Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 87-105

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

I contributi di Vito Volterra alla balistica da aeromobili (**)

1 - Premessa

1.1 - In due precedenti studi, $[15]_{1,2}$, abbiamo avuto occasione di illustrare i contributi indipendentemente apportati, negli anni 1916-1918, da Mauro Picone, Guido Fubini e Francesco Severi ad alcuni problemi di balistica esterna: uno dei basilari contributi di tali autori era allora rivolto a dare una soluzione *razionale* al caso del cosiddetto «tiro con grande angolo di sito», ossia al caso di un notevole dislivello fra origine di tiro e bersaglio. Si trattava, in questo caso, di *angoli di sito positivi* e di tiro (con artiglierie di medio e grosso calibro) in montagna (1).

Indipendentemente dai tre autori citati e prima di essi, negli anni 1915-1916, Vito Volterra si era occupato di una questione analoga ma, in un certo senso, opposta: quella di risolvere il problema, che si presentava per la prima volta, della costruzione di tavole di tiro, nel caso di grandi *angoli di sito negativi*, per un pezzo di artiglieria di piccolo calibro (2) piazzato (con opportuni accorgimenti e misure di sicurezza) sulla navicella di un dirigibile, nell'ipotesi che l'angolo di proiezione fosse variabile fra $-30°$ e $-90°$.

Gli eventi che avevano condotto, in quegli anni, ad occuparsi di ciò il grande (e non più giovane) matematico V. Volterra sono, ovviamente, legati allo scoppio della prima guerra mondiale.

Ma, prima di presentare quel particolare problema balistico, riteniamo utile premettere alcune assai brevi e frammentarie notizie sulla figura del Volterra

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Via Università 12, I-43100 Parma.

(**) Ricevuto: 28-I-1988.

(1) Col titolo di *Tavole di tiro da montagna* erano stati pubblicati, in quegli anni, alcuni voluminosi fascicoli (comprendenti anche la trattazione dei relativi metodi analitici e numerici) di raffinate tavole curate da M. Picone (cfr. $[11]_1$; $[15]_1$, pp. 364-372).

(2) Si trattava del cannone da 65/17, allora in dotazione all'artiglieria da montagna.

stesso, dedotte dai «Cenni biografici» curati, per incarico dell'Accademia dei Lincei, dall'amico e collaboratore francese del Volterra, Joseph Pérès (3):

«Nato ad Ancona il 3 maggio 1860, da famiglia israelita; allievo interno, dal 1879, della Scuola Normale Superiore di Pisa; laureatosi in Fisica nel 1882; professore di ruolo di Meccanica Razionale nell'Università di Pisa a 23 anni; nominato socio, a 28 anni, dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

Chiamato, nel 1893, alla cattedra di Meccanica Razionale dell'Università di Torino [lasciata da Francesco Siacci — allora considerato, in campo internazionale, il più eminente studioso di Balistica — che si trasferiva all'Università di Napoli].

Chiamato, nel 1900, alla cattedra di Fisica Matematica dell'Università di Roma, dove, nel 1901, designato a tenere il discorso inaugurale per la solenne apertura dell'anno accademico, parlò *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali*, esponendo per la prima volta l'idea, che doveva sviluppare più tardi, di risolvere alcuni problemi biologici e sociali con metodi matematici (4).

Incaricato, nel 1904, dal Governo Italiano della riorganizzazione del Politecnico di Torino, visitò le principali Scuole di Ingegneria in Svizzera e in Germania e illustrò, due anni più tardi, in Senato, il progetto per il nuovo Politecnico.

Nominato, nel 1905, Senatore del Regno [«per alti meriti scientifici ed organizzativi»], mantenne tale ufficio sino alla morte.

Propose, nel 1906, la creazione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze che, l'anno dopo, sotto la sua presidenza, tenne a Parma la prima delle sue riunioni annuali.

Membro della Commissione per l'esame delle invenzioni e dei brevetti, s'interessava particolarmente all'aviazione. Effettuò varie ascensioni in aerostati e in dirigibili, occupandosi anche [dal 1911] di problemi aeronautici concernenti questi ultimi.

Nel 1915, al momento dell'entrata in guerra dell'Italia, si presentava volontario nonostante avesse già compiuto i 55 anni di età. Nominato tenente del

(3) Cfr. **[10]**.

(4) Ciò, come ricorda C. Somigliana in **[14]**, pone anche il Volterra fra i pionieri della moderna Ecologia. Il testo di quel discorso del 1901 è riportato alle pp. 1-33 del piccolo volume *Saggi scientifici*, **[16]**$_4$, che contiene vari discorsi, conferenze, commemorazioni, e che è assai prezioso per comprendere le idee del Volterra sul movimento scientifico del suo tempo.

Genio Aeronautico, specialità Dirigibilisti, condusse per due anni la rude esistenza degli aviatori italiani come componente equipaggi di dirigibili, effettuando numerosi voli di guerra ed affrontando gravi pericoli. Durante questo periodo si occupò di problemi aeronautici — e in special modo del tiro di artiglieria da bordo di aeromobili, effettuando di persona i necessari esperimenti — nonché di problemi attinenti la fonotelemetria; alcuni risultati di questi studi furono pubblicati più tardi in riviste scientifiche. Incaricato di missioni all'estero, in contatto con l'Ufficio Invenzioni francese, diretto dai matematici Paul Painlevé e Émile Borel, ebbe più volte occasioni di recarsi in Francia e sul fronte francese nelle prime linee.

Promosso capitano per meriti eccezionali e decorato della croce di guerra al V.M. (5), nel 1917 veniva incaricato di organizzare e di dirigere l'Ufficio Invenzioni e Ricerche in Italia presso il Ministero Armi e Munizioni e doveva lasciare a malincuore l'aeronautica. Quale direttore di quell'Ufficio si recò spesso sui diversi fronti italiani e varie volte in Francia e in Inghilterra in missioni speciali. Si occupò fra l'altro attivamente della fabbricazione del gas elio da sostituire all'idrogeno nei dirigibili (6).

Terminata la guerra, riprendeva la sua attività di studioso, cercando di indirizzare le istituzioni, create durante il conflitto europeo, a scopi scientifici. Partecipò [a Bruxelles] alla costituzione definitiva del Consiglio Internazionale delle Ricerche, di cui nel 1919 fu eletto Vice Presidente.

Nel 1921 fu eletto Presidente della grande e celebre istituzione internazionale «Bureau International des Poids et Mesures», carica che mantenne sino alla morte.

