(1) *Un punto doppio di S_{r-1}.*

(2) *Una varietà irriducibile di S_{r-1}, che possiede due varietà razionali di dimensione h ed $r-h-2$.*

(3) *Una varietà irriducibile di S_{r-1} di dimensione $\frac{r-2}{2}$ (r = numero pari).*

Tali varietà sono ovviamente le sezioni iperpiane della varietà base del sistema $L_{d/r-1}$.

Poiché tale risultato si ottiene qualunque sia l'S_{r-1}, se ne deduce che la varietà base di $L_{d/r-1}$ è una delle seguenti:

(1) *Una retta doppia di* S_r.

Infatti un iperpiano generico di S_r seca in un solo punto doppio soltanto una retta doppia e inoltre un punto generico di S_r ha per coniugato una retta rispetto a tutte le quadriche di $L_{d/r-1}$.

(2) *Una varietà riducibile che possiede due varietà razionali di dimensione* $h_1 = h + 1$ *ed* $r - h_1 = r - h - 1$.

Le varietà devono essere necessariamente razionali perché le loro sezioni con un iperpiano generico sono razionali.

Se, infatti, anche una sola coordinata, ad esempio $x_m = x_m\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h+1})$ fosse funzione irrazionale dei parametri, allora la sezione iperpiana $x_0 = 0$ sarebbe irrazionale, in contrasto con la dimostrazione precedente.

Le dimensioni di questa varietà sono ovviamente $h + 1$ ed $r - h - 1$, affinché le sezioni iperpiane risultino di dimensioni h ed $r - h - 2$.

(3) *Una varietà razionale irriducibile di dimensione* $\frac{r}{2}$.

Deve essere razionale per gli stessi motivi sopra detti e inoltre deve aver dimensione $\frac{r}{2}$, affinché la sezione iperpiana abbia dimensione $\frac{r-2}{2}$.

Sia ora il sistema $L_{d/r-2}$ $(r - 2 \leqslant d)$ irriducibile. Sezionando tale sistema con un iperpiano, si ottiene un sistema $L'_{d/r-2}$ $(r - 2 \leqslant d)$ di S_{r-1}, che, rispetto ad S_{r-1}, si trova nelle stesse condizioni del sistema $L_{d/r-1}$ rispetto ad S_r. Pertanto saranno valide le conclusioni precedenti e quindi la varietà base di $L_{d/r-2}$ sarà una delle seguenti:

(1) *Un piano doppio.*

(2) *Una varietà riducibile, che possiede due varietà razionali di dimensioni* h_2 *ed* $r - h_2 + 1$.

(3) *Una varietà razionale irriducibile di dimensione* $\frac{r+1}{2}$ ($r =$ *numero dispari*).

Così proseguendo è evidente che si perviene a dimostrare la tesi del teorema.

2 – Diamo ora alcuni significativi esempi mai considerati fino ad ora.
Consideriamo il sistema lineare di quadriche

$$\rho_0(x_0 x_5 - x_4 x_1) + \rho_1(x_0 x_6 - x_4 x_2) + \rho_2(x_0 x_7 - x_4 x_3) + \rho_3(x_1 x_6 - x_5 x_2)$$
$$+ \rho_4(x_1 x_7 - x_5 x_3) + \rho_5(x_2 x_7 - x_3 x_6) + \rho_6(x_4 x_9 - x_8 x_5) + \rho_7(x_4 x_{10} - x_8 x_6)$$
$$+ \rho_8(x_4 x_{11} - x_8 x_7) + \rho_9(x_5 x_{10} - x_9 x_6) + \rho_{10}(x_5 x_{11} - x_{10} x_7) + \rho_{11}(x_6 x_{11} - x_{10} x_7) = 0$$

il quale comprova quanto sopra affermato.

Mostriamo che si tratta di un $L_{11/9}$ dell'S_{11}. Infatti dette A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N le dodici quadriche che lo compongono, si vede subito che sono soggette ai seguenti legami indipendenti

$$AF - BE + CD = 0 \qquad GN - HM + IL = 0 \qquad AN - BM + CL + DI - EH + FG = 0.$$

Questo accade perché i tre determinanti

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \end{vmatrix}$$

sono identicamente nulli per avere chi una, chi due coppie di righe uguali.

Pertanto le quadriche funzionalmente indipendenti sono soltanto $12 - 3 = 9$ e questo numero risulta essere la caratteristica della Jacobiana del sistema.

Ora per un noto teorema (v. $[3]_1$) per un punto generico di S_{11} devono passare ∞^2 corde della varietà base costituenti un S_3.

