Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 261-270

NATALIA BALDISSERRI (*)

Estensione al caso bidimensionale di risultati di Sylvester e Lucas (**)

1 - Indicheremo sempre con lettere minuscole a, b..., x, y... numeri interi. È noto ([1], [4], [5], [6]) che l'equazione

$$ax + by = c \tag{1}$$

con $(a, b) = 1$ ha:

(1) se $ab < 0$ infinite soluzioni (x, y) positive;

(2) se $ab > 0$, $ac < 0$ nessuna soluzione positiva;

(3) se $ab > 0$, $ac > 0$ allora si può supporre a, b, c tutti > 0 e si ha

(a) per ogni $c > ab$ esiste almeno una soluzione positiva;

(b) se $c \leqslant ab$ ed è multiplo di a oppure di b, non vi sono soluzioni positive;

(c) se $0 < c < ab$ e non è multiplo di a nè di b vi è al più una soluzione positiva;

(d) se per $c = r < ab$ vi è una soluzione positiva, per $c = ab - r$ non ve ne è alcuna e viceversa;

(e) per $c > ab$ e se $c = qab + r$ con $0 \leqslant r < ab$ il numero delle soluzioni positive della (1) è dato da $N(c)$ con $N(c) = q + \varepsilon$, $\varepsilon = 1, 0, -1$ secondo che $N(r) = 1$, $N(r) = 0$ $(r \neq 0)$, $r = 0$;

(f) il numero dei $0 < c < ab$ per cui $N(c) = 1$ vale $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria «L. Cremona», P.za di Porta S. Donato 5, I-40127 Bologna.

(**) Ricevuto: 13-X-1988.

In questo lavoro estendiamo tutti i risultati sopra riportati al caso bidimensionale, cioè al sistema

$$(2) \qquad a_1 x + a_2 y + a_3 z = m \qquad b_1 x + b_2 y + b_3 z = n .$$

Usiamo una rappresentazione di (2) mediante reticoli di punti in un piano affine orientato $O\xi\eta$. R_0 sia il reticolo fondamentale dei punti interi, $P_i(a_i,\ b_i)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ sono tre punti di R_0, indichiamo con R_i il sottoreticolo di R_0 generato da $\{P_j,\ P_k\}$ $(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ e quindi (2) come equazione relativa a R_0 si scrive

$$(3) \qquad xP_1 + yP_2 + zP_3 = Q \qquad Q = (m,\ n) \in R_0 .$$

Di questa equazione cerchiamo le eventuali soluzioni positive $(x,\ y,\ z) \in (\mathbb{Z}^+)^3$.

L'estensione di uno solo dei risultati menzionati sopra per l'equazione (1), ma al caso di sistemi n-dimensionali ($n \geq 2$ equazioni in $n+1$ incognite) è stata data in [3] che usa una rappresentazione vettoriale e considera soluzioni non negative. In [7] si trovano alcuni risultati sul sistema (2), ma trattati da un punto di vista del tutto diverso dal presente.

In 2 inizialmente si stabilisce l'ambito in cui far variare Q affinché il problema sia significativo, cioè l'equazione (3) possa avere o non avere soluzioni positive, il che equivale a porsi nel caso (3) per la (1); la Proposizione 1 estende poi i risultati (b) e (c) (l'intervallo di estremi 0, ab viene sostituito dal parallelogramma fondamentale di un certo reticolo).

In 3, l'Osservazione 3 estende, con le opportune modifiche, dal momento che in questo il caso unidimensionale e quello bidimensionale differiscono sostanzialmente, il risultato (d); la Proposizione 2 estende il risultato (f), anche se invece che una uguaglianza si ha una diseguaglianza.

In 4 la Proposizione 3 estende il risultato (e) ed infine l'Osservazione 5 estende il risultato (a).