---

(5) La motivazione della decorazione, riportata nei «Cenni biografici» [**10**], è la seguente:

«Durante le sue rischiose missioni militari egli ha dimostrato ovunque una calma esemplare di fronte ai pericoli, per cui nel luglio del 1916 ottenne un encomio solenne perché a Campi di Bisenzio durante una pericolosissima discesa del dirigibile n. 7 su cui si facevano esperimenti attinenti ad operazioni belliche, da un'altezza di circa 5000 metri, conservava tale sangue freddo da continuare i suoi studi e registrare tutte le variazioni del moto della aeronave.

«In zona di operazione poi ha compiuto tutti i suoi studi e le sue esperienze sulle linee d'osservazione avanzate e ha fatto le sue osservazioni scientifiche sia sul fronte italiano che su quello francese, su terreno battuto dalle artiglierie nemiche di medio calibro, non curandosi degli immensi rischi a cui era sottoposto».

(6) Nella monumentale opera [**9**], curata da C. Montù, dove Volterra è più volte ricordato, si trova, al vol. XII, pp. 1083-1085, una breve sintesi dei suoi contributi di quegli anni.

Vice Presidente dal 1920 al 1923 dell'Accademia Nazionale dei Lincei e Presidente della stessa dal 1923 al 1926, ne curò in modo particolare l'assetto amministrativo e finanziario, dando un vigoroso impulso all'attività dell'antico Consesso nel campo scientifico internazionale e potenziando numerose iniziative culturali (7)».

Ci piace ricordare ancora, su Volterra, per aggiungere a quanto precede un altro significativo «frammento», un episodio raccontato all'autore di queste note dal prof. Giovanni Sansone nel maggio del 1978, quando si teneva a Firenze il Convegno Internazionale «EQUADIFF 78», dedicato al 90° compleanno del Sansone stesso. Il prof. Sansone, che mi diceva di aver letto da pochi giorni la Memoria **[15]**$_1$, nella quale illustravo i contributi dati alla Balistica da Mauro Picone, si mostrò lieto che avessi lì anche brevemente citato il contributo alla balistica aeronautica del «Senatore Volterra», che lui stesso aveva conosciuto, dopo i tragici fatti dell'«Isonzo 1917», sul fronte del Piave; e mi fece omaggio di alcune sue pubblicazioni recenti (relative a Ulisse Dini e ai Normalisti), fra le quali recentissima (del 1977), la **[12]**, che aprì alle pp. 28-30, dove ricordava l'opera del Volterra. Scrive Sansone:

«Io ebbi la singolare fortuna di conoscerlo personalmente durante la prima Guerra Mondiale, a Pero di Pieve nell'aprile del 1918, luogo dove allora dirigevo [come ufficiale di complemento] una «sezione fonotelemetrica Cotton-Weiss» per l'individuazione delle batterie austriache installate al di là del Piave su un fronte di otto chilometri. Egli era maggiore di complemento del Genio; aveva ottenuto dalla Francia in uso i miei apparecchi ed era venuto a trovarmi per conoscere se i risultati ottenuti dalla mia sezione erano comparabili con quelli ottenuti dai francesi, e infatti lo furono» (8).

1.2 - Questi era Vito Volterra a cavallo di quell'anno, 1915, nel quale si apprestava ad affrontare quel problema di balistica esterna da aeromobili.

(7) Nella grande sala dell'Accademia dei Lincei, alla destra del famoso ritratto di «Galileo Galilei Linceo», sta, a riprova di tale intensa attività scientifica e organizzativa, un grande medaglione in bronzo raffigurante il Volterra.

(8) Il Sansone mi precisava poi che quelle «apparecchiature Cotton-Weiss» erano state successivamente sostituite da altre, più raffinate, inventate dal fisico italiano «Senatore Garbasso».

Nell'Introduzione alla sua Memoria [16]$_2$ (9), dice Volterra:

«Il problema balistico speciale che si trattava di risolvere consisteva nella costruzione di Tavole di tiro pel cannone da 65 montagna piazzato sopra un dirigibile, nella ipotesi che gli angoli di tiro fossero variabili in depressione fra 30° e 90° e le differenze di quota dell'*origine* per rapporto al *bersaglio*, supposto al livello del mare, fossero variabili fra 500 e 2500 metri.

Dato questo dislivello, doveva tenersi conto della diversa densità dell'aria nei vari punti della traiettoria (10).

Per risolvere questo problema fu studiato un metodo generale di calcolo che può applicarsi in tutti i casi analoghi in cui abbiano da determinarsi elementi di tiro per artiglieria aeronautica e che qui esporremo.

Non era il caso di adoperare, senza notevoli modificazioni, il metodo approssimato d'integrazione del Siacci, giacché esso presuppone una traiettoria sufficientemente tesa rispetto ad una corda orizzontale. Data la grande depressione del tiro che si trattava di studiare, le condizioni erano quindi molto lontane dal caso tipico di Siacci. Fu perciò essenzialmente modificato il metodo stesso; ma *fu conservato l'artifizio del Siacci di introdurre una pseudo-velocità*, artifizio che risultò molto vantaggioso anche nel caso attuale».

2 - Presentazione del contenuto della Memoria del Volterra

La Memoria è suddivisa in sette capitoli: nei primi due si considerano le equazioni differenziali del problema generale e le corrispondenti formule integrali. Nel terzo si applicano i metodi approssimati, facendo uso di «speciali

---

(9) Tale Memoria è anche riportata nel vol. IV delle *Opere matematiche* [16]$_1$ del Volterra, alle pp. 201-248. Le pagine che avremo in seguito occasione di citare si riferiranno a tale volume.

(10) Ricordiamo che il primo che, in balistica esterna, abbia tenuto conto della «densità dell'aria *variabile* con la quota», abolendo la semplificatrice ipotesi di considerarla *costante*, ciò che aveva condotto, all'aumentare delle velocità iniziali e delle gittate, a risultati via via più imprecisi, fu Legendre, nel 1782. In risposta al «soggetto di studio della vera curva descritta dai proietti nell'aria», proposto da Lagrange come «Premio di Matematica per l'anno 1782» della Reale Accademia delle Scienze di Berlino, Legendre aveva dato per la densità dell'aria $\delta(y)$ alla quota y la legge di «decadimento iperbolico con la quota», $\delta(y) = \delta_0/(1 + \alpha y)$, associata alla resistenza quadratica di Newton (cfr. [7]; [15]$_4$, n. 4.3).

artifizi». Si tiene conto, nel problema, dei dati relativi al pezzo da 65/17 da montagna e si conduce il calcolo in modo che l'errore finale negli alzi non superi un millesimo; *il metodo impiegato è valido in generale*, purché le traiettorie siano sufficientemente tese. Nel capitolo quarto vengono esposti i metodi per la costruzione effettiva delle traiettorie e, nel quinto, viene trattato il metodo per il calcolo dei tempi. Nel sesto si procede alla costruzione delle tavole di tiro. L'ultimo capitolo è dedicato allo «studio delle variazioni e delle correzioni»: sono prese in considerazione le variazioni relative alla velocità iniziale, all'angolo di proiezione e ad uno speciale coefficiente β (11), nella cui espressione figurano il coefficiente balistico e il coefficiente di forma.