Infatti la varietà base di detto sistema è costituita da un S_7 di equazioni

$$x_4 = 0 \qquad x_5 = 0 \qquad x_6 = 0 \qquad x_7 = 0$$

e da una V_5 di equazioni parametriche

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = \mu \qquad x_2 = \nu \qquad x_3 = \theta \qquad x_4 = \zeta \qquad x_5 = \mu\zeta \qquad x_6 = \nu\zeta$$
$$x_7 = \theta\zeta \qquad x_8 = \varphi \qquad x_9 = \mu\varphi \qquad x_{10} = \nu\varphi \qquad x_{11} = \theta\varphi\,.$$

In coordinate cartesiane si ha

$$\frac{x_0}{x_4}=\frac{x_1}{x_5}=\frac{x_2}{x_6}=\frac{x_3}{x_7}=\frac{x_4}{x_8}=\frac{x_5}{x_9}=\frac{x_6}{x_{10}}=\frac{x_7}{x_{11}}$$

il che prova che la V_5 è l'intersezione di due particolari varietà di Segre.

Se si prende un punto generico P di S_{11} e si proietta l'S_7 si determina un S_8, che interseca la V_5 secondo un piano, il che dimostra che le corde che passano per P costituiscono un S_3.

Ora in modo analogo al precedente applichiamo il deter-cubo del III ordine (v. [3]$_6$) alla ricerca di un sistema lineare di quadriche a Jacobiana identicamente nulla. Per facilitare la scrittura useremo le variabili a, b, c, d, ... al posto di x_0, x_1, x_2, x_3, ...

Consideriamo il sistema lineare di quadriche

$$\rho_0 A+\rho_1 B+\rho_2 C+\rho_3 D+\rho_4 E+\rho_5 F+\rho_6 G+\rho_7 H+\rho_8 I+\rho_9 A'+\rho_{10} B'+\rho_{11} C'$$
$$+\rho_{12} D'+\rho_{13} E'+\rho_{14} F'+\rho_{15} G'+\rho_{16} H'+\rho_{17} I'=0$$

in cui

$$\begin{array}{ll}
A'=eu-iq+hr-ft & A=av\\
B'=du-ip+gr-fs & B=bv\\
C'=dt-hp+gq-es & C=cv\\
D'=bu-im+hn-ct & D=dv\\
E'=au-il+gn-bs & E=ev\\
F'=at-lh+gm-bs & F=fv\\
G'=br-fm+en-cq & G=gv\\
H'=ar-fl+dn-cp & H=hv\\
I'=aq-el+dm-bp & I=iv\,.
\end{array}$$

Queste 18 quadriche linearmente indipendenti soddisfano al legame funzionale

$$AA'+BB'+CC'+DD'+EE'+FF'+GG'+HH'+II'=0\,.$$

Infatti il legame è determinato dallo sviluppo del deter-cubo effettuato partendo dalla faccia verticale sinistra

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} av & a & l & & & & & & \\ bv & b & m & & & & & & \\ cv & c & n & dv & d & p & & & \\ & & & ev & e & q & & & \\ & & & fv & f & r & gv & g & s \\ & & & & & & hv & h & t \\ & & & & & & iv & i & u \end{vmatrix} = 0\,.$$

Esistendo solo questo legame tra le 18 quadriche, si tratta di un sistema $L_{17/17}$ di S_{18}.

Infatti ricavando da quattro delle (1) q, r, t, u e sostituendo nelle altre, si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{aligned}
&m(di+fg) + n(-dh-eg) + p(ch-bi) + s(ce-bf) = 0\\
&l(-di-gf) + n(2dg) + p(ai-cg) + s(af-cd) = 0\\
&l(dh+ge) + m(-2dg) + p(bg-ah) + s(bd-ae) = 0\\
&l(bi-ch) + m(cg-ai) + n(ah-bg) = 0\\
&l(bf-ce) + m(cd-af) + n(ae-bd) = 0
\end{aligned}$$

il cui determinante principale è dispari ed emisimmetrico, quindi è nullo.

Perciò la prima equazione risulta combinazione lineare delle altre.

Risolvendo il sistema delle quattro rimanenti equazioni e sostituendo nelle altre, si ottiene

$$a=1 \quad b=\beta \quad c=\gamma \quad d=\delta \quad e=\varepsilon \quad f=\varphi \quad g=\vartheta \quad h=\psi$$

$$i=\xi \quad l=\alpha \quad m=\alpha\beta \quad n=\alpha\gamma \quad p=\alpha\delta \quad q=\alpha\varepsilon \quad r=\alpha\varphi$$

$$s=\alpha\vartheta \quad t=\alpha\psi \quad u=\alpha\xi \quad v=0\,.$$

Si tratta quindi di una V_9 razionale di S_{17} situata sull'iperpiano $v=0$.

Eliminando i parametri si ottiene

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}=\frac{d}{p}=\frac{e}{q}=\frac{f}{r}=\frac{g}{s}=\frac{h}{t}=\frac{i}{u}$$

che risultano le equazioni di una varietà di Segre.

