Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 121-133

GIORGIO GENTILI (*)

Alcune proprietà per la funzione di rilassamento in viscoelasticità lineare (**)

1 - Introduzione

Recentemente Fabrizio e Morro $[5]_1$ hanno determinato una restrizione sulla funzione di rilassamento di un materiale viscoelastico lineare che risulta essere condizione necessaria e sufficiente per la validità del Secondo Principio della Termodinamica.

In questo lavoro formuleremo, sempre per materiali viscoelastici lineari, un teorema che estende il Principio di Dissipazione di Gurtin ed Herrera [4], [6], originariamente valido per processi di deformazione nulli fino ad un tempo finito, a processi non nulli in $(-\infty, t]$ ma di classe $H^1(-\infty, t]$; quindi, mediante tale teorema, proveremo ulteriori restrizioni per la funzione di rilassamento.

Proveremo che queste restrizioni risultano legate alle condizioni sulla stabilità del comportamento asintotico dello stress rispetto alla deformazione messe in evidenza da un teorema di Paley e Wiener [8].

Successivamente, dopo aver enunciato sulla equazione costitutiva una particolare «proprietà di equivalenza per continuazione statica», proveremo che da tale proprietà segue la simmetria e la monotonia della funzione di rilassamento su tutto l'intervallo di definizione $[0, \infty)$.

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, P.za di Porta S. Donato 5, I-40127 Bologna.

(**) Ricevuto: 23-II-1988.

2 - Richiami e notazioni

In viscoelasticità lineare la relazione fra il tensore degli sforzi $\mathbf{T}(t)$ e il tensore di deformazione $\mathbf{E}(t)$, si esprime nel modo seguente

$$\mathbf{T}(t) = \mathrm{G}(0)\,\mathbf{E}(t) + \int_0^\infty \mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}(t-s)\,\mathrm{d}s \qquad (\mathbf{T},\ \mathbf{E} \in \mathfrak{I}_{sym}) \tag{2.1}$$

dove $\mathbf{E}(t-s)$ è la storia della deformazione infinitesima $\mathbf{E}(t)$ che in seguito scriveremo nella forma compatta $\mathbf{E}^t(s) = \mathbf{E}(t-s)$, e dove $\mathfrak{I}_{sym}$ è lo spazio dei tensori simmetrici del secondo ordine.

La funzione $\mathrm{G}(t)$, chiamata funzione di rilassamento, è legata ai tensori del quarto ordine $\mathrm{G}(0)$ e $\mathrm{G}'(t) \in \mathrm{L}^1(0,\ \infty)$ dalla relazione

$$\mathrm{G}(t) = \mathrm{G}(0) + \int_0^t \mathrm{G}'(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.2}$$

ed il suo valore limite $\mathrm{G}(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{G}(t)$ è detto modulo di rilassamento.

Lo spazio delle storie di deformazione per un materiale viscoelastico a memoria evanescente viene definito utilizzando una funzione di influenza $h(s): R^+ \to R^+$, non crescente, $h \in L^1(0,\ \infty)$, $sh(s) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tale che

$$\int_0^\infty |\mathrm{G}'(s)|^2\, h^{-1}(s)\,\mathrm{d}s < \infty\,. \tag{2.3}$$

Chiameremo *spazio di Banach delle storie di deformazione* l'insieme

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{E}^t : R^+ \to \mathfrak{I}_{sym} : \|\mathbf{E}^t\|^2 < \infty\} \tag{2.4}$$

la cui norma è definita

$$\|\mathbf{E}^t\| = (|\mathbf{E}(t)|^2 + \int_0^\infty |\mathbf{E}^t(s)|^2\, h(s)\,\mathrm{d}s)^{1/2}\,.$$

È possibile introdurre nello spazio $\mathcal{B}$ una definizione di prodotto scalare tra due storie nel modo seguente

$$(\mathbf{E}_1^t,\ \mathbf{E}_2^t) = \mathbf{E}_1(t)\cdot\mathbf{E}_2(t) + \int_0^\infty \mathbf{E}_1^t(s)\cdot\mathbf{E}_2^t(s)\,h(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{2.5}$$

Pertanto lo spazio dotato del prodotto interno (2.5) risulterà di Hilbert e lo indicheremo con Σ.