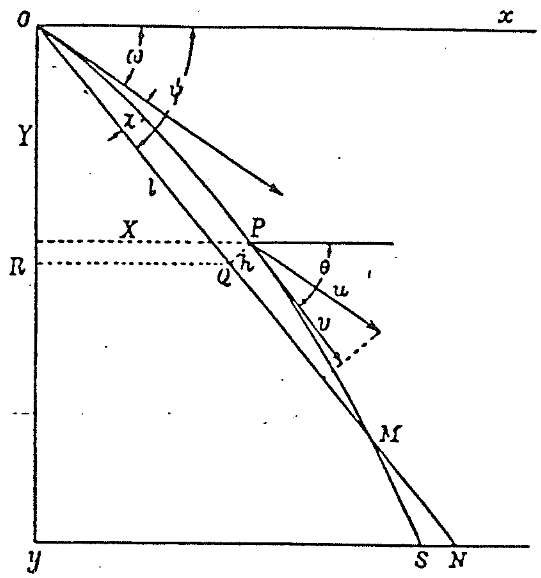

Fig. 1.

Viene considerato come «piano di tiro» il piano cartesiano x, y e vengono indicati con:

ω il valore assoluto dell'angolo di proiezione, cioè l'angolo che la velocità iniziale forma con l'orizzonte;

ψ l'angolo che una corda OMN alla traiettoria forma con l'orizzonte;

---

(11) Questo coefficiente β, come avverte il Volterra nel seguito, non è il ben noto (nella Balistica classica) «β principale» del Siacci.

θ l'angolo che la tangente alla traiettoria in un punto qualunque P(X, Y) forma con l'orizzonte;

l la proiezione OQ dell'arco OP della traiettoria sulla corda OMN;

viene posto $\psi - \theta = \rho$, $\psi - \omega = \chi$.

Alla fine dell'Introduzione il Volterra ringrazia, in particolare, la dott. Elena Freda per il valido aiuto portatogli [12].

3 - Equazioni differenziali del moto e loro integrazione

3.1 - Se p è il peso del proiettile, v la sua velocità (in modulo [13]) e $f(v)$ la *ritardazione*, le equazioni differenziali del moto sono le seguenti

$$\begin{aligned} &\frac{p}{g}\frac{\mathrm{d}(v\cos\theta)}{\mathrm{d}t} = -\frac{p}{g}f(v)\cos\theta \\ (3.1)\qquad & \\ &\frac{p}{g}\frac{\mathrm{d}(v\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\mathrm{d}t} = -\frac{p}{g}f(v)\,\mathrm{sen}\,\theta + p\,. \end{aligned}$$

Volterra le moltiplica poi rispettivamente per $\cos\psi$ e $\mathrm{sen}\,\psi$ e somma; tenuto conto che ψ è costante rispetto al tempo, ottiene

$$\frac{p}{g}\frac{\mathrm{d}(v\cos\rho)}{\mathrm{d}t} = -\frac{p}{g}f(v)\cos\rho + p\,\mathrm{sen}\,\psi\,, \tag{3.2}$$

e così continua (conserveremo qui le stesse notazioni):

«Sia u un vettore parallelo alla direzione della tangente iniziale alla traiettoria che ha la stessa proiezione del vettore v sulla corda OMN. Avremo $u\cos\chi = v\cos\rho$. Chiameremo u la *pseudo-velocità*, facendo uso della stessa denominazione usata dal Siacci per denotare una analoga quantità».

---

(12) Ricordiamo che, circa quarant'anni dopo, la prof.ssa Freda farà poi parte del Comitato — nominato e presieduto da Guido Castelnuovo, Presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei — costituito per curare l'edizione delle *Opere matematiche* di Vito Volterra, e inizialmente formato da Ugo Amaldi, Luigi Amoroso, Giuseppe Armellini, Umberto D'Ancona, Elena Freda, Joseph Pérès, Enrico Persico, Mauro Picone, Antonio Signorini, Carlo Somigliana, Edoardo Volterra. A tale iniziativa si era unito il Consiglio Nazionale delle Ricerche (dal Volterra stesso fondato ed allora presieduto da Gustavo Colonnetti).

(13) Diremo talvolta nel seguito, come fa anche Volterra, *velocità* nel senso di *modulo della velocità*.

Trasforma, introducendo u, l'equazione (3.2); denota successivamente con δ_y la densità dell'aria nel punto P, con i il *coefficiente di forma*, con C il *coefficiente balistico*, con $F(v)$ la funzione resistente [di Siacci], quantità legate alla $f(v)$ dalla formula

$$f(v) = \frac{\delta_y i}{C} F(v) .$$

Pone poi (essendo δ_z la densità dell'aria nel punto Q)

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_z} \frac{F(v)}{F(u)} \frac{u}{v}, \qquad \alpha = \beta \frac{\delta_z i}{C} \frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}, \qquad z = l \operatorname{sen}\psi, \qquad \Omega = \log \frac{\cos\rho}{\cos\theta} \frac{\cos\omega}{\cos\chi},$$

ed ottiene (pp. 204-205)

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{gathered} \mathrm{d}z = -\cos^2\chi \frac{u\,\mathrm{d}u}{\alpha F(u) - g} \\ \mathrm{d}\Omega = \frac{g}{\cos^2\chi} \frac{\mathrm{d}z}{u^2} \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos\chi \operatorname{sen}\psi} \frac{\mathrm{d}z}{u} . \end{gathered}$$

3.2 - Denotando con v_0 la velocità iniziale del proiettile, dalle (3.3) ricava, integrando e ricordando che z, Ω, t sono nulle nell'origine

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{gathered} z = -\cos^2\chi \int_{v_0}^{u} \frac{u\mathrm{d}u}{\alpha F(u) - g} \\ \Omega = \frac{g}{\cos^2\chi} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{u^2} \qquad t = \frac{1}{\cos\chi \operatorname{sen}\psi} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{u} . \end{gathered}$$

Ricava successivamente le coordinate X, Y del punto P e riassume nella Tabella I (pp. 206-207) le varie formule trovate [fra le quali ricordiamo la seguente

$$\text{(3.5)} \qquad \Phi(\alpha, u) = \frac{u}{\alpha F(u) - g}]$$

che, conclude, «sono perfettamente rigorose, ma, per poterle applicare, converrà fare alcune particolari ipotesi che ci condurranno ad una soluzione approssimata del problema».