2 - Per il sistema (2) (o per l'equazione (3)), indicheremo con

$$d_1 = a_3 b_2 - b_3 a_2 \qquad d_2 = a_1 b_3 - b_1 a_3 \qquad d_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

minori della matrice dei coefficienti delle incognite di (2). Un conveniente scambio delle righe e delle colonne di tale matrice permette sempre di ricondursi ai due casi seguenti, supponendo $d_i \neq 0, \ \neq \pm 1 \ (i = 1, 2, 3)$

(4) $d_1 > 0 \quad d_2 > 0 \quad d_3 > 0$ (5) $d_1 < 0 \quad d_2 < 0 \quad d_3 > 0\,.$

I casi in cui sia $d_i = 0$, oppure $d_i = \pm 1$ (per un valore almeno di i sono banali.

Se e solo se $(d_1, d_2, d_3) = 1$ il sistema (2) ha soluzione per ogni scelta di $Q = (m, n) \in R_0$. Non presenta particolari difficoltà verificare che, detta (x_0, y_0, z_0) una soluzione di (2), ogni altra soluzione intera si ottiene dalle

$$x = x_0 + ud_1 \qquad y = y_0 + ud_2 \qquad z = z_0 - ud_3 \quad (u \in \mathbb{Z})\,. \tag{6}$$

Nell'ipotesi (5), la (3) ha sempre infinite soluzioni positive. Nell'ipotesi (4), l'angolo formato dai raggi OP_1, OP_2, in questo ordine, è convesso e contiene il raggio OP_3 all'interno. Il punto $xP_1 + yP_2 + zP_3$ per valori non negativi di x, y, z è sempre (e soltanto allora) un punto di tale angolo, basterà dunque limitarsi ad esaminare i Q appartenenti all'angolo convesso $\mathcal{A}(P_1 OP_2)$.

Poniamo $\qquad M = mb_2 - na_2 \qquad N = -mb_1 + na_1$

il sistema (2) è equivalente a

$$d_3 x + d_1 z = M \qquad d_3 y + d_2 z = N\,. \tag{7}$$

I triangoli OP_1Q, OQP_2 mostrano che $Q \in \mathcal{A}(P_1 OP_2)$ equivale a $M > 0$, $N > 0$.

Siano $A_i = d_i p_i$ $(i = 1, 2, 3)$ e sia R^* il reticolo generato da A_1, A_2; si ha $A_3 = A_1 + A_2 \in R^*$, inoltre $A_3 \in R_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Sia P^*, il parallelogramma fondamentale $\{A_1, A_2, A_1 + A_2, 0\}$, lati compresi, del reticolo R^*.

Sia (x_0, y_0, z_0) una soluzione di (3), tutte le soluzioni intere di (3) sono date dalle (6). Sia $Q \neq A_3$, $Q \in \mathrm{P}^*$ e sia $\bar{u}$ il minimo intero tale che risulti

$$\bar{x} = x_0 + d_1 \bar{u} \geqslant 0 \qquad \bar{y} = y_0 + d_2 \bar{u} \geqslant 0 \quad \text{con } \bar{z} = z_0 + d_3 \bar{u}\,.$$

Chiameremo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ *soluzione minima* del sistema (2) relativa a $Q \in \mathrm{P}^*$. Se $Q = A_3$ assumeremo come soluzione minima $(0, 0, d_3)$.

Osservazione 1. Sia $Q \in \mathrm{P}^*$, allora

$$0 \leqslant M \leqslant d_3 d_1 \qquad 0 \leqslant N \leqslant d_3 d_2 \tag{8}$$

come risulta dai triangoli QP_2O e A_3P_2O e dai triangoli P_1QO e P_1A_3O. Sia $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ la soluzione minima relativa a $Q \in \mathrm{P}^*$, allora dalla definizione di soluzione minima e dalle (7) e (8) si ha

(a) se la soluzione minima è non negativa verifica

(9)′ $\quad 0 \leqslant \bar{x} < d_1 \quad 0 \leqslant \bar{y} \leqslant d_2 \quad 0 \leqslant \bar{z} \leqslant d_3$ oppure

(9)″ $\quad 0 \leqslant \bar{x} \leqslant d_1 \quad 0 \leqslant \bar{y} < d_2 \quad 0 \leqslant \bar{z} \leqslant d_3$

