Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 315-327

ENRICO VITALI (*)

# Stime della funzione di Green per operatori parabolici ed applicazioni (**)

## 1 - Introduzione

Nel presente lavoro vengono considerate le soluzioni fondamentali e le funzioni di Green di operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente parabolici, fornendone stime nelle quali compare esplicitamente la dipendenza da alcuni parametri caratteristici dei coefficienti; da queste limitazioni, già note nella loro struttura (che è essenzialmente quella di soluzioni fondamentali di opportune equazioni del calore) si può quindi ricavare espressamente il modo in cui variano in relazione a quantità quali il massimo modulo dei coefficienti della parte principale dell'operatore e la costante di coercività. Come applicazione si danno poi stime fini, relative ai medesimi parametri, per le soluzioni di problemi ai valori iniziali ed al contorno e problemi di Cauchy.

Più precisamente consideriamo l'operatore differenziale in forma di divergenza

$$Lu = u_t - (a_{ij}(x,\ t)\, u_{x_i} + a_j(x,\ t)\, u)_{x_j} - b_j(x,\ t)\, u_{x_j} - c(x,\ t)\, u \tag{1.1}$$

(si conviene di sommare sugli indici ripetuti, per $i,\ j = 1,\ \dots,\ n$ con $n \geq 1$) dove i coefficienti sono definiti e misurabili in $\Sigma \times (0,\ T]$, con $\Sigma$ dominio aperto di $\mathbb{R}^n$ non necessariamente limitato e $T$ numero positivo fissato. $L$ può essere considerato definito su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$ ponendo $Lu = u_t - \Delta u$ per $(x,\ t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Sigma \times (0,\ T])$; fatta questa convenzione richiediamo che i coefficienti di $L$ soddisfino le seguenti ipotesi:

($A_1$) esistono costanti $0 < \nu,\ \ M < \infty$ tali che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e per

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, I-43100 Parma.

(**) Ricevuto: 6-IV-1987.

quasi ogni $(x, t)$

$$a_{ij}(x, t)\,\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \qquad |a_{ij}(x, t)| \leq M\ ;$$

($A_2$) esistono costanti $0 \leq M_0 < \infty$ e $0 \leq R_0 \leq \infty$ tali che, posto $Q_0 = \{x \in \mathrm{R}^n: |x| < R_0\} \times (0, T]$, i coefficienti $a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ appartengono ad uno stesso spazio $L^{p,q}(Q_0)$ (per la definizione di tali spazi vedi [1], p. 608); così pure per i coefficienti $b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$; le coppie $(p, q)$ siano tali che

$$\text{(i)} \qquad 2 < p,\ q \leq \infty \qquad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}\ ;$$

per il coefficiente $c(x, t)$ si richiede l'appartenenza allo spazio $L^{p,q}(Q_0)$ dove ora

$$\text{(ii)} \qquad 1 < p,\ q \leq \infty \qquad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} < 1\ ;$$

sia inoltre $|a_j(x, t)|$, $|b_j(x, t)|$, $|c(x, t)| \leq M_0$ per quasi ogni $|x| \geq R_0$ e $t \in (0, T]$.

In queste ipotesi l'esistenza della soluzione fondamentale e della funzione di Green (deboli) e le relative stime sono state stabilite da Aronson [1]. Per le costanti che compaiono in tali stime ne viene ora data la dipendenza dalla struttura dell'operatore $L$, intendendo con ciò la dipendenza da $n$, dalle quantità che intervengono nelle ipotesi ($A_1$), ($A_2$) (cioè $\nu$, $M$, $M_0$, $R_0$, $\|a_j\|$, $\|b_j\|$, $\|c\|$ (calcolate in $Q_0$) e le varie coppie $(p, q)$ di esponenti) e dalla scelta di un numero $0 < \vartheta \leq 1$ tale che

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &p \geq \frac{2}{1-\vartheta} \quad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1-\vartheta}{2} \quad \text{per le coppie } (p, q) \text{ relative ai coefficienti } a_j \text{ e } b_j \\ &p \geq \frac{1}{1-\vartheta} \quad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} \leq 1 - \vartheta \quad \text{per la coppia } (p, q) \text{ relativa al coefficiente } c. \end{aligned}$$