4 - Soluzione approssimata

Continua Volterra:

«Se la corda OMN coincide con la linea di sito o è una corda della traiettoria che taglia la traiettoria stessa in M prima del punto di arrivo S, la quantità β ha il valore 1 all'origine; quindi, se si percorre la traiettoria, β diminuisce ed è minore di 1 nel punto in cui la tangente alla traiettoria è parallela ad OMN. Riprende il valore 1 prima che si giunga al punto M, ed in M è maggiore di 1 e tale si conserva fino al punto di arrivo S. Il parametro β oscilla dunque intorno al valore 1 ed evidentemente se ne discosta tanto meno quanto più tesa è la traiettoria. Noi lo assumeremo, in vista che le traiettorie nel nostro caso sono molto tese, eguale ad 1. [...]

Nel caso poi del cannone da 65 montagna assumeremo come dati sperimentali ormai noti: v_0, velocità iniziale del proiettile all'uscita della bocca = 345 m/s, $i = 0{,}715$, $C = 1{,}06$.

Da un computo preliminare della questione si può poi ritenere che, assumendo per le diverse quote fra 500 e 2500 metri gli angoli ψ e χ secondo la Tabella II (v. p. 209), si può essere sicuri che ci riferiamo sempre a corde OMN, le quali tagliano le corrispondenti traiettorie prima dei punti di arrivo nel piano di quota zero (livello del mare).

Del resto si è avuta la conferma a posteriori che questa previsione era giustificata [...]».

E qui ricorda l'utilità, per dedurre la Tabella II, di «un calcolo approssimato dell'ing. Zona eseguito per suggerimento del sig. maggiore Crocco (14) al fine di

(14) Si tratta di Gaetano Arturo Crocco [1877-1968] (del Crocco «padre», ufficiale del Genio e pioniere dell'Aeronautica, e non del, continuatore dell'opera sua, Luigi Crocco «figlio»), che Bruno Finzi, in una bella commemorazione di lui tenuta nel 1969 (cfr. [3], vol. I, pp. VII-XVI), considera «il maggiore scienziato aeronautico italiano» (ad esempio, si deve a Crocco la teoria delle eliche (dal 1904) e, successivamente, quella delle eliche «deformabili e orientabili»; l'inizio degli studi (dal 1926) per la propulsione a razzo, ecc.; la fondazione, nel 1951, della «Società Italiana Razzi»). Nel 1908 aveva fondato l'Istituto

ottenere l'ordine di grandezza delle elevazioni, onde formarsi un concetto delle dimensioni da darsi agli apparecchi di puntamento»; spiega poi come era stato eseguito quel calcolo, e prosegue:

«Fu quindi cercato di procedere alla costruzione effettiva delle 29 traiettorie corrispondenti ai dati precedenti. Le differenze $\psi - \chi$ sono evidentemente i valori assoluti degli angoli di proiezione [...] [è quindi riportata (p. 210) una Tabella III, relativa a vari angoli di proiezione per quote variabili fra i 500 ed i 2500 metri].

Tenendo conto delle varie densità dell'aria fra le quote zero e 2500 sul livello del mare (secondo la Tabella IV del corso di Balistica esterna del colonnello Bianchi (15)) dei valori delle costanti i e C e degli angoli ψ e χ, fu riconosciuto che il parametro α varia entro limiti compresi fra 0,5 e 1,5.

Fu quindi costruito un *Abaco* rappresentante le curve $\Phi = \Phi(\alpha,\ u)$ valendosi dei valori di $F(u)$ ricavati dalla Tabella VI del sopra citato corso. In ciascuna di queste curve il parametro α si suppone costante, e si passa dall'una curva alla successiva aumentando α di 0,05. Le 21 curve costruite corrispondono a [certi] valori di α [che vengono dati nella Tabella IV, p. 211]. [...]

Un secondo Abaco fu costruito eseguendo le integrazioni grafiche delle curve precedenti in modo da ottenere le curve aventi per equazioni

$$G = \int_{345}^{u} \Phi(\alpha,\ u)\, du\,. \tag{4.1}$$

Si ottennero quindi 21 curve in ciascuna delle quali il parametro α è costante, mentre esso varia da curva a curva di 0,05 [...]».

5 - Costruzione delle traiettorie e calcolo dei tempi

Volterra procede poi alla «costruzione effettiva delle 29 traiettorie corrispondenti alle diverse quote dell'origine comprese fra 500 e 2500 metri, i punti di arrivo essendo al livello del mare».

Ricorda che «se fosse stato possibile supporre α costante (densità dell'aria costante) sarebbe bastato interpolare fra le curve dell'Abaco II quelle che

---

Centrale Aeronautico ed aveva avuto, già da allora, la collaborazione del Volterra.

Anche a G.A. Crocco è dovuta una assai bella commemorazione di Vito Volterra, tenuta all'Adunanza Solenne dell'Accademia dei Lincei dedicata al Centenario della nascita del Volterra (e ricordata anche in [3], vol. I, p. XXVII).

(15) Cfr. [1].

corrispondono ai valori stessi di α relativi alle varie traiettorie, ma α è variabile in quanto è variabile il fattore δ_z (densità dell'aria)».

Descrive quindi l'«artifizio» da lui impiegato per pervenire alla costruzione suddetta (pp. 212-214) e conclude:

«Bisognava però essere sicuri che l'errore che si commetteva fosse compreso entro i limiti tali che l'errore finale delle tavole di tiro risultasse inferiore a un millesimo.

A tal fine fu cercato l'errore che non si doveva oltrepassare nel computo di u e, interpolando fra le curve dell'Abaco II delle curve intermedie, e ripetendo il calcolo nelle condizioni più sfavorevoli, si giunse ad essere assicurati che l'errore che si commetteva col metodo impiegato era inferiore al limite richiesto.

Nelle tabelle seguenti indichiamo per le diverse traiettorie i valori così ottenuti per u e z».