(in particolare $\bar{z} = d_3$ si ha solo per $\bar{x} = \bar{y} = 0$, cioè per $Q = A_3$);

(b) se la soluzione minima ha $\bar{z} < 0$ verifica

(10)′ $\quad 0 \leqslant \bar{x} < d_1 \quad 0 \leqslant \bar{y} \leqslant 2d_2 \quad |\bar{z}| \leqslant d_3$ oppure

(10)″ $\quad 0 \leqslant \bar{x} \leqslant 2d_1 \quad 0 \leqslant \bar{y} < d_2 \quad |\bar{z}| \leqslant d_3.$

Proposizione 1. *Sia $Q \in \mathrm{P}^*$, $Q \neq A_3$, l'equazione* (3) *può avere al più una soluzione positiva o non negativa (ed è la soluzione minima). Più precisamente: se Q appartiene ad uno dei reticoli R_i, la* (3) *ha al più una soluzione non negativa e nessuna positiva; se Q non appartiene ad alcuno dei reticoli R_i, la* (3) *o ha una soluzione positiva oppure non ha alcuna soluzione positiva e nemmeno non negativa.*

Dim. Le soluzioni della (3) sono date dalle (6) e sia $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ la soluzione minima relativa a Q (ottenuta dalle (6) per $u = \bar{u}$). Se la soluzione minima ha $\bar{z} < 0$, è evidente che la (3) non ha soluzioni non negative e tantomeno positive.

Supponiamo allora $\bar{z} \geqslant 0$ e mostriamo che è l'unica soluzione non negativa.

Sia (x_1, y_1, z_1) un'altra soluzione non negativa, ottenuta dalle (6) per $u = u_1 > \bar{u}$.

Per le (9)′ e (9)″, essendo $Q \neq A_3$, si ha $\bar{z} < d_3$. Si ha: $0 \leqslant z_1 = z_0 - u_1 d_3 < \bar{z} = z_0 - \bar{u} d_3 < d_3$ e $\bar{z} - z_1 = d_3(u_1 - \bar{u})$, che è impossibile perché $\bar{z} - z_1 < d_3$.

Dalla $\bar{x}P_1 + \bar{y}P_2 + \bar{z}P_3 = Q$ segue poi che, se Q non appartiene ad alcuno dei reticoli R_i, nessuno dei tre interi $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ può essere nullo e pertanto in tale caso la soluzione minima fornisce l'unica eventuale soluzione positiva.

Sia ora Q appartenente ad uno (almeno) dei reticoli R_i.

Se $Q \in R_1$, si ha $Q = y_0 P_2 + z_0 P_3$ e dalle (7) otteniamo $d_1 z_0 = M$, $d_3 y_0 + d_2 z_0 = N$, poiché $0 \leqslant M \leqslant d_3 d_1$ segue $0 \leqslant z_0 \leqslant d_3$. Tutte le soluzioni del sistema (2) sono date da

$$x = \lambda d_1 \qquad y = y_0 + \lambda d_2 \qquad z = z_0 - \lambda d_3$$

e quindi l'unica soluzione che può essere non negativa è $(0,\ y_0,\ z_0)$, quando sia $y_0 \geqslant 0$; in caso contrario non esistono soluzioni non negative (e tantomeno positive).

Se $Q \in R_2$, si ha un caso analogo al precedente con lo scambio di x con y.

Se $Q \in R_3$, si ha $Q = x_0 P_1 + y_0 P_2$ e tutte le soluzioni del sistema (2) sono date da

$$x = x_0 + \lambda d_1 \qquad y = y_0 + \lambda d_2 \qquad z = -\lambda d_3$$

e dalle (7) e (8) otteniamo $0 \leqslant x_0 \leqslant d_1$, $0 \leqslant y_0 \leqslant d_2$, la soluzione $(x_0,\ y_0,\ 0)$ è l'unica non negativa.