In 2 (Teoremi 1, 2) seguendo quanto esposto in [1] verranno trattate limitazioni superiori ed inferiori sia per la soluzione fondamentale $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ nella striscia $S = \mathrm{R}^n \times (0, T]$ che per la funzione di Green $\gamma(x, t; \xi, \tau)$ nel cilindro $Q = \Omega \times (0, T]$ con $\Omega$ dominio aperto limitato di $\mathrm{R}^n$. La limitazione superiore permetterà di dare (v. 3, Teorema 4) una stima per la norma $L^\infty$ della soluzione del problema di Cauchy

$$
(1.3) \qquad \begin{aligned} & Lu = f(x,\ t) \qquad (x,\ t) \in S \\ & u(x,\ 0) = u_0(x) \qquad x \in \mathrm{R}^n \end{aligned}
$$

dove $u_0 \in L^\infty(\mathrm{R}^n)$ e $f \in L^{p,q}(S)$ con $p,\ q$ soddisfacenti (ii). In modo analogo (Teorema 5) viene data una stima per la soluzione del problema ai valori iniziali ed al contorno

$$
(1.4) \qquad \begin{gathered} Lu = f(x,\ t) \qquad (x,\ t) \in Q \\ u(x,\ 0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega \qquad\qquad u(x,\ t) = 0 \qquad (x,\ t) \in \partial\Omega \times [0,\ T] \end{gathered}
$$

nel caso $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^{p,q}(Q)$ con $p,\ q$ soddisfacenti (ii).

Introducendo ipotesi di regolarità nei coefficienti si ottiene per la soluzione fondamentale l'esistenza e continuità delle derivate spaziali del primo e secondo ordine e della derivata temporale del primo ordine. Il problema delle soluzioni fondamentali in condizioni di regolarità per l'operatore è classico: in proposito ci si può riferire, ad esempio, alle esposizioni di Friedman [3] e Ladyženskaja-Solonnikov-Urel'ceva [4].

Sia quindi

$$
(1.5) \qquad Lu = u_t - a_{ij}(x,\ t)\, u_{x_i x_j} - b_j(x,\ t)\, u_{x_j} - c(x,\ t)\, u
$$

dove i coefficienti sono definiti nella striscia $\bar{S} = \mathrm{R}^n \times [0,\ T]$, sempre con $T$ numero positivo fissato. Supponiamo simmetrica la matrice $(a_{ij}(x,\ t))$ e che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

($\mathrm{B}_1$) esiste una costante $\nu > 0$ tale che per ogni $\xi \in \mathrm{R}^n$ e $(x,\ t) \in \bar{S}$

$$
a_{ij}(x,\ t)\, \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \ ;
$$

($\mathrm{B}_2$) i coefficienti di $L$ sono funzioni continue e limitate in $\bar{S}$: sia $|a_{ij}| \leq M$, $|b_j|$, $|c| \leq M_0$; esista inoltre un valore $0 < \alpha \leq 1$ e costanti $A$, $A_0$ tali che per ogni $(x,\ t)$

e $(x^0, t^0)$ in $\bar{S}$ si abbia

(1) $|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(x^0, t^0)| \leq A(|x - x^0|^\alpha + |t - t^0|^{\alpha/2})$

(2) $|b_j(x, t) - b_j(x^0, t)| \leq A_0 |x - x^0|^\alpha$

(3) $|c(x, t) - c(x^0, t)| \leq A_0 |x - x^0|^\alpha$.

In queste ipotesi verranno trattate (Teorema 3) stime per le derivate della soluzione fondamentale $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ in $\bar{S}$; oltre alla costante di coercività ed ai massimi moduli dei coefficienti compariranno qui l'esponente $\alpha$ ed i coefficienti di Hölder. Con riferimento al problema di Cauchy (1.3), dove ora $u_0$ e $f$ vengono supposte continue, limitate e $f$ soddisfacente una condizione di Hölder, vengono date (Teorema 6) stime per le derivate della soluzione, sempre sfruttandone la rappresentazione mediante la soluzione fondamentale.