Seguono quindi, nelle successive sedici pagine, sedici Tabelle che forniscono i valori numerici per z (da quota zero a quota 2500 metri, di 100 in 100 metri) e per la pseudo-velocità u, in relazione a certi valori di ψ e di χ.

Successivamente, «mediante quadratura aritmetica con trapezî», vengono calcolati i tempi, con un errore inferiore a 6/100 di secondo e quindi «sufficientemente esatti».

Vengono date per il tempo t, in corrispondenza alle quote z variabili, di 100 in 100 metri, da zero a 2500 metri, cinque Tabelle (pp. 232-235). E Volterra conclude:

«Volendo desumere da questi valori le *durate,* convenne fare un calcolo successivo, giacché la tabella precedente dà i valori di t corrispondennti alle diverse z, cioè $t = t(z)$.

Bisognava invece ricavare il valore del tempo corrispondente al valore di y relativo alla quota q dell'origine sul livello del mare per ciascun tiro».

Spiega poi, rifacendosi ad una delle tabelle precedenti, cosa occorra fare per raggiungere tale scopo.

Con gli elementi trovati fornisce la Tabella VIII (p. 237) relativa al calcolo dei tempi (durate) in funzione delle quote e dei valori di ψ e di χ.

6 - Tavole di tiro. Variazioni e correzioni

6.1 - Una volta ottenute le traiettorie, gli angoli di proiezione sono dati dalle differenze $\psi - \chi$; tagliando poi le traiettorie con la retta orizzontale alla quota zero si hanno le gittate e, dalle quote dell'origine e dalle gittate, si hanno gli angoli di sito.

Prosegue Volterra:

«In balistica ci si riferisce sempre all'orizzonte nella misura degli angoli di sito, di proiezione e di tiro, prendendo negativi quelli in depressione. Nel caso che noi studiamo si hanno sempre tiri con forti depressioni ed è quindi più comodo riferirsi nella misura degli angoli alla verticale diretta dall'alto al basso, anziché alla orizzontale. Chiameremo quindi nel seguito del presente scritto, *angoli di sito colla verticale*, e *angoli di proiezione e di tiro colla verticale* gli angoli formati dalle linee di sito, di proiezione o di tiro colla verticale diretta dall'alto in basso. Quando fosse necessario potrebbero specificarsi colle denominazioni di *angoli di sito, di proiezione e di tiro colla orizzontale* quelli ordinari».

Viene poi data la Tabella IX (p. 238), che fornisce le gittate (e le relative durate) in funzione delle quote, degli angoli di sito e di proiezione colla verticale e dell'angolo di elevazione (sia in gradi che in millesimi).

Coi dati così ottenuti vengono costruiti i seguenti grafici:

1°) degli alzi, in funzione degli angoli di sito colla verticale e della quota (Tavola IV);

2°) delle durate, in funzione degli angoli di sito colla verticale e della quota (Tavola V).

Da tali grafici, con semplice interpolazione, vengono ricavate le tavole di tiro (che sono riportate alle pp. 239-243). In tali tavole la quota varia sempre, di 100 in 100 metri, da 500 a 2500 metri e l'angolo di sito colla verticale è dato, per ogni grado sessagesimale, da 1° a 50°; con H viene indicato l'alzo in millesimi e con τ il tempo di durata in secondi e in decimi di secondo.

6.2 - Per quanto riguarda le «variazioni e correzioni», riprende Volterra (p. 244):

«Conviene adesso dare le formule generali che esprimono le variazioni degli elementi delle traiettorie per variazioni fondamentali. Questi sono: 1) la velocità iniziale v_0; 2) l'angolo di proiezione ω; 3) il coefficiente di forma i; 4) il coefficiente balistico C».

Tenuto conto della formula che dà α (qui riportata in **3.1**), osserva che si potrà prescindere da variazioni di i e di C e considerare invece variazioni del coefficiente β (anche ricordando che i calcoli precedenti erano stati condotti nell'ipotesi approssimata in cui fosse $\beta = 1$): vengono pertanto considerate le variazioni di v_0, di ω, di β.

Vengono quindi dettagliatamente esposti i procedimenti atti a tener conto della variazione di v_0 (pp. 244-246), di ω e di β; per lo studio di queste due ultime variazioni Volterra fa uso di uno speciale artificio che rende estremamente semplice il calcolo (pp. 246-248). Perviene infine ad una formula (p. 248) atta a fornire la variazione del tempo corrispondente alle precedenti variazioni nella traiettoria.

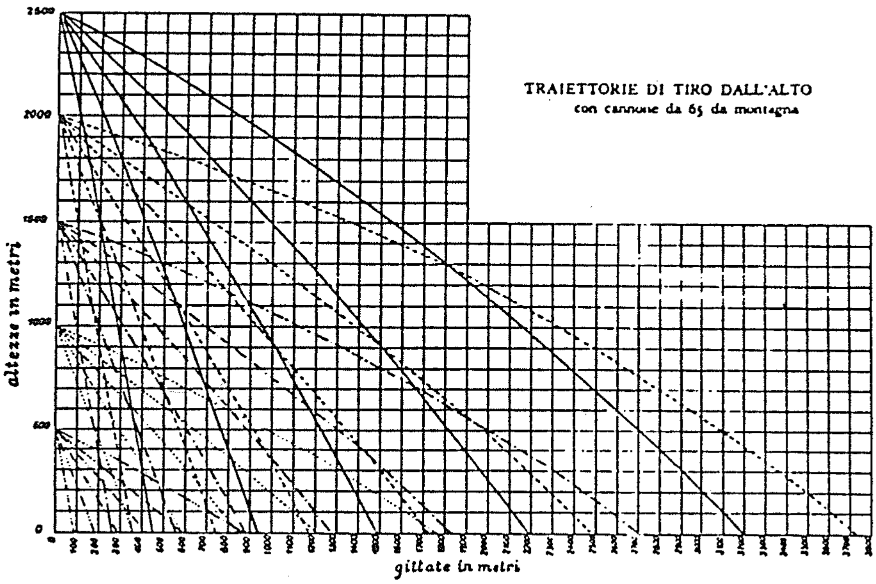

Fig. 2.