Fabrizio e Morro [5]$_2$, sfruttando una deformazione di prova del tipo

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1 \cos \omega t + \mathbf{E}_2 \sin \omega t$$

hanno provato che condizione necessaria e sufficiente affinché valga il Secondo Principio della Termodinamica è che G verifichi la seguente disuguaglianza

$$\mathbf{E}_1(\mathrm{G}(0)^T - \mathrm{G}(0))\,\mathbf{E}_2 - \int_0^\infty (\mathbf{E}_1\,\mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\,\mathrm{G}'(s)\,E_2)\sin \omega s\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty \mathbf{E}_1(\mathrm{G}'(s)^T - \mathrm{G}'(s))\,\mathbf{E}_2 \cos \omega s\,\mathrm{d}s \geqslant 0 \tag{2.6}$$

per ogni $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2 \in \mathfrak{J}_{sym}$.

Da tale relazione considerando i casi limite per $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$, discendono le restrizioni (trovate in precedenza in [1], [2], [5]$_2$, [6]) per la funzione di rilassamento

$$\mathrm{G}(0) = \mathrm{G}^T(0) \qquad \mathrm{G}(\infty) = \mathrm{G}^T(\infty) \tag{2.7$_a$}$$

$$\mathbf{U}\cdot[\mathrm{G}(0) - \mathrm{G}(t)]\,\mathbf{U} \geqslant 0 \qquad \mathbf{U}\cdot\mathrm{G}'(0)\,\mathbf{U} \leqslant 0\,. \tag{2.7$_b$}$$

Gurtin ed Herrera [6], partendo dall'assunzione termodinamica che si deve sempre compiere lavoro per deformare un materiale viscoelastico dal suo stato vergine, hanno formulato un ulteriore

Principio di Dissipazione. Sia un materiale viscoelastico, allora il lavoro degli sforzi interni sarà

$$w_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{T}(\tau)\,\dot{\mathbf{E}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \geqslant 0 \tag{2.9}$$

per ogni $t \geqslant t_0$ e per ogni gradiente di deformazione $\mathbf{E}(t)$ identicamente nullo fino all'istante t_0 e con $\mathbf{E}(t_0) = 0$.

Ricordiamo anche la definizione di *materiale fortemente dissipativo*.

Un materiale viene detto *fortemente dissipativo*, se e solo se l'unica storia di deformazione $\mathbf{E}(t)$ tale che

$$w_{t_0}(t) = 0 \qquad \forall t \geqslant t_0 \tag{2.10}$$

è la deformazione nulla

$$\mathbf{E}(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in R. \tag{2.11}$$

Dalle (2.10) e (2.11) segue [**6**]

$$\mathbf{E}\mathrm{G}(0)\mathbf{E} > 0. \tag{2.12}$$

È stato inoltre dimostrato [**6**] che, sotto opportune condizioni di regolarità per la funzione di rilassamento G, un materiale che verifichi la (2.9) e la (2.12) è anche fortemente dissipativo.

3 - Sul comportamento asintotico della relazione di stress

Enunciamo ora il seguente teorema che estende il Principio di Dissipazione di Gurtin ed Herrera ad un intervallo $(-\infty,\ t]$.

Teorema 3.1. *Su ogni processo di deformazione* $\mathbf{E}(\tau) \in H^1(-\infty,\ t]$ (1) *relativo ad un materiale viscoelastico lineare, come conseguenza di* (2.9) *risulta*

$$w_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{E}}(\tau)\,\mathbf{T}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Dim. Osserviamo innanzi tutto che, date le ipotesi del teorema, l'integrale nella (3.1) è ben definito.

Infatti, per la proprietà del prodotto di convoluzione [**10**], se $\mathrm{G}'(s) \in L^1(0,\ \infty)$ e $\mathbf{E}(\tau - s) \in L^2(0,\ \infty)$, allora $T(\tau) \in L^2(-\infty,\ t]$; dunque l'integrale nella (3.1) è finito, in quanto l'integrando risulta il prodotto di due funzioni di $L^2(-\infty,\ t]$.