## 2 - Stime per la soluzione fondamentale e la funzione di Green

Nei seguenti teoremi supporremo $\nu \leq 1$ e $M \geq 1$ (come del resto è sempre possibile assumere) per semplificare le espressioni delle varie costanti in questione.

Consideriamo dapprima l'operatore $L$ nella (1.1) a coefficienti non regolari ed indichiamo con $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ la soluzione fondamentale debole di $Lu = 0$ in $S = \mathbb{R}^n \times (0, T]$ come definita in [1].

Teorema 1. *Sia $L$ l'operatore* (1.1) *soddisfacente le ipotesi* $(A_1)$ $(A_2)$. *Esistono allora costanti positive $K_1$, $K_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ dipendenti solo da $T$ e dalla struttura di $L$ tali che per $(x, t; \xi, \tau) \in S \times S$ con $t > \tau$*

$$K_1 (t - \tau)^{-n/2} \exp\left(-\alpha_1 \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}\right) \leq \Gamma(x, t; \xi, \tau) \leq K_2 (t - \tau)^{-n/2} \exp\left(-\alpha_2 \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}\right).$$

*Per $\nu \leq 1$ e $M \geq 1$ si può assumere*

$$\alpha_1 = \eta \frac{\sigma^2}{\vartheta(\sigma - 1)} (T + 1) \frac{M^2 + \nu C}{\nu^2} \log\left(\eta_0 \frac{M^2 + C}{\nu^2}\right) \qquad \alpha_2 = \left(2^{10} n^2 \frac{M^2}{\nu}\right)^{-1}$$

$$K_1 = T^{n/2} \left(\eta_0 \frac{M^2 + C}{\nu^2}\right)^{-\eta(\sigma^2/\vartheta(\sigma - 1)) \cdot ((T+1)^2/T) \cdot (M^2 + \nu C)/\nu^2} = T^{n/2} \exp\left(-\alpha_1 \frac{T + 1}{T}\right)$$

$$K_2 = \eta_1 2^{1/\mu + T/\lambda} \left(\eta_0 \frac{M^2 + C'}{\nu^2}\right)^{\eta(\sigma^2/\vartheta(\sigma - 1)) \cdot (M^2 + \nu C')/\nu^2}$$

*dove con $\eta > 1$ si indica una costante dipendente solo da $n$, e*

$$\sigma = \sigma(n, \vartheta) = \begin{cases} 1 + 2\vartheta/n & se\ n \neq 2 \\ 1 + \vartheta/2 & se\ n = 2 \end{cases}$$

$$\eta_0 = \eta_0(n, \vartheta) = \eta K_0(\sigma - 1)^{-2} (2\sigma)^{2((\sigma-1)/\sigma)s}$$

$$\eta_1 = \eta_1(n, \vartheta) = (\eta K_0)^{(2\sigma-1)/2(\sigma-1)} (2\sigma)^s$$

*con* $s = \sum_{j=1}^{\infty} j\sigma^{-j}$; *per* $n = 2$ *è* $K_0 = \max\{1, [(\vartheta^{-1} + 3/2)/2\sqrt{2}]^2\}$, *mentre per* $n \neq 2$ *è* $K_0 > 1$ *dipendente solo da* $n$; *abbiamo poi*

$$\mu = \{\frac{\nu^2}{\eta K_0(c' + \nu)}\}^{1/\vartheta} \qquad \lambda = \min\{1, (\frac{\nu^2}{2^8 K_0[\Sigma_j(\| a_j \|^2 + \| b_j \|^2) + \nu \| c \|]})^{1/\vartheta}\}$$

$$C = \Sigma_j(\| a_j \|^2 + \| b_j \|^2) + \nu \| c \| + M_0(\nu + M_0)$$

$$C' = (1 + T) [\Sigma_j(\| a_j \|^2 + \| b_j \|^2) + \nu \| c \|] + TM_0(\nu + M_0)$$

*le norme sono calcolate sull'insieme* $Q_0$ *della condizione* ($A_2$) *e* $\vartheta$ *ha il valore dato nelle* (1.2); *se* $L$ *si riduce alla sua parte principale il termine* $2^{T/\lambda}$ *nell'espressione di* $K_2$ *non compare.*