Ma oltre alla V_9 di Segre dell'S_{17}, tutte le quadriche del sistema dato hanno per base un S_9 di equazioni

$$a=0 \qquad b=0 \qquad c=0 \qquad d=0 \qquad e=0 \qquad f=0 \qquad g=0 \qquad h=0 \qquad i=0 .$$

Proiettando da un punto generico P di S_{18} l'S_9 si ottiene un S_{10} che interseca la V_9 secondo una retta esterna alla varietà comune tra V_9 ed S_9 e ciò conferma che per P passando ∞^1 corde della varietà base del sistema formato dalla V_9 e dall'S_9: infatti tali corde giacciono tutte su un piano. Quindi la Jacobiana ha caratteristica $18-1=17$ e la varietà base risulta riducibile e composta dalla V_9 di Segre e dall'S_9 come asserisce il teorema.

Consideriamo ora il sistema lineare di 18 quadriche dell'S_{15}

$$\rho_0 A+\rho_1 B+\rho_2 C+\rho_3 D=\rho_4 E+\rho_5 F+\rho_6 A_1+\rho_7 B_1+\rho_8 C_1+\rho_9 D_1+\rho_{10} E_1$$
$$+\rho_{11} F_1+\rho_{12} A_2+\rho_{13} B_2+\rho_{14} C_2+\rho_{15} D_2+\rho_{16} E_2+\rho_{17} F_2=0$$

in cui le quadriche espresse mediante le variabili a, b, c, d, e, f, g, h, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1, sono

$$\begin{array}{lll}
A=ad_1-bc_1+da_1-cb_1 & A_1=eh-fg & A_2=e_1h_1-f_1g_1 \\
B=eh_1-fg_1+he_1-gf_1 & B_1=ad-bc & B_2=a_1d_1-b_1c_1 \\
C=af_1-be_1+fa_1-cb_1 & C_1=ch-dg & C_2=c_1h_1-d_1g_1 \\
D=ch_1-dg_1+hc_1-gd_1 & D_1=af-be & D_2=a_1f_1-b_1e_1 \\
E=ah_1-bg_1+ha_1-gb_1 & E_1=cf-de & E_2=c_1f_1-d_1e_1 \\
F=cf_1-de_1+fc_1-ed_1 & F_1=ah-bg & F_2=a_1h_1-b_1g_1 .
\end{array}$$

Queste 18 quadriche di S_{15} soddisfano identicamente ai seguenti cinque legami funzionalmente indipendenti e compatibili fra loro

$$\text{(I)} \qquad AB-CD+EF+A_1B_2+B_1A_2-C_1D_2-D_1C_2+E_1F_2+F_1E_2=0$$

$$\text{(II)} \qquad AA_1+BB_1-CC_1-DD_1+EE_1+FF_1=0$$

$$\text{(III)} \qquad AA_2+BB_2-CC_2-DD_2+EE_2+FF_2=0$$

$$\text{(IV)} \qquad A_1B_1-C_1D_1+E_1F_1=0$$

$$\text{(V)} \qquad A_2B_2-C_2D_2+E_2F_2=0\,.$$

Il primo legame è dovuto al fatto che il deter-cubo del IV ordine (v. $[3]_6$)

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{cccccccccccccccc}
a & b & a & b &&&&&&&&&&&& \\
c & d & c & d &&&&&&&&&&&& \\
e & f & e & f &&&&&&&&&&&& \\
g & h & g & h & a_1 & b_1 & a_1 & b_1 &&&&&&&& \\
&&&& c_1 & d_1 & c_1 & d_1 &&&&&&&& \\
&&&& e_1 & f_1 & e_1 & f_1 &&&&&&&& \\
&&&& g_1 & h_1 & g_1 & h_1 & a & b & a & b &&&& \\
&&&&&&&& c & d & c & d &&&& \\
&&&&&&&& e & f & e & f &&&& \\
&&&&&&&& g & h & g & h & a_1 & b_1 & a_1 & b_1 \\
&&&&&&&&&&&& c_1 & d_1 & c_1 & d_1 \\
&&&&&&&&&&&& e_1 & f_1 & e_1 & f_1 \\
&&&&&&&&&&&& g_1 & h_1 & g_1 & h_1
\end{array}\right|=0$$

è identicamente nullo per avere due coppie di faccie verticali uguali.

Il secondo e il terzo legame sono espressi da due deter-cubi analoghi aventi tre faccie orizzontali uguali.

I legami (IV) e (V) sono espressi da banali determinanti del quart'ordine

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \\ a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{vmatrix}=0 \qquad\qquad \Delta_5=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 & g_1 \\ b_1 & d_1 & f_1 & h_1 \\ a_1 & c_1 & e_1 & g_1 \\ b_1 & d_1 & f_1 & h_1 \end{vmatrix}=0\,.$$

Poiché le 18 quadriche di S_{15} soddisfano a 5 legami indipendenti, la caratteristica del loro sistema è $18-5=13$. Si tratta quindi di un $L_{17/13}$ di S_{15}.