Consideriamo ora un processo di deformazione del tipo

$$\mathbf{E}_{t_0}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < t_0 \\ \mathbf{E}(\tau)(1 - e^{t_0 - \tau}) & \tau \geqslant t_0 ; \end{cases} \tag{3.2}$$

---

(1) $H^1(-\infty,\ t)$ è lo spazio di Sobolev delle funzioni $F(\tau)$ tali che $F(\tau) \cdot F'(\tau) \in \mathrm{L}^2(-\infty,\ t)$.

dal Principio di Dissipazione (2.9) abbiamo

$$(3.3)\qquad \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{E}}_{t_0}(\tau)\,\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{t_0}^{\tau}, \tau)\,d\tau \geq 0 ;$$

vale inoltre

$$(3.4)\qquad 0 \leq \lim_{t_0\to\infty} \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{E}}_{t_0}(\tau)\,\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{t_0}^{\tau}, \tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{E}}(\tau)\,\mathbf{T}(\tau)\,d\tau .$$

Infatti, per il teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata, ciò sarà vero se esiste una funzione sommabile $\sigma:(-\infty,\ t]\to R^+$ tale che

$$|\dot{\mathbf{E}}_{t_0}(\tau)\,\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{t_0}^{\tau}, \tau)| \leq \sigma(\tau) \qquad \text{per ogni } t_0 \in (-\infty,\ t] .$$

È facilmente verificabile che

$$(3.5)\qquad |\dot{\mathbf{E}}_{t_0}(\tau)\,\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{t_0}^{\tau}, \tau)|$$

$$< (|\mathbf{E}(\tau)| + |\dot{\mathbf{E}}(\tau)|)\,(|\mathrm{G}(0)\,\mathbf{E}(\tau)| + \int_{0}^{\infty} |\mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}(\tau-s)|\,ds) = \sigma(\tau) .$$

Poiché $\mathbf{E}(\tau)$ e $\dot{\mathbf{E}}(\tau)$ sono di L^2, $\sigma(t)$ risulta sommabile.
Vale pertanto la (3.4) ed il teorema è provato.

Consideriamo ora

$$(3.6)\qquad \mathbf{E}(\tau) = e^{\alpha\tau}(\mathbf{E}_1 \cos\omega\tau + \mathbf{E}_2 \sin\omega\tau) .$$

Sviluppando $\mathbf{T}(t)$ secondo la (2.1) e imponendo la condizione (3.1) abbiamo

$$\int_{-\infty}^{t} (\dot{\mathbf{E}}(\tau)\,\mathrm{G}(0)\,\mathbf{E}(\tau) + \int_{0}^{\infty} \dot{\mathbf{E}}(\tau)\,\mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}^{\tau}(s)\,ds)\,d\tau \geq 0 .$$

Quindi utilizzando come deformazione su $(-\infty,\ t]$ la funzione (3.6) si ha

$$(3.7)\qquad \int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha\tau}\{((\alpha\mathbf{E}_1 + \omega\mathbf{E}_2)\cos\omega\tau + (\alpha\mathbf{E}_2 - \omega\mathbf{E}_1)\sin\omega\tau)\,\mathrm{G}(0)\,(\mathbf{E}_1\cos\omega\tau + \mathbf{E}_2\sin\omega\tau)$$

$$+ \int_{0}^{\infty} ((\alpha\mathbf{E}_1 + \omega\mathbf{E}_2)\cos\omega\tau + (\alpha\mathbf{E}_2 - \omega\mathbf{E}_1)\sin\omega\tau)\,\mathrm{G}'(s)((\mathbf{E}_1\cos\omega\tau + \mathbf{E}_2\sin\omega\tau)\cos\omega s$$

$$+ (\mathbf{E}_1\sin\omega\tau - \mathbf{E}_2\cos\omega\tau)\sin\omega s)\,e^{-\alpha s}\,ds\}\,d\tau \geq 0 .$$

Chiamiamo

$$f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathbf{E}_1\,\mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}_2\,\sin\omega s\,\mathrm{d}s$$

$$h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_1\,\mathrm{G}(0)\,\mathbf{E}_2 + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathbf{E}_1\ \mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}_2\,\cos\omega s\,\mathrm{d}s$$

la disuguaglianza (3.7) si scrive

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\{(\alpha h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1) + \omega h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1) - \alpha f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2) - \omega f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2))\cos^2\omega\tau$$
$$+ (\alpha h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2) + \omega h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2) + \alpha h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1) - \omega h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1) + \alpha f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1)$$
$$+ \omega f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1) - \alpha f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2) + \omega f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2))\sin\omega\tau\ \cos\omega\tau + (\alpha f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1)$$
$$- \omega f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1) + \alpha h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2) - \omega h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2))\sin^2\omega\tau\}\,\mathrm{d}\tau \geqslant 0$$