L'esistenza delle costanti $K_1$, $K_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ del Teorema 1 è dimostrata in [1] (Teoremi 7, 10). Notiamo che l'ipotesi ($A_2$) assunta per l'operatore (1.1) è più forte del corrispondente gruppo di ipotesi in [1]; così, mentre in quest'ultimo per $R_0 = \infty$ si richiede che $\sup \| c \|_{p,q} < \infty$ dove le norme sono prese su tutti i cilindri della forma $R(\sigma) \times (0, T)$ con $R(\sigma)$ cubo in $\mathbb{R}^n$ di lato $\sigma = \min(1, \sqrt{T})$, ora si richiede che $c(x, t)$ stia in $L^{p,q}(S)$ ($S = \mathbb{R}^n \times (0, T]$); si è fatto ciò essenzialmente per semplificare l'espressione finale delle costanti, riportando il calcolo di tutte le norme all'insieme $Q_0$. La struttura di $K_1$, $K_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ nella forma espressa sopra si può ricavare seguendo la dimostrazione esposta in [1], esplicitando nelle costanti con cui di volta in volta si ha a che fare, la dipendenza dai parametri in questione. Per fare ciò è necessario un lavoro analogo su alcuni teoremi utilizzati in [1] ed esposti in [2]; fra essi due principalmente: un teorema sulla limitatezza locale ed una disuguaglianza di Harnack per soluzioni deboli. Per i dettagli vedi [5].

Dal Teorema 1 se in particolare $L$ si riduce alla parte principale, abbiamo (potendosi assumere $\vartheta = 1$)

$$\alpha_1 = \eta(T+1)\left(\frac{M}{\nu}\right)^2 \log\left(\eta\frac{M}{\nu}\right) \qquad \alpha_2 = \left\{2^{10} n^2 \frac{M^2}{\nu}\right\}^{-1}$$

$$K_1 = T^{n/2}\left(\eta\frac{M}{\nu}\right)^{-\eta((T+1)^2/T)\cdot(M/\nu)^2} = T^{n/2}\exp\left(-\alpha_1\frac{T+1}{T}\right) \qquad K_2 = \left(\eta\frac{M}{\nu}\right)^{\nu(M/\nu)^2}$$

dove $\eta > 1$ dipende solo da $n$.

Consideriamo ora la funzione di Green $\gamma(x, t; \xi, \tau)$ di $Lu = 0$ nel cilindro $Q = \Omega \times (0, T]$, con $\Omega$ dominio aperto limitato di $\mathrm{R}^n$, come definita in [1]. Allora ([1], Teorema 9) vale per essa la medesima limitazione superiore valida per la soluzione fondamentale $\Gamma$ nella striscia $S$.

Per la limitazione inferiore abbiamo

Teorema 2. *Sia $L$ l'operatore* (1.1) *soddisfacente le ipotesi* ($A_1$) ($A_2$) *e sia $\Omega'$ un sottodominio convesso di $\Omega$ tale che la distanza $\delta$ di $\Omega'$ da $\partial\Omega$ sia positiva. Allora esistono costanti positive $K_3$ e $\alpha_3$ dipendenti solo da $\delta$, $T$ e dalla struttura di $L$ tali che*

$$\gamma(x, t; \xi, \tau) \geq K_3(t-\tau)^{-n/2}\exp\left(-\alpha_3\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)$$

*per tutti i punti $x$, $\xi \in \Omega'$ e*

$$\tau < t \leq \min\{T, \tau + \frac{T}{8}d^2(\xi, \partial\Omega')\}$$

*per ogni $\tau \in [0, T)$, oppure*

$$\max\{0, t - \frac{T}{8}d^2(x, \partial\Omega')\} \leq \tau < t$$

*per ogni* $t \in (0, T]$. *Per* $\nu \leq 1$ *e* $M \geq 1$ *si può assumere*

$$\alpha_3 = \eta \frac{\sigma^2}{\vartheta(\sigma-1)} [T(1+\frac{1}{\delta^2})+1] \cdot \frac{M^2+\nu C}{\nu^2} \log(\eta_0 \frac{M^2+C}{\nu^2})$$

$$K_3 = T^{m/2}(\eta_0 \frac{M^2+C}{\nu^2})^{-\eta(\sigma^2/\vartheta(\sigma-1))[(T+1)/T][T\cdot(1+1/\delta^2)+1]\cdot(M^2+\nu C)/\nu^2} = T^{m/2} \exp(-\alpha_3 \frac{T+1}{T})$$

*dove* $\eta$, $\eta_0$ *e* $C$ *sono come nel precedente Teorema* 1.

