Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 39-48

PAOLA AZZIMONDI (*)

Generalizzazione di un risultato di J. Daneš (**)

1 - Introduzione

In questa Nota mi propongo di generalizzare negli H-spazi, e per due funzioni, un risultato di Daneš relativo al punto unito di una sola funzione in spazi metrici (cfr. Teorema 1 di [2]). Al solito, si chiama H-spazio uno spazio metrico generalizzato (E, d), più volte utilizzato (cfr., ad es., [1]), dove E è un insieme, e d è una metrica generalizzata, in generale non continua, che è definita positiva, simmetrica e che verifica anche la seguente proprietà: esistono un sottoinsieme A di $\mathfrak{R}^+$ contenente un intervallo $0 \ulcorner\!\!\urcorner a$ $(a > 0)$, una costante reale $\tau \geq 1$, e una funzione $\varphi: A \to \mathfrak{R}^+$ infinitesima nello zero, tali che, per ogni $x_1, x_2, x_3 \in E$, $d(x_1, x_2) \in A \Rightarrow d(x_1, x_3) \leq \varphi[d(x_1, x_2)] + \tau d(x_2, x_3)$ (*proprietà triangolare generalizzata*: p.t.g.) (1).

Precisamente (cfr. 2), dopo due lemmi preparatori, dimostro un teorema di punto unito comune, e passo poi ad un terzo lemma che serve a riformulare in una versione lievemente diversa il teorema stesso; la Nota termina con alcune osservazioni (cfr. 3).

2 - Lemmi e Teoremi

In ciò che segue farò riferimento: a due applicazioni $f_1, f_2: E \to E$; ad una funzione $\sigma: 0 \ulcorner\!\!\urcorner +\infty \to 0 \ulcorner\!\!\urcorner +\infty$ non decrescente, tale che, per $t > 0$, $\sigma(t) < t$ (e

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, via Università 12, I-43100 Parma.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei fondi 40% e 60% per la ricerca, del M.P.I. Ricevuto: 7-XII-1987.

(1) In questi H-spazi (che sono spazi di Hausdorff) si possono introdurre e trattare come negli ordinari spazi metrici le nozioni topologiche e di completezza.

quindi $\sigma(0)=0$); e, fissato $u_0 \in E$, alle due successioni

(1) $$u_n = f_1^n(u_0) \qquad f_2(u_n) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,(^2).$$

Lemma 1. *Se*

(2) $$d(f_1(x_1),\ f_r(x_2))$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(x_1,\ x_2),\ d(x_i,\ f_j(x_h)) \colon i,\ j,\ h=1,\ 2\}) \qquad (r=1,\ 2; \quad x_1,\ x_2 \in E)$$

allora, per $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ *e* $p \in \mathfrak{N}$, *si ha*

(3) $$\max\{d(u_{n+h-1},\ f_r(u_{n+i-1})) \colon r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\}$$

$$\leqslant \sigma^n(\max\{d(u_0,\ f_r(u_{i-1})) \colon r=1,\ 2;\ 1 \leqslant i \leqslant p+n\}).$$

Dim. In primo luogo, qualunque siano $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ e $p \in \mathfrak{N}$ si ha

(4) $$\max\{d(u_{n+h-1},\ f_r(u_{n+i-1})) \colon r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\}$$

$$\leqslant \sigma^n(\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})) \colon r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p+n\}).$$

Infatti, per $n=0$ e $p \in \mathfrak{N}$, la (4) è banale; per $n,\ p \in \mathfrak{N}$ e qualunque siano $\mu,\ \nu \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}$, si ottiene successivamente da (1), da (2) e dalla non decrescenza di σ

$$\max\{d(u_{n+\mu-1},\ f_r(u_{n+\nu-1})) \colon r=1,\ 2\} = \max\{d(f_1(u_{n+\mu-2}),\ f_r(u_{n+\nu-1})) \colon r=1,\ 2\}$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_{n+\mu-2},\ u_{n+\nu-1}),\ d(u_{n+\mu-2},\ f_j(u_{n+\nu-1})),\ d(u_{n+\nu-1},\ f_j(u_{n+\nu-1})),$$

$$d(u_{n+\mu-2},\ f_j(u_{n+\mu-2})),\ d(u_{n+\nu-1},\ f_j(u_{n+\mu-2})) \colon j=1,\ 2\})$$

$$\leqslant \sigma(\max\{\max\{d(u_{n+h-2},\ u_{n+i-1}),\ d(u_{n+h-2},\ f_j(u_{n+i-1})), d(u_{n+i-1},\ f_j(u_{n+i-1})),$$

$$d(u_{n+h-2},\ f_j(u_{n+h-2})),\ d(u_{n+i-1},\ f_j(u_{n+h-2})) \colon j=1,\ 2\} \colon 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\})$$