Conclude la Memoria con la presentazione di alcune tavole grafiche: la I riguarda l'Abaco I (di cui si è già detto in 4), che dà i 21 diagrammi delle (3.5) in funzione della pseudo-velocità u; la II riguarda l'Abaco II, che dà i 21 diagrammi dell'integrale (4.1) pure in funzione di u; particolarmente interessante ed espressiva la tavola III (che riportiamo), che dà i diagrammi delle «traiettorie di tiro dall'alto con cannone da 65 da montagna»; la IV dà i «grafici degli alzi (in millesimi) ed angoli di sito colla verticale per il tiro dall'alto»; la V dà, infine, i «grafici delle durate (in decimi di secondo) ed angoli di sito colla verticale per il tiro dall'alto».

7 - Osservazioni

7.1 - Da un attento esame dei *Metodi di calcolo degli elementi di tiro per artiglieria aeronautica*, si comprende come il Volterra pervenga a risultati assai raffinati, sia per quanto riguarda i metodi e gli «artifizi» usati, sia per quanto riguarda la «finezza» dei valori numerici ottenuti (quando si tengano presenti i metodi e i mezzi di calcolo di allora).

Se si tiene conto dei contributi a vari problemi di balistica esterna (ed a questioni connesse, in particolare alla telemetria, ecc.) dati in quegli anni da Vito Volterra, Mauro Picone, Guidi Fubini, Francesco Severi, Antonio Signorini (ai quali si possono aggiungere Tullio Levi-Civita, Oscar Chisini, Pietro Teofilato, Alessandro Terracini, Giovanni Sansone ed altri matematici, fisici, ingegneri italiani, tutti in servizio, salvo Fubini e Levi-Civita, in qualità di ufficiali di complemento ([16])), c'è da segnalare un «fatto comune»: e cioè che tutti [salvo il Severi che, non più giovanissimo, si era arruolato volontario come capitano di Artiglieria, e il Levi-Civita che, nel 1906, aveva dato un contributo alla «balistica terminale» con uno studio sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi] erano, agli inizi, incompetenti in questioni di Balistica (molti di loro conoscevano soltanto la cosiddetta balistica galileiana o balistica esterna nel vuoto, i cui primi elementi si apprendevano talvolta già nei Licei o negli Istituti Tecnici, e si perfezionavano, nel corso di Meccanica Razionale, durante il primo biennio di Matematica-Fisica-Ingegneria). Essi, però *dotati di ottima preparazione matematica di base* (oltre che di genio matematico), studiarono a fondo i problemi loro

---

([16]) Ricordiamo,ad esempio: il *telemetro logaritmico* di O. Chisini, il *fonotelemetro* di P. Teofilato, il *servizio fonotelemetrico per l'artiglieria* organizzato da F. Severi, la già nominata *sezione telemetrica* diretta da G. Sansone.

Per quanto riguarda i contributi dati da T. Levi-Civita, è assai bello ricordare (e ci limiteremo solo ad alcuni «frammenti») quanto disse M. Picone in un breve discorso, **[11]**$_6$, tenuto per la commemorazione del Levi-Civita nel centenario della nascita:

«Conobbi Tullio Levi-Civita, nella Sua casa ospitale di Padova, durante la guerra 1915-1918 [...]. Io andavo a trovarlo partendo da Schio, durante la notte, in un autocarro addetto ai rifornimenti [...]. Egli mi accoglieva sempre festosamente e si intratteneva con me per lo studio di alcuni problemi di Balistica che Gli sottoponevo. Da ciò trassi sempre grandi benefici per l'adempimento dei nuovi varii compiti di tiro. Un giorno Egli mi fece trovare sul Suo scrittoio una macchina calcolatrice Brunswiga che mi prestò [...]. Ciò ci permise di fare, in tempo utile, i lunghi non facili calcoli necessari per la compilazione delle nuove tavole di tiro [...]. Che fine abbia fatto quella macchina calcolatrice lo ignoro. Il Levi-Civita ebbe la delicatezza, in Lui innata, di non chiedermelo mai».

posti e li seppero brillantemente risolvere: e ciò fecero non solo e non tanto, come accadde per alcuni, dietro «ordine superiore» [17], ma, per usare una bella espressione di Guido Fubini, «per debito di studioso» [18].

Come «denominatore comune» a fornire la preparazione di base, in balistica esterna, era allora il celebre ed ormai classico trattato «Balistica» $[13]_1$ del grande Francesco Siacci (più volte dal Volterra citato ed al quale si era ispirato per quello che era stato un «geniale artifizio» del Siacci, di introdurre cioè la cosiddetta pseudo-velocità, alla quale si è qui accennato in 3 [19]), ed il più recente «Corso teorico-pratico di Balistica esterna» di Giovanni Bianchi, allievo del Siacci.

Questi due testi erano stati, per tutti, la base su cui costruire più accurati o diversi metodi, sia legati alla recente Analisi Funzionale (o, come allora si diceva, «delle funzioni di linee») di cui il Volterra era stato pioniere e maestro [20], sia legati alla «nuova» Analisi Numerica (alla quale, proprio allora, coi metodi di calcolo relativi alle «tavole di tiro», M. Picone dava i suoi primi contributi, e ne sarà in seguito — con la fondazione, nel 1927 all'Università di Napoli, di un «Istituto di Calcolo», divenuto successivamente, nel 1932, l'Istituto Nazionale

---

[17] A questo proposito, assai interessante è l'episodio che mise di colpo, per «ordine superiore», il sottotenente delle Milizie Territoriali M. Picone (che, come lui dice, «non aveva mai visto, da vicino, un cannone»), nel 1916, di fronte ad un pressante problema di balistica esterna, legato al tiro «con grande angolo di sito» in montagna: problema che fu brillantemente risolto ed i cui risultati furono «resi operativi» entro quel mese di tempo che gli era stato concesso: si veda $[11]_5$, pp. 5-8; $[15]_1$, pp. 358-359.

[18] G. Fubini, che, come si compiaceva allora di dire, «non aveva mai visto un cannone, se non da dietro le grate delle finestre del Palazzo dell'Arsenale di Torino», accenna in una sua Nota Lincea [5] alla «lettura fatta, per debito di studioso, di tutte le Memorie di Balistica che potei procurarmi» (ricordiamo che i contributi alla balistica di Fubini comprendono ben sette pubblicazioni: si veda $[15]_2$).

[19] È anche interessante e significativo il fatto, già qui ricordato, che il Volterra, nel 1893, era succeduto proprio al Siacci sulla cattedra di Meccanica Razionale dell'Università di Torino: entrambi Senatori del Regno per alti meriti scientifici ed organizzativi, entrambi Accademici Lincei.