La dimostrazione si ricava da quelle dei Teoremi 8 e 9 in [1], seguendone lo svolgimento e risalendo ai vari teoremi che vengono impiegati. Si rimanda a [5] per i dettagli.

Imponiamo ora ai coefficienti di $L$ condizioni di regolarità considerando l'operatore (1.5) con le relative ipotesi $(B_1)$ $(B_2)$; in tal caso utilizzeremo la soluzione fondamentale $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ di $Lu=0$ in $\bar{S} = \mathbb{R}^n \times [0, T]$ ottenuta con il classico metodo delle parametrici ([3], [4]).

Da $(B_1)$ e dalla limitatezza degli $a_{ij}$ segue l'esistenza di costanti positive $\lambda_0$ e $\lambda_1$ tali che, detti $a^{ij}(x, t)$ gli elementi della matrice inversa della $(a_{ij}(x, t))$, risulta per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $(x, t) \in \bar{S}$

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq a^{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \leq \lambda_1 |\xi|^2 ;$$

perciò anche gli elementi $a^{ij}(x, t)$ sono limitati: sia $M'$ un limitante di $|a^{ij}|$. Per avere $\lambda_0$, $\lambda_1$ e $M'$ espressi tramite $M$ e $\nu$ assumiamo

$$\lambda_0 = \frac{1}{nM} \qquad \lambda_1 = M' = \frac{1}{\nu} ; \tag{2.1}$$

utilizziamo poi la disuguaglianza

$$\inf_{(x,t)\in\bar{S}} \det(a_{ij}(x, t)) \geq \nu^n . \tag{2.2}$$

Teorema 3. *Sia* $L$ *l'operatore* (1.5) *soddisfacente le ipotesi* $(B_1)$ $(B_2)$. *Esistono allora costanti positive* $C_1$, $C_2$ *e* $C_3$ *tali che per* $(x, t; \xi, \tau) \in \bar{S} \times \bar{S}$

*con* $t > \tau$

$$|D_x^s \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq C_s (t-\tau)^{-(n+s)/2} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{8nM(t-\tau)}\right) \qquad (s = 1,\ 2)$$

$$|D_t \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq C_3 (t-\tau)^{-(n+2)/2} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{8nM(t-\tau)}\right).$$

*Per* $\nu \leq 1$ *e* $M \geq 1$ *si può assumere*

$$C_1 = \eta\alpha^{-1} \nu^{-(n+2)/2} M^{1/2} \exp\{(\eta\alpha^{-1}(\frac{M}{\nu})^{n/2} (A\nu^{-2} M^{3/2} + C)\, T^{\alpha/2})^{\beta}\}$$

$$C_2 = \eta\alpha^{-1} \nu^{-(n+4)/2} M\{1 + \nu^{-(n+1)} M^{(2n+1)/2} A T^{\alpha/2}$$

$$+ \alpha^{-1} \nu^{-n/2} M^{(2n+1)/4} (\nu^{-3} M^2 A + C')\, T^{\alpha/2}\} \exp\{(\eta\alpha^{-1}(\frac{M}{\nu})^{n/2} (A\nu^{-2} M^{3/2} + C)\, T^{\alpha/2})^{\beta}\}$$

$$C_3 = \nu C_2$$

*dove* $\eta > 1$ *dipende solo da* $n$, *e*

$$C = (\nu^{-1} M^{1/2} + T^{1/2}) M_0 T^{(1-\alpha)/2} \qquad C' = (\nu^{-1} M^{1/2} + T^{1/2})(A_0 T^{1/2} + \nu^{-1} M^{1/2} M_0 T^{(1-\alpha)/2})$$

$$\beta = \beta(\alpha) = \begin{cases} 2/\alpha & se\ 2/\alpha \in \mathbb{N} \\ [2/\alpha] + 1 & se\ 2/\alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