---

(2) f_1^n significa f_1 composto n volte con se stesso, con la convenzione $f_1^0(y)=y$.

e quindi, per l'arbitrarietà di μ, $\nu \in \{1, 2, \ldots, p\}$,

$$\max\{d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})): r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\}$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_{n+h-2}, u_{n+i-1}),\ d(u_{n+h-2}, f_j(u_{n+i-1})),\ d(u_{n+i-1}, f_j(u_{n+i-1})),$$

$$d(u_{n+h-2}, f_j(u_{n+h-2})),\ d(u_{n+i-1}, f_j(u_{n+h-2})): j=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\}).$$

Ora o il massimo che qui compare a secondo membro è nullo, oppure no; se è nullo, essendo $\sigma(0)=0$, è nullo anche il massimo a primo membro, e quindi la (4) è di nuovo banalmente verificata; se non è nullo, eliminando dall'insieme che compare a secondo membro i termini superflui, cioè i termini ripetuti e quelli che compaiono anche nell'insieme a primo membro (3), si ottiene

$$\max\{d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})): r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\}$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_{n+h-2}, u_{n+i-1}),\ d(u_{n-1}, f_j(u_{n+i-1})),\ d(u_{n-1}, f_j(u_{n-1})),$$

$$d(u_{n+h-1}, f_j(u_{n-1})): j=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\})$$

cioè, essendo σ non decrescente,

$$\max\{d(u_{n+h-1}, f_r(u_{n+i-1})): r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p\} \tag{5}$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_{n+h-2}, f_r(u_{n+i-2})): r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant p+1\}).$$

Sempre per la non decrescenza di σ, dalla (5) si giunge immediatamente alla (4) per n, $p \in \mathfrak{N}$. Pertanto la (4) vale per $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ e $p \in \mathfrak{N}$.

In secondo luogo, qualunque sia $s \in \mathfrak{N}$, si ha

$$\max\{d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})): r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant s\} \tag{6}$$

$$= \max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})): r=1,\ 2;\ 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Infatti il primo membro della (6) è banalmente maggiore od uguale del suo

(3) Se questi ultimi termini sono uguali a zero, si possono togliere perché il massimo a secondo membro non è nullo; se sono diversi da zero si possono togliere perché, comparendo a primo membro ed essendo $\sigma(t) < t$ per $t > 0$, non possono essere il massimo di tale insieme a secondo membro.

secondo membro; per dimostrare la disuguaglianza reciproca, osserviamo che il primo membro della (6), per $s \neq 1$ (4), si può scrivere così

$$\max\{d(u_0,\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant i \leqslant s\}$$

$$\vee \max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_0)):\ r=1,\ 2;\ 2 \leqslant h \leqslant s\}$$

$$\vee \max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 2 \leqslant h,\ i \leqslant s\}$$

dove: (a) $\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_0)):\ r=1,\ 2;\ 2 \leqslant h \leqslant s\}$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{h-1})),\ d(u_0,\ f_r(u_{h-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h \leqslant s-1\})$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant s\})$$ (5);

(b) $\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 2 \leqslant h,\ i \leqslant s\}$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant s\})$$ (6).

Quindi per tale primo membro si ha

$$\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant s\}$$

$$\leqslant \max\{d(u_0,\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant i \leqslant s\}$$

$$\vee\ \sigma(\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant s\})$$

cioè

$$\max\{d(u_{h-1},\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant h,\ i \leqslant s\}$$

$$\leqslant \max\{d(u_0,\ f_r(u_{i-1})):\ r=1,\ 2;\ 1 \leqslant i \leqslant s\}$$ (7);

pertanto vale la (6) qualunque sia $s \in \mathfrak{N}$.

---

(4) Se fosse $s=1$, la (6) sarebbe banale.

(5) La prima disuguaglianza si ottiene sostanzialmente in virtù di (2) e della non decrescenza di σ, con passaggi (qui omessi) analoghi a quelli che portano a (5); la seconda è immediata per la relazione di inclusione che c'è fra i due insiemi.

(6) Basta cambiare $h-1$ in h e $i-1$ in i, e applicare la (4) con $n=1$ e $p=s-1$.