In virtù di un noto teorema (v. $[3]_5$) per un punto generico di S_{15} dovranno passare ∞^2 corde della varietà base del sistema costituenti un S_3.

Si verifica immediatamente che la varietà base del sistema è la V_8 di Segre dell'S_{15} di equazioni cartesiane

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1}=\frac{e_1}{f_1}=\frac{g_1}{h_1}\,.$$

Basta infatti scrivere le sue equazioni parametriche

$$\begin{array}{llllllll} a=1 & c=\mu & e=\nu & g=\sigma & a_1=\varphi & c_1=\psi & e_1=\eta & g_1=\vartheta \\ b=\zeta & d=\mu\zeta & f=\nu\zeta & h=\sigma\zeta & b_1=\varphi\zeta & d_1=\psi\zeta & f_1=\eta\zeta & h_1=\vartheta\zeta \end{array}$$

e verificare che esse annullano tutte le quadriche del sistema.

Ma le corde di questa varietà sono in numero tale che per un punto di S_{15} ne passano ∞^2 costituenti un S_3. Lo si prova facilmente scegliendo un punto qualsiasi di S_{15} $\mathrm{P}(a, b, c, d, e, f, g, h, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1)$ ed imponendo che due punti della varietà di Segre $\mathrm{Q}(1, \zeta, \mu, \mu\zeta, \ldots)$, $\mathrm{R}(1, \zeta_1, \mu_1, \mu_1\zeta_1, \ldots)$ siano allineati con esso.

Perché ciò accada occorre che tutti i minori del terzo ordine estratti dalla matrice

$$\left\|\begin{array}{cccccccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ 1 & \zeta & \mu & \mu\zeta & \nu & \nu\zeta & \sigma & \sigma\zeta & \varphi & \varphi\zeta & \psi & \psi\zeta & \eta & \eta\zeta! & \vartheta & \vartheta\zeta \\ 1 & \zeta_1 & \mu_1 & \mu_1\zeta_1 & \nu_1 & \nu_1\zeta_1 & \sigma_1 & \sigma_1\zeta_1 & \varphi_1 & \varphi_1\zeta_1 & \psi_1 & \psi_1\zeta_1 & \eta_1 & \eta_1\zeta_1 & \vartheta_1 & \vartheta_1\zeta_1 \end{array}\right\|$$

siano tutti nulli. Perché ciò avvenga è sufficiente che siano nulli il primo e gli altri tredici che si ottengono sostituendo all'ultima sua colonna tutte le altre.

Si ottiene così un sistema algebrico di 14 equazioni in 16 incognite. Eliminando le radici che corrispondono alle rette tangenti alla varietà ($\zeta=\zeta_1$, $\mu=\mu_1$, etc.) tale sistema risulta simmetrico di II grado e fornisce sempre una soluzione dipendente linearmente da due parametri e la sua simmetrica, quella che corrisponde allo scambio di R con Q, e ciò prova l'asserto.

Bibliografia

[1] E. BERTINI, *Sui sistemi lineari*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A (2) **15** (1880).

[2] G. BONFERRONI, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare*, R. Accad. Sci. Torino **50** (1914-15), 425-438.

[3] L. DEGOLI: $[\bullet]_1$ *Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée*, Studia Sci. Math. Hungar. **17** (1982), 325-330; $[\bullet]_2$ *Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*, Collect. Math. **33** (1982), 126-138; $[\bullet]_3$ *Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle*, Demonstratio Math. **10** (1983), 723-734; $[\bullet]_4$ *Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*, Matematiche **26** (1984), 33-43; $[\bullet]_5$ *Un teorema sui sistemi lineari di quadriche riducibili ed irriducibili*, An. Stiint. Univ. «Al. I. Cuza» **31** (1985), 221-228; $[\bullet]_6$ *Sur un'application du déter-cube*, Geom. Dedicata, Mathematisches Institut, Utrecht, December 1987.

[4] L. MURACCHINI, *Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria* (p.te II), Riv. Mat. Univ. Parma (1) **3** (1952), 75-89.

[5] A. TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, Atti R. Accad. Sc. Torino, Nota II, **51** (1916), 695-714, III, **55** (1919-20), 480-500.

[6] S. XAMBÒ, *On projectives varieties of minimal degree*, Collect. Math. **32** (1981), 149-163.

Summary

We show that the base-variety of a linear system of quadrics which is irreducible of first kind and has Jacobian with characteristic r-k, is either a double S_k, a reducible variety which possesses two rational sub-varieties or a rational irreducible variety. We expound significant examples of all these situations.

***