L'esistenza e l'espressione di $C_1$ si ricavano rapidamente seguendo quanto esposto in [3] (cap. 1); per $C_2$ e $C_3$ ci si può invece riferire a [4] (p. 356-378). Da [3] si ricava anche una stima per la soluzione fondamentale $\Gamma$ costruita con il metodo delle parametrici; questa tuttavia non è sostanzialmente migliore di quella fornita nel Teorema 1. Per i dettagli vedi [5], sviluppandone i risultati in base alle precedenti (2.1) e (2.2) ed alla disuguaglianza

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \leq \eta \exp(\eta a)^{\beta} \qquad (a > 0)$$

con $\eta$ e $\beta$ come sopra ($\Gamma$ funzione euleriana).

Nel Teorema 3 se in particolare $L$ si riduce alla parte principale è $C = C' = 0$.

**3 - Problema di Cauchy e problema ai valori iniziali ed al contorno: stime della soluzione**

Nell'applicare i risultati dei teoremi precedenti alla determinazione di stime per le soluzioni di problemi al contorno ci limitiamo per semplicità al caso in cui l'operatore $L$ sia ridotto alla sua parte principale.

Consideriamo quindi dapprima l'operatore $L$ in (1.1) nella forma

$$Lu = u_t - (a_{ij}(x, t)\, u_{x_i})_{x_j} \tag{3.1}$$

dove i coefficienti, supposti definiti e misurabili su tutto $S = \mathbb{R}^n \times (0, T]$, soddisfano la condizione ($A_1$) dell'Introduzione. Indichiamo con $\mathscr{E}^2(S)$ ([1], p. 638) l'insieme delle funzioni $u = u(x, t)$ definite e misurabili su $S$ per le quali esiste un numero $\lambda \geq 0$ tale che

$$\int\int_S e^{-\lambda |x|^2} u^2(x, t)\, dx\, dt < \infty \, .$$

Relativamente al problema

$$\begin{aligned} &Lu = f(x, t) && (x, t) \in S \\ &u(x, 0) = u_0(x) && x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.2}$$

abbiamo il

Teorema 4. *Sia $L$ l'operatore* (3.1). *Se $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L^{p,q}(S)$ con $p$, $q$ soddisfacenti la condizione* (ii), *allora la soluzione $u$ in $\mathscr{E}^2(S)$ del problema di Cauchy* (3.2) *soddisfa la disuguaglianza*

$$\|u\|_{L^\infty(S)} \leq C(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^{p,q}(S)})$$

*dove per $\nu \leq 1$ e $M \geq 1$ si può assumere*

$$C = \eta_0 \Big(\eta \frac{M}{\nu}\Big)^{\eta (M/\nu)^2} \qquad \text{con } \eta > 1 \text{ dipendente solo da } n$$

$$\eta_0 = \eta_0(n, T, p, q) = \eta \max\{1, \ (1 - \frac{n}{2p} q')^{-1/q'}\, T^{[(1-1/q)] - (n/2p)}\} \, .$$

Dim. Poiché il valore di $\alpha_2$ dato nel Teorema 1 non dipende da $T$, esiste sicuramente $\gamma>0$ tale che $T\leq\alpha_2/4\gamma$; allora la soluzione debole in $\mathcal{E}^2(S)$ del problema (3.2) nelle ipotesi poste è data da ([1], Teorema 10)

$$u(x,\ t)=\int_{\mathrm{R}^n}\Gamma(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,u_0(\xi)\,d\xi+\iint_S\Gamma(x,\ t;\ \xi,\ \tau)f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau\,. \tag{3.3}$$

Utilizzando il Teorema 1 valutiamo subito il primo integrale ed inoltre otteniamo

$$\|\Gamma(x,\ t;\ \cdot,\ \cdot)\|_{p,q}\leq K_2\Big(\frac{\pi}{\alpha_2 p'}\Big)^{n/2p'}\Big(1-\frac{n}{2p}q'\Big)^{-1/q'}T^{((1-1/q))-(n/2p)}$$

che permette di valutare, tramite la disuguaglianza di Hölder, il secondo integrale della rappresentazione di $u$.