Osservazione 2. Per $Q = A_3$, unico caso in cui si ha contemporaneamente $M = d_1 d_3$, $N = d_2 d_3$, abbiamo due soluzioni non negative $(0,\ 0,\ d_3)$, $(d_1,\ d_2,\ 0)$. Analogamente nel caso unidimensionale, per $c = ab$ abbiamo due soluzioni non negative $(b,\ 0)$, $(0,\ a)$.

3 - Vogliamo ora determinare il numero dei punti $Q \in \mathrm{P}^*$ per cui l'equazione (3) ammette una (ed una sola) soluzione positiva.

Osservazione 3. Se $Q \in \mathrm{P}^*$ e non appartiene a nessun R_i, altrettanto si ha per $A_3 - Q$ e se l'equazione (3) ha una soluzione positiva, l'equazione

$$xP_1 + yP_2 + zP_3 = A_3 - Q \tag{11}$$

non ha alcuna soluzione positiva.

Se invece (3) non ha una soluzione positiva, (11) può averla o non averla (a differenza di ciò che capita nel caso unidimensionale).

Se fra (3) e (11) ha una soluzione positiva, diremo che Q è un punto di *primo tipo*, se nè (3) nè (11) hanno soluzione positiva, diremo che Q è un punto del *secondo tipo*.

Poiché si è fatta l'ipotesi $d_i \neq 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $P_1 + P_2 + P_3 \in \mathrm{P}^*$ ed è un punto del primo tipo, mentre in P^* (si vedrà un esempio) possono mancare punti del secondo tipo.

Lemma. *Sia H il numero dei punti $Q \in P^*$, non appartenenti a nessun reticolo R_i e non appartenenti ad OA_1, OA_2, vale*

$$H = (d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1).$$

Dim. Il Teorema di Pick [2] afferma:

Sia dato un poligono coi vertici in un reticolo, sia l il numero dei punti del reticolo sui lati del poligono, i il numero dei punti interni, sia Δ il determinante del reticolo ed A l'area del poligono, allora vale

$$A = (\tfrac{1}{2}l + i - 1)\Delta.$$

Il parallelogramma $OA_1A_2A_3$ ha i vertici nei reticoli R_h ($h = 0, 1, 2, 3$). I punti di R_h appartenenti ad OA_1 sono tanti quanto quelli appartenenti a A_2A_3, analogamente per i lati OA_2, A_1A_3. Indichiamo con α_h ($h = 0, 1, 2, 3$) il numero dei punti di R_h appartenenti al lato A_1A_3 (esclusi A_1, A_3), con β_h quello dei punti appartenenti ad A_2A_3 (esclusi 0, A_1), con i_h quello dei punti interni ad $OA_1A_2A_3$ e con Δ_h il determinante di R_h.

Vale allora, contando anche il punto A_3

$$d_1 d_2 d_3 = (\alpha_h + \beta_h + 1 + i_h)\Delta_h \qquad (h = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{12}$$

Dalla (12) per $h = 0$ ricaviamo che i punti di R_0 interni ad $OA_1A_2A_3$ e sui lati A_1A_3, A_2A_3 (esclusi A_1, A_2 e compreso A_3) sono $d_1d_2d_3$.

La (12) per $h = 1, 2, 3$, indicando con N_h ($h = 1, 2, 3$) l'analogo numero di punti di R_h, permette di ricavare

$$N_1 = d_2 d_3 \qquad N_2 = d_1 d_3 \qquad N_3 = d_1 d_2.$$

Per ottenere H questi punti vanno sottratti da $d_1d_2d_3$ e, considerando che R_2 e R_3 hanno d_1 punti in comune, R_1 e R_3 hanno d_2 punti in comune, R_1 e R_2 hanno d_3 punti in comune, si ottiene

$$\begin{aligned} H &= d_1 d_2 d_3 - d_2 d_3 - d_1 d_3 - d_1 d_2 + d_1 + d_2 + d_3 - 1 \\ &= (d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1). \end{aligned} \tag{13}$$

Proposizione 2. *Il numero S di punti $Q \in \mathrm{P}^*$ per cui l'equazione* (3) *ammette soluzione positiva verifica*

$$S \leqslant \tfrac{1}{2}(d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1). \tag{14}$$

Dim. Il risultato si ricava da (13), ricordando che se Q ammette soluzione positiva, non l'ammette $A_3 - Q$ e osservando che i punti di P^* interni ai lati OA_1, OA_2 non possono dar luogo a soluzioni positive.