che possiamo porre nella forma

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\{(h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1) - f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2))(\alpha\cos^2\omega\tau - \omega\sin\omega\tau\cos\omega\tau) + (h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1)$$
$$- f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2))(\omega\cos^2\omega\tau + \alpha\sin\omega\tau\cos\omega\tau)$$
$$+ (h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2) + f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1))(\alpha\sin\omega\tau\cos\omega\tau - \omega\sin^2\omega\tau)$$
$$+ (h^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2) - f^{\alpha}_{\omega}(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1))(\omega\sin\omega\tau\cos\omega\tau + \alpha\sin^2\omega\tau)\}\,\mathrm{d}\tau \geqslant 0\,.$$

Si può facilmente verificare che

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\sin\omega\tau\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\sin 2\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{e}^{2\alpha t}}{4(\alpha^2+\omega^2)}(\alpha\sin 2\omega t - \omega\cos 2\omega t)$$

$$\alpha\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\cos^2\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{e}^{2\alpha t}\cos^2\omega t}{2} + \omega\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\sin\omega\tau\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$$

$$\alpha\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\sin^2\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{e}^{2\alpha t}\sin^2\omega t}{2} - \omega\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{2\alpha\tau}\sin\omega\tau\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\,;$$

avremo quindi

$$
(3.8)\qquad \frac{1}{2}e^{2\alpha t}\{(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1)-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2))\cos^2\omega t+(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2)+f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1))\sin^2\omega t
$$

$$
+[h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1)-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2))(\sin\omega t\cos\omega t+\frac{\omega}{2\alpha})
$$

$$
+(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2)+f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1)](\sin\omega t\cos\omega t-\frac{\omega}{2\alpha}))\geqslant 0\,.
$$

Poiché f^α_ω e h^α_ω non dipendono dal punto t, scegliendo dei tempi opportuni posso ancora ottenere relazioni di carattere generale; in particolare per $\omega t=k\pi$ e $\omega t=(k+\frac{1}{2})\pi$ si avrà rispettivamente

$$
(3.9)_a\qquad \alpha(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1)-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2))+\frac{1}{2}\omega(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1)
$$

$$
-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2)-h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2)-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1))\geqslant 0
$$

$$
(3.9)_b\qquad \alpha(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2)+f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1))+\frac{1}{2}\omega(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1)
$$

$$
-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2)-h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2)-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1))\geqslant 0\,.
$$

Sommando le (3.9) otteniamo

$$
(3.9)_c\qquad \alpha(h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1)+h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2)+f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1)-f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2))
$$

$$
-\omega(f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1)+f^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2)+h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2)-h^\alpha_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1))\geqslant 0\,.
$$

Notiamo che per $\alpha\to 0$ le (3.9) tendono a

$$
(3.10)\qquad \omega(h^0_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_1)-f^0_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_1)-h^0_\omega(\mathbf{E}_1,\ \mathbf{E}_2)-f^0_\omega(\mathbf{E}_2,\ \mathbf{E}_2))\geqslant 0\,.
$$

Ricordando la definizione di h e f si osserva che la (3.10) coincide con la (2.6).

Ne consegue che le proprietà della funzione di rilassamento trovate in $[5]_1$ sono ancora determinabili attraverso le (3.9). In particolare ritroveremo le relazioni già espresse nelle (2.7).

Consideriamo ora una qualsiasi delle (3.9).

Ponendo il limite $\alpha \to \infty$ si ha

$$(3.11)_a \qquad \mathbf{E}G(0)\mathbf{E} \geqslant 0 .$$

Se poniamo ora $\omega \to 0$ otteniamo dalla (3.8)

$$(3.11)_b \qquad \mathbf{E}G(0)\mathbf{E} + \int_0^\infty e^{-\alpha s}\mathbf{E}G'(s)\mathbf{E}\, ds \geqslant 0 .$$

Facendo il limite anche per $\alpha \to 0$ $(\omega = 0)$, quest'ultima relazione tende a

$$(3.11)_c \qquad \mathbf{E}G(\infty)\mathbf{E} \geqslant 0 .$$

Sappiamo già dalla meccanica dei mezzi viscoelastici che il tensore del quart'ordine $G(\infty)$ è strettamente definito positivo per i solidi viscoelastici, mentre la (3.11c) si annulla quando il materiale in questione è un fluido.