[20] M. Picone, riferendosi a quello che è forse il suo più raffinato (dal punto di vista dell'Analisi Funzionale) contributo alla balistica, relativo al calcolo della «perturbazione dovuta al vento», $[11]_3$, pubblicato nel 1919, ricorda che lui stesso «ebbe la ventura di applicare utilmente il concetto di Volterra [di variazioni successive di una funzione di linea] per il calcolo, durante la prima guerra mondiale, della perturbazione nel moto dei proietti d'artiglieria [dovuta al vento]». In quello stesso anno Picone aveva pubblicato la Nota Lincea $[11]_2$, nel cui titolo è ricordato quel concetto di Volterra di «funzione di linea».

per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R., con sede a Roma [l'attuale I.A.C. «M. PICONE»] — pure pioniere e maestro.

Ci piace anche ricordare che, nella commemorazione del Volterra $[\mathbf{11}]_4$, Picone descrive un imprevisto incontro col Volterra stesso. Dice Picone:

«Recatomi, sul finire del 1916, al Comando Supremo [...], trovai, in un'anticamera di un ufficio, in paziente attesa d'essere ricevuto, niente di meno che il Senatore Volterra, in divisa di capitano del Genio [...]. Si discorse a lungo; fu infatti, fortunatamente per me, lunga l'attesa del capitano Volterra [...]. Egli, con la Sua solita affabilità e chiara visione delle cose, mi espose le Sue idee sulla necessità di organizzare immediatamente una collaborazione fra Scienza e Tecnica [...]. Trovai così un primo autorevolissimo ed estremamente incoraggiante consenso all'idea [...] di un Istituto per le Applicazioni del Calcolo (che potei realizzare circa dieci anni dopo all'Università di Napoli)».

E ricorda ancora, per porre in risalto anche la «assoluta umiltà» del Volterra, che questi «in una Sua Memoria sul tiro per l'artiglieria aeronautica, pubblicata nel 1916 dall'Istituto Centrale Aeronautico, si limitava ad apporvi il solo Suo titolo di "Tenente del Genio"».

7.2 - A quell'anziano «tenente del Genio» di allora, a quel «gigante del pensiero» tanto deve, attualmente, la Scienza: non solo l'Analisi Matematica (con le equazioni integrali ed integro-differenziali di Volterra, ecc.), l'Analisi Funzionale (di cui fu, come già ricordammo, pioniere e maestro), la Teoria delle Funzioni (col teorema di Poincaré-Volterra e coi contributi alla teoria delle funzioni di più variabili complesse ([21])), la Meccanica Razionale e la Fisica Matematica (discipline per lui preminenti: notevoli furono, fra svariati argomenti da lui trattati, i contributi alla teoria matematica dell'Elasticità, «campo nel quale egli ha lasciato — secondo G. Fichera [4] — l'orma più profonda» ([22])), ma

---

([21]) Dice Volterra, nella commemorazione che tenne — alla solenne inaugurazione del Rice Institute del Texas, il 10 ottobre 1912 — del sommo matematico francese Henri Poincaré, prematuramente scomparso (cfr. $[\mathbf{16}]_3$, pp. 129-130):

«La Teoria delle Funzioni fu la conquista più importante fatta dall'Analisi nel secolo scorso; io non ho esitato nel 1900 al Congresso Matematico di Parigi a chiamare il secolo XIX il secolo della Teoria delle Funzioni. [...] Lagrange fu il primo a trattarne in generale ed in modo sistematico nella celebre opera sulla teoria delle funzioni analitiche in cui si trovano i germi delle future scoperte. [...] Cauchy, Riemann e Weierstrass ci hanno insegnato a leggere [di quella teoria] il libro misterioso e col loro genio ce ne hanno svelato i segreti più riposti».

([22]) In particolare alla teoria da lui detta delle «distorsioni» (e nota attualmente come anche altre e «nuove» discipline, come, per ricordarne due sole, la Talassografia e la Biomatematica.

Nel 1909, per iniziativa del Volterra, nasce il Comitato talassografico italiano, rivolto allo studio, in concorso con altre Nazioni, dei problemi fisici e biologici del mare.

Nel 1926, per venire incontro ad un problema propostogli da Umberto D'Ancona, professore di Zoologia dell'Università di Padova, applica i metodi dell'Analisi allo studio delle fluttuazioni del numero di due certe varietà di pesci dell'Adriatico, dando l'avvio ai cosiddetti problemi «predatori-predati» e alla «teoria matematica delle fluttuazioni biologiche». Questi studi lo porteranno, qualche anno dopo, a tenere, su invito, un corso alla Sorbona, che sarà poi stampato, nel 1931, col titolo, divenuto celebre, *Leçons su la Théorie mathématique de la lutte pour la vie»* (23).

Per quanto riguarda gli ultimi «amari anni» di Vito Volterra (24), scomparso l'11 ottobre 1940, si tratta di fatti relativamente più recenti e, forse, più noti, ma che è bene non siano dimenticati: rimandiamo, su ciò, a quanto scrivono J. Pérès in [**10**] e G. Fichera in [4]. Ci limitiamo a riportare qui le ultime quattro righe dei «Cenni biografici» [**10**]:

«Tre anni dopo [la morte del Volterra], il 16 ottobre 1943, un camion di SS tedesche si recava nella sua abitazione in Roma, con l'ordine — poiché si credeva fosse ancora in vita — di arrestarlo per trasportarlo in uno degli orridi campi di annientamento in Germania».

Così termina J. Pérès, suo fedelissimo amico e collaboratore. Questo agghiacciante episodio è ricordato anche da D. Galletto, nella bella commemorazione che fece, nel 1973, di Tullio Levi-Civita, in occasione del centenario della nascita (25). Il Levi-Civita, israelita come il Volterra e come lui sommo fisico-matematico (ed il cui padre aveva combattuto con Garibaldi all'Aspromonte e a

---

teoria delle «dislocazioni», dopo che il Love, traducendo in inglese, usò il vocabolo «dislocations») e alla teoria dei «fenomeni ereditari», cioè dei «corpi elastici le cui deformazioni risentono di tutto il passato» [Volterra, umoristicamente, era solito dire che (cfr. [4]) «ha una memoria di acciaio lo stucco, che ricorda tutto, mentre l'acciaio, specie se di buona qualità, è assai smemorato»].

(23) Cfr. [**16**]$_2$.

(24) Anni vissuti con grande dignità e coraggio: «Egli non piegò» dice Guido Castelnuovo in [2]. E ci piace qui ricordare un elogio che il Volterra fece di Henri Poincaré nella commemorazione già citata in (21), e che bene si attaglia al Volterra stesso: «Da buon soldato è rimasto sulla breccia sino all'estremo respiro».