Poiché, come si è detto, per la funzione di Green $\gamma$ di $Lu=0$ in un cilindro $Q=\Omega\times(0,\ T]$, con $\Omega$ dominio aperto limitato di $\mathrm{R}^n$, sussiste la medesima limitazione superiore valida per la soluzione fondamentale $\Gamma$ nella striscia $S$, in modo analogo al teorema precedente possiamo trattare il problema

$$\begin{aligned}&Lu=f(x,\ t)\qquad (x,\ t)\in Q\\ &u(x,\ 0)=u_0(x)\qquad x\in\Omega\qquad\qquad u(x,\ t)=0\qquad (x,\ t)\in\partial\Omega\times[0,\ T]\,.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Impiegando la rappresentazione della soluzione data nel Teorema 9 in [1] abbiamo quindi

Teorema 5. *Sia $L$ l'operatore* (3.1). *Se $u_0\in L^\infty(\Omega)$ e $f\in L^{p,q}(Q)$ con $p$, $q$ soddisfacenti la condizione* (ii), *allora la soluzione del problema ai valori iniziali ed al contorno* (3.4) *soddisfa la disuguaglianza*

$$\|u\|_{L^\infty(Q)}\leq C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\|f\|_{L^{p,q}(Q)})$$

*dove per $\nu\leq 1$ e $M\geq 1$ la costante $C$ è quella del Teorema* 4.

Passiamo al caso dei coefficienti regolari, considerando quindi l'operatore

$$Lu=u_t-a_{ij}(x,\ t)\,u_{x_ix_j} \tag{3.5}$$

i cui coefficienti, definiti su $\bar{S} = \mathrm{R}^n \times [0, T]$, soddisfano le condizioni ($B_1$) ($B_2$) poste per l'operatore (1.5).

Teorema 6. *Sia $L$ l'operatore* (3.5). *Siano $u_0(x)$ e $f(x, t)$ funzioni continue e limitate in $\mathrm{R}^n$ e $\bar{S}$ rispettivamente, ed esista una costante $A_f$ tale che per ogni $x$, $x^0 \in \mathrm{R}^n$ e $t \in [0, T]$*

$$|f(x, t) - f(x^0, t)| \leq A_f |x - x^0|^\alpha$$

*dove $\alpha$ è il medesimo esponente che figura nella condizione* ($B_2$). *Allora per la soluzione $u$ del problema di Cauchy* (3.2) *vale in $S$ la disuguaglianza*

$$|D_x u(x, t)| \leq C' \left( \frac{\max |u_0|}{t^{1/2}} + T^{1/2} \max |f| \right)$$

*dove per $\nu \leq 1$ e $M \geq 1$ è*

$$C' = \eta \alpha^{-1} \left(\frac{M}{\nu}\right)^{(n+2)/2} \exp\{(\eta \alpha^{-1} \left(\frac{M}{\nu}\right)^{(n+4)/2} A T^{\alpha/2})^\beta\}$$

*dove $\eta > 1$ dipende solo da $n$, e $\beta$ è come nel Teorema* 3. *Per $\nu \leq 1$, $M \geq 1$ e $A \geq 1$ abbiamo inoltre in $S$*

$$|D_x^2 u(x, t)|, \ |D_t u(x, t)| \leq C'' \{A_f + A \left( \frac{\max |u_0|}{t} + \max |f| + 1 \right)\}$$

*dove*

$$C'' = \exp((\eta \alpha^{-1} \left(\frac{M}{\nu}\right)^{(n+4)/2} A (T + 1))^\beta)$$