Consideriamo ancora le (3.9) e poniamo $\mathbf{E}_1 = 0$ e $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$ (oppure $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$ e $\mathbf{E}_2 = 0$), avremo

$$(3.12)_a \quad \alpha h^\alpha_\omega(\mathbf{E},\ \mathbf{E}) - \frac{1}{2}\omega f^\alpha_\omega(\mathbf{E},\ \mathbf{E}) \geqslant 0 \qquad (3.12)_b \quad \omega f^\alpha_\omega(\mathbf{E},\ \mathbf{E}) \leqslant 0 .$$

Saranno quindi soddisfatte sempre almeno una delle due disequazioni

$$(3.13)_a \qquad \omega \int_0^\infty e^{-\alpha s}\mathbf{E}G'(s)\mathbf{E}\, \sin \omega s\, ds \leqslant 0$$

$$(3.13)_b \qquad \mathbf{E}G(0)\mathbf{E} + \int_0^\infty e^{-\alpha s}\mathbf{E}G'(s)\mathbf{E}\, \cos \omega s\, ds \geqslant 0 .$$

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 3.2. *Per un mezzo viscoelastico fortemente dissipativo secondo la definizione di Gurtin ed Herrera, si verifica sempre almeno una delle seguenti relazioni*

$$(3.14)_a \qquad \omega \int_0^\infty e^{-\alpha s}\mathbf{E}G'(s)\mathbf{E}\, \sin \omega s\, ds < 0 \qquad \omega,\ \alpha > 0$$

$$(3.14)_b \qquad \mathbf{E}G(0)\mathbf{E} + \int_0^\infty e^{-\alpha s}\mathbf{E}G'(s)\mathbf{E}\, \cos \omega s \cdot ds > 0 \qquad \alpha > 0 .$$

Dim. Per la dimostrazione basta verificare che, per un materiale fortemente dissipativo con funzione di rilassamento $G(t)$, se esistono $\omega^* \in R$, $\alpha^* \in R$, $\mathbf{E}^* \in \mathfrak{I}_{sym}$ che verificano l'uguaglianza in una delle (3.13), queste stesse non possono verificare l'uguaglianza anche nell'altra.

Siano allora $\omega = \omega^*$, $\alpha = \alpha^*$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^*$ tali che

$$\omega^* \int_0^\infty e^{-\alpha^* s} \mathbf{E}^* G'(s) \mathbf{E}^* \sin \omega^* s \, ds = 0 ;$$

prendiamo allora una deformazione di prova del tipo (3.6) con

$$\alpha = \alpha^* \qquad \omega = \omega^* \qquad \mathbf{E}_2 = 0 \qquad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}^* .$$

Il lavoro degli sforzi interni espresso nella (3.8) si ridurrà a

$$w(t) = \frac{1}{2} e^{2\alpha^* t} (\mathbf{E}^* G(0) \mathbf{E}^* + \int_0^\infty e^{-\alpha^* s} \mathbf{E}^* G'(s) \mathbf{E}^* \cos \omega^* s \, ds) \cos^2 \omega^* t \geqslant 0 .$$

Notiamo subito che se fosse

$$\mathbf{E}^* G(0) \mathbf{E}^* + \int_0^\infty e^{-\alpha^* s} \mathbf{E}^* G'(s) \mathbf{E}^* \cos \omega^* s \, ds = 0$$

avremmo trovato una deformazione non identicamente nulla

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^* e^{\alpha^* t} \cos \omega^* t$$

per cui il lavoro degli sforzi interni sarebbe identicamente nullo, il che è contrario alla definizione di materiale fortemente dissipativo.

Si può facilmente verificare che la dimostrazione è valida anche nel caso in cui $\omega^* = 0$.

Il teorema è pertanto dimostrato.

Consideriamo ora la (2.1) nel caso unidimensionale, in cui sia nulla la deformazione per tempi negativi

$$T(t) = G(0) E(t) + \int_0^t G'(s) E(t-s) \, ds = G(0) E(t) + \int_0^t G'(t-s) E(s) \, ds . \tag{3.15}$$

Possiamo notare che la (3.15) è assimilabile ad un'equazione integrale di Volterra.