(7) Poiché $\sigma(0)=0$, e $\sigma(t)<t$, se $t>0$.

Fissati infine $n \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathfrak{N}$, e posto $s = p + n$, per la (6), sostituendo in (4), si ha immediatamente la (3).

Lemma 2. *Lo spazio E sia completo, l'applicazione σ sia continua a destra, valga la* (2) *e si abbia*

$$\sup\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1,\ 2;\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} < +\infty\,. \tag{7}$$

Allora le successioni (1) *convergono in E allo stesso limite.*

Dim. Posto, per brevità,

$$w_0 = \sup\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1,\ 2;\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \tag{8}$$

consideriamo la successione

$$w_0,\ w_n = \sigma(w_{n-1}) = \sigma^n(w_0) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)\,.$$

Si ha subito

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma^n(w_0) = 0\,. \tag{9}$$

Infatti, o per un certo indice $i \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ è $w_i = 0$, e allora tutti i termini dall'i-esimo in poi sono nulli [8]; o per ogni $i \in \mathfrak{N} \cup \{0\}$ è $w_i \neq 0$, e allora la successione, a termini positivi, è decrescente, e per la continuità a destra di σ vale la (9).

D'altra parte dalla (3), per la non descrescenza di σ^n, valendo la (7) e tenuto conto della posizione (8), si ha

$$\max\{d(u_n, f_r(u_{n+p-1})) \colon r = 1,\ 2\} \leq \sigma^n(w_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ p = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{10}$$

La (9) e la (10) portano ora a concludere sia che la successione $u_n = f_1(u_{n-1})$ ($n = 1$, 2, 3, ...) è di Cauchy, sia che

$$\lim_{n \to +\infty} d(u_n, f_2(u_n)) = 0\,. \tag{11}$$

---

[8] Si noti che se fosse $w_0 = 0$ sarebbe anche $u_i = f_1(u_{i-1}) = u_0$ e $f_2(u_{i-1}) = u_0$ per ogni $i \in \mathfrak{N}$; quindi, *in questo caso,* oltre alla (9) avremmo subito l'affermazione del Lemma 2.

Per la completezza di E, si ha allora che la successione u_n converge ad un $u_* \in E$; onde, per la (11), anche la successione $f_2(u_n)$ converge allo stesso u_* (9).

Teorema 1. *Lo spazio E sia completo, l'applicazione σ continua a destra, valga la (7) e si abbia*

$$(2)' \quad d(f_1(x_1),\ f_r(x_2)) \leqslant \sigma(\max\{d(x_1,\ x_2),\ \frac{1}{\tau} d(x_i,\ f_j(x_2)),\quad d(x_i,\ f_j(x_1)) \colon i,\ j = 1,\ 2\})$$

$$(r = 1,\ 2;\ x_1,\ x_2 \in E).$$

Allora l'unico punto unito di f_1 coincide con l'unico punto unito di f_2.

Dim. Per il Lemma 2, poiché (2)′ implica (2), le successioni (1) convergono in E allo stesso limite u_*. Inoltre (da un certo indice n in poi) per la (2)′, la p.t.g. e la non decrescenza di σ, si ha

$$(12) \qquad \max\{d(u_{n+1},\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\} = \max\{d(f_1(u_n),\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\}$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_n,\ u_*),\ \frac{1}{\tau}\varphi[d(u_n,\ u_{n+1})] + d(u_{n+1},\ f_r(u_*)),\ \frac{1}{\tau}\varphi[d(u_*,\ u_{n+1})] + d(u_{n+1},$$

$$f_r(u_*)),\ d(u_n,\ f_r(u_n)),\ d(u_*,\ f_r(u_n)) \colon r = 1,\ 2\}).$$

Ma essendo

$$\lim_{n \to +\infty}{}'' \max\{d(u_n,\ u_*),\ \frac{1}{\tau}\varphi[d(u_n,\ u_{n+1})] + d(u_{n+1},\ f_r(u_*)),\ \frac{1}{\tau}\varphi[d(u_*,\ u_{n+1})]$$

$$+ d(u_{n+1},\ f_r(u_*)),\ d(u_n,\ f_r(u_n)),\ d(u_*,\ f_r(u_n)) \colon r = 1,\ 2\}$$

$$= \max\{\lim_{n \to +\infty}{}'' d(u_{n+1},\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\}$$

$$= \lim_{n \to +\infty}{}'' \max\{d(u_{n+1},\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\} < +\infty \ (10)$$

---

(9) Da un certo indice n in poi, $d(u_*,\ f_2(u_n)) \leqslant \varphi[d(u_*,\ u_n)] + \tau d(u_n,\ f_2(u_n))$.