Osservazione 4. Nella (14) può valere il segno < 0 il segno uguale, come si vedrà in alcuni esempi. La situazione più comune è quella in cui vale il segno $<$, ma se in P^*, come può accadere, vi sono solo punti del primo tipo vale il segno uguale. Eccezionalmente può presentarsi il segno uguale anche in presenza di punti del secondo tipo situati sui lati di P^* (Esempio (b)).

Esempi. (a) Consideriamo il sistema ($a \geqslant 3$)

$$\begin{gathered} ax + (a-3)y + 2z = m \qquad (a-1)x + (a-2)y + 2z = n \\ d_1 = 2 \qquad d_2 = 2 \qquad d_3 = 2a - 3. \end{gathered} \tag{15}$$

I punti di R_0 che si trovano sui lati OA_1, OA_2 sono P_1, $2P_1$, P_2, $2P_2$, quindi il numero dei $Q \in \mathrm{P}^*$ che non stanno nei reticoli R_i ($i = 1, 2, 3$), applicando la (13), è $2a - 4$. Consideriamo Q appartenente alla retta $m = n$, il sistema (15) è equivalente a

$$x - y = 0 \qquad (2a-3)x + 2z = m. \tag{16}$$

Applicando alla seconda delle (16) i risultati noti nel caso unidimensionale, si ricava che i valori m, $0 < m < (2a-3)2$, per cui c'è soluzione positiva sono $a - 2$, per altrettanti valori non si ha soluzione positiva (e per m multiplo di $(2a-3)$ e 2 si ha una soluzione non negativa).

Quindi i $(2a - 4)$ punti Q di P^* che non stanno negli R_i ($i = 1, 2, 3$) stanno sulla retta $m = n$ e sono del primo tipo.

In questo caso $S = \frac{1}{2}(d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1)$.

(b)
$$\begin{gathered} 2x + 3z = m \qquad y + z = n \\ d_1 = 3 \qquad d_2 = 2 \qquad d_3 = 2. \end{gathered}$$

In $\mathbb{P}^*$, escludendo i punti dei reticoli R_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ abbiamo un punto Q_1 del primo tipo e un punto Q_2 del secondo tipo

$$Q_1(1,\ 0) \qquad A_3 - Q_1(5,\ 2)$$

$$Q_2(1,\ 2) \qquad A_3 - Q_2(5,\ 0)$$

$$S = 1 = \tfrac{1}{2}(d_1-1)(d_2-1)(d_3-1)\,.$$

(c)

$$2x+2y+3z=m \qquad -x+y=n$$

$$d_1=3 \qquad d_2=3 \qquad d_3=4\,.$$

In $\mathbb{P}^*$, escludendo i punti dei reticoli R_i $(i=1,\ 2,\ 3)$, abbiamo 5 punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 del primo tipo e un punto Q_6 del secondo tipo.

$$Q_1(1,\ 0) \qquad A_3-Q_1(11,\ 0) \qquad Q_4(3,\ -1) \qquad A_3-Q_4(9,\ 1)$$

$$Q_2(2,\ 0) \qquad A_3-Q_2(10,\ 0) \qquad Q_5(5,\ 0) \qquad A_3-Q_5(7,\ 0)$$

$$Q_3(3,\ 1) \qquad A_3-Q_3(9,\ -1) \qquad Q_6(6,\ 2) \qquad A_3-Q_6(6,\ -2)$$

$$S = 5 < \tfrac{1}{2}(d_1-1)(d_2-1)(d_3-1) = 6\,.$$

4 - Vogliamo ora considerare il caso generale, cioè Q appartenente all'angolo positivo $\mathfrak{A}(A_1,\ 0,\ A_2)$.