È pertanto applicabile un teorema di Paley e Wiener [8] sul comportamento asintotico dell'equazione (3.15).

Teorema 3.3. *Sia* E(t) *misurabile e limitata su un dominio finito* $(0, A)$. *Sia*

$$\int_0^\infty \left|\frac{G'(s)}{G(0)}\right| ds < \infty \tag{3.16}$$

e sia

$$T(t) = G(0)\,E(t) + \int_0^t G'(t-s)\,E(s)\,ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} T(\infty)\,. \tag{3.17}$$

Allora se

$$\int_0^\infty G'(s)\,e^{-ps}\,ds \neq -G(0) \qquad \mathrm{Re}(p) \geqslant 0 \tag{3.18}$$

abbiamo

$$E(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} T(\infty)\cdot\Big(G(0) + \int_0^\infty G'(s)\,ds\Big)^{-1} = T(\infty)\cdot(G(\infty))^{-1}\,. \tag{3.19}$$

Viceversa se vale la (3.16), *si ha*

$$\int_0^\infty G'(s)\,ds \neq -G(0) \tag{3.20}$$

e la (3.17) *implica la* (3.19); *allora vale la* (3.18).

Osservazione. La (3.16) è sicuramente soddisfatta purché $G(0)$ sia strettamente definita positiva e ciò è verificato per un materiale fortemente dissipativo.

Consideriamo la disequazione (3.18); posto $p = \alpha + i\omega$ essa equivale ad almeno una delle seguenti affermazioni

$$(3.21)_a \quad G(0) + \int_0^\infty G'(s)\,e^{-\alpha s}\cos\omega s\,ds \neq 0 \qquad (3.21)_b \quad \int_0^\infty G'(s)\,e^{-\alpha s}\sin\omega s\,ds \neq 0\,.$$

Per il Teorema 3.2 un materiale fortemente dissipativo verifica le (3.21).

Inoltre la relazione (3.20) può scriversi come

$$\mathrm{G}(\infty) \neq 0 . \tag{3.22}$$

Abbiamo già visto che un solido viscoelastico verifica sempre tale relazione.

Quindi un solido viscoelastico, in virtù dei Teoremi 3.2 e 3.3, ha un comportamento asintotico stabile, e questo è sufficiente per assicurare la stabilità della soluzione del problema associato.

4 - Proprietà di simmetria e monotonia della funzione di rilassamento

Diamo ora una condizione sufficiente affinché la funzione di rilassamento $\mathrm{G}(t)$ di un mezzo viscoelastico lineare sia simmetrica e monotona decrescente per ogni t.

Consideriamo ora un materiale viscoelastico ed una deformazione $\mathbf{E}^t \in \Sigma$; applichiamo al materiale la continuazione statica di $\mathbf{E}^t$ così definita con $r \in R^+$

$$\mathbf{E}^{t+r}(s) = \begin{cases} \mathbf{E}(t) & s \in [0,\ r] \\ \mathbf{E}^t(s-r) & s \in (r,\ \infty) . \end{cases} \tag{4.1}$$

Notiamo che anche $\mathbf{E}^{t+r} \in \Sigma$, quindi posto

$$\Sigma_r = \{\mathbf{E}^{t+r} : \mathbf{E}^t \in \Sigma,\ r \in R^+\} \tag{4.2}$$

avremo sempre $\Sigma_r \subset \Sigma$. Sarà quindi

$$\mathbf{T}(t) = \mathrm{G}(0)\,\mathbf{E}(t) + \int_0^\infty \mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}^{t+r}(s-r)\,\mathrm{d}s = \mathrm{G}(r)\,\mathbf{E}(t) + \int_r^\infty \mathrm{G}'(s)\,\mathbf{E}^t(s-r)\,\mathrm{d}s . \tag{4.3}$$

Posto $s' = s - r$, abbiamo

$$\mathbf{T}(t) = \mathrm{G}(r)\,\mathbf{E}(t) + \int_0^\infty \mathrm{G}'(s'+r)\,\mathbf{E}^t(s')\,\mathrm{d}s' . \tag{4.4}$$

Introduciamo ora una nuova funzione $\hat{\mathrm{G}}_r(t)$ definita come segue

$$\hat{\mathrm{G}}_r(t) = \mathrm{G}(t+r)$$

avremo

$$\mathbf{T}(t) = \hat{\mathrm{G}}_r(0)\,\mathbf{E}(t) + \int_0^\infty \hat{\mathrm{G}}_r(s)\,\mathbf{E}^t(s)\,\mathrm{d}s \tag{4.5}$$

tale relazione è formalmente identica alla (2.1).