*con $\eta$ e $\beta$ come sopra.*

Dim. Nelle ipotesi poste la soluzione del problema (3.2) è ancora data ([3], cap. 1) dalla rappresentazione (3.3). Il risultato relativo a $D_x u$ si ottiene subito applicando le stime per $D_x \Gamma$ fornite nel Teorema 3. Per $D_x^2 u$ abbiamo (v. [3])

$$\begin{aligned} (3.6) \qquad & D_x^2 u(x, t) \\ &= \int_{\mathrm{R}^n} D_x^2 \Gamma(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) \, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathrm{R}^n} D_x^2 Z(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{\mathrm{R}^n} D_x^2 Z(x, t; \xi, \tau) \hat{f}(\xi, \tau) \, d\xi = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

dove

$$Z(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$$

$$= (4\pi)^{-n/2}[\det(a^{ij}(\xi,\ \tau))]^{1/2}(t-\tau)^{-n/2}\exp\left(-\frac{a^{ij}(\xi,\ \tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(t-\tau)}\right)$$

è la parametrice impiegata nella costruzione della soluzione fondamentale $\Gamma$ e

$$\hat{f}(x,\ t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x,\ t;\ \xi,\ \tau) f(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau$$

con $\phi$ soluzione di una opportuna equazione integrale di Volterra, che interviene nella costruzione di $\Gamma$ ([3], p. 14). Mediante le stime del Teorema 3 si valuta subito il primo integrale $I_1$. Per $I_2$ abbiamo

$$I_2 = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} D_x^2 Z(x,\ t;\ \xi,\ \tau)[f(\xi,\ \tau) - f(x,\ \tau)]\, d\xi\, d\tau$$

$$+ \int_0^t f(x,\ \tau)\, d\tau \int_{\mathbf{R}^n} D_x^2 Z(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\, d\xi = J_1 + J_2\ .$$

Utilizzando una limitazione per $|D_x^2 Z|$ (v. [5]) e la condizione di Hölder soddisfatta da $f$ si valuta $J_1$, mentre per $J_2$ si sfrutta la

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} D_x^2 Z(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\, d\xi\right| \leq \eta \nu^{-(3/2)(n+2)} M^{(3/2)(n+1)} A (t-\tau)^{-1+\alpha/2}$$

(dove $\eta > 1$ dipende solo da $n$) che si ricava da [5]. Dunque (per $\nu \leq 1$ e $M \geq 1$) facendo comparire il rapporto $M/\nu$

$$|I_2| \leq \eta \alpha^{-1}\left(\frac{M}{\nu}\right)^{(3n+6)/2} T^{\alpha/2}(A_f + A \max|f|)\ .$$

Come per $I_2$ si ha poi

$$|I_3| \leq \eta \alpha^{-3}\left(\frac{M}{\nu}\right)^{n+3+\max(n/2,\,2)} A T^{\alpha/2} \cdot \exp\left(\left(\eta \alpha^{-1}\left(\frac{M}{\nu}\right)^{(n+4)/2} A T^{\alpha/2}\right)^{\beta}\right) \cdot (\max|f| + T^{\alpha/4})$$

(dove è ancora $\eta > 1$ dipendente solo da $n$, e $\beta$ ha il valore dato nel Teorema 3). Per trattare $I_3$ è però necessaria una valutazione di $\max|\hat{f}|$ ed una condizione di Hölder per $\hat{f}$: per queste basta rifarsi alle corrispondenti proprietà della funzione

$\phi$ (v. [5]). Supponendo ora anche $A \geq 1$ si ottiene la limitazione di $|D_x^2 u|$ nella forma enunciata (la cui compattezza tuttavia comporta, come si può rilevare dalla dimostrazione, alcune significative semplificazioni). In modo analogo si procede per $D_t u$.

## Bibliografia


[1] D. G. ARONSON, *Non-negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 607-694.

[2] D. G. ARONSON and J. SERRIN, *Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 25 (1967), 81-122.

[3] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[4] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV and N. N. UREL'CEVA, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs 23 (1968), 356-395.

[5] E. VITALI, *Stime fini delle funzioni di Green di operatori parabolici*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Parma, 1985.



## Summary

*This paper deals with sharp estimates of fundamental solutions and Green's functions for second-order linear parabolic operators: for these bounds we show the dependence on some characteristic parameters of the operator, the main ones being the $L^\infty$ norm of the principal coefficients and the coerciveness constant. As an application, estimates of the same kind are given for solutions of initial-boundary value or Cauchy problems.*


***