Indicheremo con $\mathbb{P}^*\ (p,\ q)$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, il parallelogramma del reticolo R^* di vertici $\{pA_1+qA_2,\ (p+1)A_1+qA_2,\ pA_1+(q+1)A_2,\ pA_1+qA_2+A_3\}$ che consideriamo a meno dei due lati $[(p+1)A_1+qA_2,\ pA_1+qA_2+A_3]$ e $[pA_1+(q+1)A_2,\ pA_1+qA_2+A_3]$ che vanno associati ai due parallelogrammi adiacenti $\mathbb{P}^*\ (p+1,\ q)$, $\mathbb{P}^*\ (p,\ q+1)$ rispettivamente.

Se $Q \equiv (m,\ n)$ è chiaro che si ha

$$p = [\frac{M}{d_1 d_3}] \qquad q = [\frac{N}{d_2 d_3}]\,.$$

Se indichiamo con Q' il punto di P^* congruo a Q modulo il reticolo R^*, ossia $Q' = Q - pA_1 - qA_2$, per tale punto si ha

$$M' = M - pd_1 d_3 \qquad N' = N - qd_2 d_3$$

e di conseguenza $0 \leqslant M' \leqslant d_1 d_3$, $0 \leqslant N' \leqslant d_2 d_3$.

Proposizione 3. *Se $N(Q)$ indica il numero delle soluzioni positive del sistema* (2) *e se $\alpha = \min(p, q)$, allora si ha $N(Q) = \alpha + 1$ se $N(Q') = 1$. Se invece $N(Q') = 0$, allora $N(Q) = \alpha + \varepsilon$, con $\varepsilon = 1, 0, -1$, oppure $N(Q) = 0$.*

Dim. Sia $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ la soluzione minima della $xP_1 + yP_2 + zP_3 = Q'$. Tutte le soluzioni intere della (3) sono date da $(\lambda \in \mathbb{Z})$

$$x = \bar{x} + (p - \lambda) d_1 \qquad y = \bar{y} + (q - \lambda) d_2 \qquad z = \bar{z} + \lambda d_3 . \tag{17}$$

Dalle (17) segue l'enunciato, tenendo presente la Proposizione 1.

Osservazione 5. Detto $\mathfrak{A}$ l'angolo positivo $(P_1 O P_2)$, si ha che se Q è interno all'angolo $A_3 + \mathfrak{A}$, il sistema (2) ha sempre almeno una soluzione positiva.

La considerazione delle (17) permetterebbe poi di studiare il numero delle soluzioni non negative e in particolare si potrebbe riottenere il risultato (per il caso bidimensionale) di M. J. Knight in [3], secondo il quale se Q è interno all'angolo positivo $A_3 - P_1 - P_2 - P_3 + \mathfrak{A}$ il sistema (2) ha sempre almeno una soluzione non negativa.

Bibliografia

[1] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, (II), New York, G. E. Stechert, 1934.

[2] J. Hammer, *Unsolved problems concerning lattice points*, Research Notes in Mathematics, 15, London, Pitman, 1977.

[3] M. J. Knight, *A generalization of a result of Sylvester*, J. Number Theory **12** (1980), 364-366.

[4] E. Lucas, *Théorie des nombres*, Tome premier, Albert Blanchard, Paris, 1961.

[5] A. NIJENHUIS and H. S. WILLF, *Representations of integers of linear forms in nonnegative integers*, J. Number Theory 4 (1972), 98-106.

[6] J. SYLVESTER, *Mathematical questions with their solution*, Educational times, **41** (1884), 21.

[7] C. TINAGLIA, *Sulle soluzioni non negative di un sistema lineare diofanteo*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **13** (1987), 85-90.

Summary

We extend Sylvester and Lucas results on the positive integral solutions of $ax + by = c$ *to th*ESTENSIONE AL CASO BIDIMENSIONALE DI RISULTATI DI SYLVESTER E LUCASE