Proprietà di equivalenza di stress per continuazione statica.

«La risposta di un materiale viscoelastico soggetto ad una storia di deformazione $\mathbf{E}^{t+r} \in \Sigma_r$ definita in (4.1), equivale sempre alla risposta, espressa dalla (2.1), di un nuovo materiale viscoelastico sottoposto a storie di deformazione $E^t \in \Sigma$.»

Sotto l'ipotesi di validità della *Proprietà di equivalenza di stress per continuazione statica* siamo ora in grado di enunciare il seguente

Teorema 4.1. *Per ogni materiale viscoelastico che goda della proprietà di equivalenza di stress per continuazione statica* $\forall r \in R^+$, *la funzione di rilassamento* $\mathrm{G}(t)$ *è simmetrica e la sua derivata temporale* $\mathrm{G}'(t)$ *è semidefinita negativa per ogni t non negativo.*

Dim. Consideriamo un tempo generico r positivo, allora lo stress $\mathbf{T}(t)$ generato dalla storia di deformazione $\mathbf{E}^{t+r}(s)$ del materiale in questione equivale allo stress di un altro materiale viscoelastico generato dalla storia di deformazione $\mathbf{E}^t$, di cui $\mathbf{E}^{t+r}$ è la continuazione statica.

Ciò vuol dire che in base a (4.5) la funzione $\hat{\mathrm{G}}_r(t) = \mathrm{G}(t+r)$ descrive una funzione di rilassamento per un reale materiale viscoelastico.

In questo caso la (4.5) rappresenta l'equazione costitutiva del nuovo materiale in questione; potremo quindi ad essa applicare le (2.7) ed avremo in particolare

$(4.6)_a$ $\quad \hat{\mathrm{G}}_r(0)$ simmetrica $\qquad$ $(4.6)_b$ $\quad \hat{\mathrm{G}}_r'(0)$ semidefinita negativa.

Ricordando la relazione che intercorre tra $\hat{\mathrm{G}}_r$ e G, le (4.6) equivarranno a porre

$(4.7)_a$ $\quad \mathrm{G}(r)$ simmetrica $\qquad$ $(4.7)_b$ $\quad \mathrm{G}'(r)$ semidefinita negativa.

Per l'arbitrarietà con cui abbiamo scelto il punto r seguono le conclusioni del teorema.

Bibliografia

[1] B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rational Anal. 17 (1964), 1-46.

[2] B. D. COLEMAN and V. J. MIZEL, *Norms and semigroups on the theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal. 23 (1966), 87-123.

[3] W. A. DAY, *The thermodynamic theory of simple materials with fading memory*, Springer, Berlin, 1972.

[4] D. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech. 26 (1959), 101-106.

[5] M. FABRIZIO and A. MORRO: $[\bullet]_1$ *Thermodynamic restrictions on relaxation function in linear viscoelasticity*, Mech. Res. Com. 12 (1985), 101-105; $[\bullet]_2$ *Viscoelastic relaxation function compatible with thermodynamics*, J. Elasticity **19** (1988), 63-75.

[6] M. E. GURTIN and I. HERRERA, *On dissipation inequalities and linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math. 23 (1965), 235-245.

[7] M. J. LEITMAN and G. M. C. FISCHER, *The linear theory of viscoelasticity*, Enc. of Phys. VIa/3, Springer, Berlin, 1973.

[8] R. E. A. C. PALEY and N. WIENER, *On Volterra equation*, Trans. Am. Math. Soc. 35 (1933), 785-791.

[9] A. C. PIPKIN, *Lectures on viscoelasticity theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[10] M. REED and B. SIMON, *Methods of modern Mathematical Physic* (II), Academy Press, New York, 1975.

Summary

We study new restrictions for the relaxation function of a linear viscoelastic material deriving from the Principle of Dissipation of Gurtin and Herrera [6].

Those restrictions are streactly related to the conditions for Paley and Wiener stability on the asymptotic behaviour of the constitutive equation in linear viscoelasticity.

We also formulate a sufficient condition for the symmetry and the monotony of the relaxation function.

***