(10) Infatti, da un certo indice n in poi è $\max\{d(u_{n+1},\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\} \leqslant \varphi[d(u_{n+1},\ u_*)] + \tau \max\{d(u_*,\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\}$, da cui, essendo φ infinitesima nello zero,

$$\lim_{n \to +\infty}{}'' \max\{d(u_{n+1},\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\} \leqslant \tau \max\{d(u_*,\ f_r(u_*)) \colon r = 1,\ 2\} < +\infty .$$

per la continuità a destra e la non decrescenza di σ, da (12) si ottiene anche

$$\lim_{n\to+\infty}'' \max\{d(u_{n+1}, f_r(u_*)) \colon r=1,\ 2\} \leqslant \sigma(\lim_{n\to+\infty}'' \max\{d(u_{n+1}, f_r(u_*)) \colon r=1,\ 2\})$$

cioè
$$\lim_{n\to+\infty}'' \max\{d(u_{n+1}, f_r(u_*)) \colon r=1,\ 2\} = 0$$
quindi

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_{n+1}, f_r(u_*)) = 0 \qquad (r=1,\ 2)\,. \tag{13}$$

Sempre da un certo indice n in poi, per la p.t.g., vale

$$0 \leqslant d(u_*, f_r(u_*)) \leqslant \varphi(d(u_*, u_{n+1})) + \tau d(u_{n+1}, f_r(u_*)) \qquad (r=1,\ 2)$$

che, per la (13), porta alla conclusione

$$u_* = f_1(u_*) = f_2(u_*)$$

cioè u_* è punto unito comune ad f_1 e ad f_2.

Dato, poi, z punto unito di f_1, si ha

$$d(z, f_2(z)) = d(f_1(z), f_2(z)) \leqslant \sigma(\max\{d(z, f_r(z)) \colon r=1,\ 2\}) = \sigma(d(z, f_2(z)))$$

e quindi $d(z, f_2(z)) = 0$, ossia z è punto unito anche per f_2; analogamente si mostra che ogni punto unito di f_2 è punto unito anche di f_1.

Se, infine, $y \in E$ fosse un altro punto unito di entrambe, diverso da u_*, si avrebbe

$$0 < d(u_*, y) = \max\{d(f_1(u_*), f_r(y)) \colon r=1,\ 2\}$$

$$\leqslant \sigma(\max\{d(u_*, y), \frac{1}{\tau} d(u_*, f_r(y)), d(y, f_r(u_*)) \colon r=1,\ 2\}) = \sigma(d(u_*, y))$$

il che è assurdo. Deve pertanto essere $y = u_*$. Dunque f_1 ha un unico punto unito che è anche l'unico punto unito di f_2.

Se ora poniamo

$$\beta = \inf(\mathrm{id} - \tau\sigma)(0 \ulcorner\!\lrcorner + \infty) \qquad b = \varphi[d(u_0, f_1(u_0))] \vee d(u_0, f_2(u_0)) \tag{14}$$

con $\beta \in \mathfrak{N}$, è facile dimostrare il seguente

Lemma 3. *Sia $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$ per ogni $x_1 \in E$, valga la* (2) *e si abbia*

$$\sup(\mathrm{id} - \tau\sigma)^{-1}(\beta \sqcap b) < +\infty\,. \tag{15}$$

Allora vale la (7).

Dim. Si ha per ogni $m \in \mathfrak{N}$

$$\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, 3, \ldots, m\} \in (\mathrm{id} - \tau\sigma)^{-1}(\beta \sqcap b)\,. \tag{16}$$

Infatti dopo aver cambiato $(i-1)$ in i e sfruttata la p.t.g. (11), con semplici passaggi si ottiene

$$\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$\leqslant (\varphi[d(u_0, f_1(u_0))] \vee d(u_0, f_2(u_0))) + \tau \max\{d(u_1, f_r(u_i)) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m-1\};$$

da cui, per la (3) [e tenuto conto delle posizioni (14)]

$$\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$\leqslant b + \tau\sigma(\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m\}) \qquad \text{oppure}$$

$$\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$- \tau\sigma(\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m\}) \leqslant b \qquad \text{cioè}$$

$$\beta \leqslant (\mathrm{id} - \tau\sigma)(\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m\}) \leqslant b$$

e quindi la (16). Da (16), immediatamente,

$$\max\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, m\} \leqslant \sup(\mathrm{id} - \tau\sigma)^{-1}(\beta \sqcap b)$$

che, per la (15), porta alla (7).