(25) Cfr. [6].

Bezzecca ed era stato sindaco di Padova e Senatore del Regno), moriva a Roma nel 1941. Dice Galletto: «La morte gli risparmiò il culmine della tragedia, ossia la deportazione nei campi di sterminio. Così come la morte salvò da egual fine l'altrettanto grande Vito Volterra».

Vito Volterra e Tullio Levi-Civita: i due più eminenti Meccanici italiani dopo Galileo e Lagrange.

Bibliografia

[1] G. BIANCHI, *Corso teorico-pratico di Balistica esterna*, Pasta, Torino, 1910.

[2] G. CASTELNUOVO, *Vito Volterra* (Cfr. $[16]_1$, vol. I, pp. IX-XIII).

[3] G. A. CROCCO, *Opere*, vol. I (1904-1925), II (1926-1940), III (1941-1962), Accad. Naz. Lincei, Roma.

[4] G. FICHERA, *Il contributo italiano alla teoria matematica dell'Elasticità*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 28 (1979), 5-26.

[5] G. FUBINI, *Alcune osservazioni sui problemi della balistica esterna*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 28, 1° Sem. (1919), 374-377.

[6] D. GALLETTO, *Tullio Levi-Civita* (1873-1941), Boll. Un. Mat. Ital. (4) 8 (1973), 373-390.

[7] A. M. LEGENDRE, *Dissertation sur la question de Balistique proposée par l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Prusse*, Berlin, 1782.

[8] T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Nozioni di Balistica esterna*, Zanichelli, Bologna, 1935.

[9] C. MONTÙ, *Storia dell'Artiglieria italiana*, voll. I-XVI (1934-1955), Ediz. a cura della Rivista e della Biblioteca di Artigl. e Genio, Roma.

[10] J. PÉRÈS, *Cenni biografici di Vito Volterra* (Cfr. $[16]_1$, vol. I, pp. XXVII-XXXIII).

[11] M. PICONE: $[\bullet]_1$ *Tavole di tiro da montagna*: fasc. I.A, *Descrizione ed uso delle tavole* (pp. 60); fasc. I.B, *Teoria e metodo di compilazione* (pp. 130); fasc. II, *Mortaio da* 210 (pp. 159); fasc. III (pp. 217) e fasc. IV (pp. 239), *Cannone da* 149A, Comando Artigl. VI Armata, 1918; $[\bullet]_2$ *Le equazioni alle variazioni, per cause perturbatrici variabili, nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci Fis. Mat. Natur. (5) 28 (1919), 127-131; $[\bullet]_3$ *Sul calcolo della perturbazione nel moto dei proietti dovuta al vento*, Riv. Artigl. Genio, **36**, vol. III (1919), 55-98; $[\bullet]_4$ *Commemorazione di Vito Volterra pronunziata a Palermo il 15 settembre 1956, cinquantesimo anniversario della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, Ricerca Scient. 26 (1956), 3277-3289; $[\bullet]_5$ *La mia vita*, Tip. Bardi, Roma, 1972, pp. 18; $[\bullet]_6$ *Discorso tenuto nel Convegno Internazionale per la celebrazione del centenario della nascita di Tullio Levi-Civita* (17-19 *dicembre* 1973), Tip. Bardi, Roma, 1974, pp. 4.

[12] G. SANSONE, *Algebristi, Analisti, Geometri differenzialisti, Meccanici e Fisici-matematici ex-Normalisti del periodo* 1860-1929, Scuola Norm. Superiore, Pisa, 1977.

[13] F. SIACCI: $[\bullet]_1$ *Balistica*, 2ª ediz., Casanova, Torino, 1888; $[\bullet]_2$ *Scritti scientifici*, vol. I, II, III, Provved. Gener. Stato, Roma, 1928.

[14] C. SOMIGLIANA, *L'opera scientifica di Vito Volterra* (Cfr. $[16]_1$, vol. I, pp. XV-XXVI).

[15] L. TANZI CATTABIANCHI: $[\bullet]_1$ *I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 357-389; $[\bullet]_2$ *I contributi di Guido Fubini e di Francesco Severi ad alcuni problemi di balistica esterna*, Suppl. vol. **145** Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (1981), 217-233; $[\bullet]_3$ *Generalizzazioni di una formula di Levi-Civita sulla penetrazione dei proiettili deformabili*, Atti Conv. Balistica Forense, Montagnoli Edit., Roma 1982, pp. 619-625; $[\bullet]_4$ *Attualità di uno studio inedito di balistica interna di Lagrange, completato, in un caso particolare, da Poisson*, Accad. Militare, Modena (1987-88), pp. 29.

[16] V. VOLTERRA: $[\bullet]_1$ *Opere matematiche (Memorie e Note)*, vol. I (1954), II (1956), III (1957), IV (1960), V (1962), Accad. Naz. Lincei, Roma; $[\bullet]_2$ *Metodi di calcolo degli elementi di tiro per artiglieria aeronautica*, Rend. Ist. Centrale Aeronautico, vol. V, Roma, 1916; $[\bullet]_3$ *Relazione della Commissione di organizzazione scientifica interalleata, riunitasi presso l'Institut de France a Parigi*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 28, 1° Sem. (1919), 90-99; $[\bullet]_4$ *Saggi scientifici*, Zanichelli, Bologna, 1920; $[\bullet]_5$ *Leçons sur la Théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Cahiers Scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

Riassunto

Vengono qui illustrati i contributi apportati da Vito Volterra ad un problema di balistica esterna da aeromobili; contributi che risalgono al 1915, quando il Volterra (nato nel 1860), già da tempo universalmente noto come eminente matematico e, dal 1905, Senatore del Regno («per alti meriti scientifici ed organizzativi») si era arruolato volontario come tenente del Genio aeronautico. Tali contributi erano stati originariamente pubblicati, in una consistente Memoria, nel 1916, sui Rendiconti dell'Istituto Centrale Aeronautico e, successivamente, inseriti nel IV volume delle Opere matematiche *del Volterra, pubblicate, dal 1954 al 1962, a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei e col concorso del Consiglio Nazionale delle Ricerche.*

L'autore accosta poi tali contributi ad altri (pure apportati a vari problemi di balistica esterna, nel periodo 1916-1918, *da Mauro Picone, Guido Fubini, Francesco Severi e da altri matematici italiani), sui quali aveva già pubblicato alcuni precedenti studi.*

***