---

(11) Applicabile in quanto è $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$ per ogni $x_1 \in E$.

Teorema 2. *Lo spazio E sia completo, l'applicazione σ continua a destra, sia $d(x_1, f_1(x_1)) \in A$ per ogni $x_1 \in E$, valga la* (15) *e si abbia la* (2)$'$. *Allora l'unico punto unito di f_1 coincide con l'unico punto unito di f_2.*

Dim. Banale.

3 - Osservazioni

3.1 – Se avessimo proceduto come di solito si fa con una sola funzione, dopo aver introdotto in **2** le due successioni (1), avremmo dovuto prendere in considerazione il diametro dell'insieme

$$0(u_0) = \{u_0, f_r(u_{i-1}) \colon r = 1, 2; \; i = 1, 2, 3, \ldots\} \tag{17}$$

(insieme che potremmo chiamare *orbita relativa alle due successioni*) ([12]). Ma la forma dell'ipotesi di contrattività (2) ci ha costretto a considerare, invece che tale diametro, l'estremo superiore di convenienti distanze fra i punti dell'*orbita* stessa; cioè

$$\sup\{d(u_{h-1}, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2; \; h, \, i = 1, 2, 3, \ldots\} \tag{18}$$

che, per la (6), è uguale a

$$\sup\{d(u_0, f_r(u_{i-1})) \colon r = 1, 2; \; i = 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{19}$$

Si noti però che, per $f_1 = f_2 = f$, la (17) dà l'orbita usualmente considerata da vari Autori nel caso di una sola funzione (negli spazi metrici), e che il suo diametro, $\operatorname{diam} 0(u_0) = \sup\{d(u_{h-1}, f(u_{i-1})) \colon h, \, i = 1, 2, 3, \ldots\}$, proprio per l'uguaglianza fra (18) e (19), diventa

$$\operatorname{diam} 0(u_0) = \sup\{d(u_0, f(u_{i-1})) \colon i = 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{20}$$

([12]) È ovvio che per diametro dell'insieme (17), cioè per $\operatorname{diam} 0(u_0)$, si intende qui $\sup\{d(x, y) \colon x, \, y \in 0(u_0)\}$.

3.2 – Se la funzione $\sigma(t)$ introdotta all'inizio di 2 è, per ogni $t \geq 0$, $\sigma(t) = \alpha \cdot t$ $(0 \leq \alpha < 1)$, l'ipotesi di contrattività comune (2)′ diventa

$$d(f_1(x_1),\ f_r(x_2)) \leq \alpha \max\{d(x_1,\ x_2),\ \frac{1}{\tau} d(x_i,\ f_j(x_2)),$$

$$d(x_i,\ f_j(x_1)) \colon i,\ j = 1,\ 2\} \qquad (r = 1,\ 2;\ x_1,\ x_2 \in E).$$

Pertanto il Teorema 6 di $[1]_2$ e tutti i suoi casi particolari (13), sono casi particolari del Teorema 1 di questa Nota.

3.3 – Infine, negli spazi metrici (14), dal Lemma 2, dal Teorema 1 e dal Lemma 3 si ottengono le affermazioni del Teorema 1 di [2] ponendo $f_1 = f_2 = f$ e ricordando, naturalmente, che $\operatorname{diam} 0(u_0)$ è anche dato da (20).

Bibliografia

[1] P. Azzimondi e C. Scaravelli: $[\bullet]_1$ *Un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 773-780; $[\bullet]_2$ *Sul punto unito comune a due applicazioni in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **10** (1984), 161-176; $[\bullet]_3$ *Teoremi di punto unito comune*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 111-121; $[\bullet]_4$ *Successioni di Cauchy e teoremi di punto unito negli H-spazi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 229-240.

[2] J. Daneš: *Two fixed point theorems in topological and metric spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **14** (1976), no. 2, 259-265.

Summary

In this paper we generalize, in H-spaces and for two mappings, a result of J. Daneš on fixed point for one mapping in metric spaces.

* * *

(13) Sulla validità del Teorema 6 con una certa ipotesi aggiuntiva, o senza tale ipotesi se $\tau = 1$, cfr. $[1]_4$.

(14) Come è evidente, gli spazi metrici sono H-spazi particolari con $A \equiv \mathfrak{R}^+$, $\tau = 1$, φ funzione identica.