Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14*** (1988), 91-104

FRANCO TRICERRI (*)

Varietà riemanniane che hanno la stessa curvatura di uno spazio omogeneo ed una congettura di Gromov (**)

1 - Introduzione

Sia $\bar{M} = G/H$ uno spazio omogeneo munito di una metrica riemanniana G-invariante $\bar{g}$ ed O un punto fisso di $\bar{M}$.

Diremo che la varietà riemanniana (M, g) *ha la stessa curvatura dello spazio modello* $(\bar{M}, \bar{g})$ se, per ogni punto p di M, esiste un'isometria F tra lo spazio tangente in p a M e quello tangente in O a $\bar{M}$ tale che

$$F^* \bar{R}_O = R_p \tag{1.1}$$

dove $\bar{R}_O$ e R_p sono, rispettivamente, i tensori di curvatura di Riemann calcolati in O ed in p delle due varietà.

Se (M, g) ha la stessa curvatura di $(\bar{M}, \bar{g})$, essa è, in particolare, *a curvatura omogenea*. Infatti, per ogni coppia di punti p e q di M, si può costruire un'isometria $f: T_p M \mapsto T_q M$ tale che il pull-back di R_q in f sia uguale a R_p. Naturalmente ciò non è sufficiente per poter affermare che (M, g) sia (localmente) omogenea, anzi ciò è falso in generale come provano gli esempi di 3. Tuttavia, se (M, g) ha la stessa curvatura dello spazio modello $(\bar{M}, \bar{g})$, per ogni punto p di M potremo scegliere un riferimento ortonormale di $T_p M$ tale che le componenti di R_p siano uguali a quelle di $\bar{R}_O$, calcolate rispetto ad un riferimento ortonormale prefissato di $T_O \bar{M}$. Nel sistema $(x^1, \ldots, x^n)$ di coordinate normali geodetiche ad

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «U. Dini», Università di Firenze, Firenze, Italia.

esso associato potremo scrivere

$$(1.2) \qquad g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{h,k} \bar{R}_{ihjk} x^h x^k + \text{termini di ordine superiore}$$

dove le g_{ij} sono le componenti locali del tensore metrico e le $\bar{R}_{ihjk}$ le componenti di $\bar{R}_O$. Dunque la varietà $(M,\ g)$ è approssimata in ogni suo punto, fino al secondo ordine, dallo stesso spazio omogeneo $(\bar{M},\ \bar{g})$. Volendo si potrà dire che $(M,\ g)$ ha come *spazio osculatore* in ogni suo punto la varietà omogenea $(\bar{M},\ \bar{g})$.

Sia ora $\mathscr{M}_0(M)$ l'insieme delle metriche riemanniane di M che hanno la stessa curvatura dello spazio modello $(\bar{M},\ \bar{g})$. Due metriche di $\mathscr{M}_0(M)$ saranno considerate *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo φ di M in sè tale che

$$\varphi^* g' = g\,.$$

Le classi di equivalenza delle metriche di $\mathscr{M}_0(M)$ saranno i punti dello *spazio dei moduli*

$$\mathscr{H} = \mathscr{M}_0(M)/\mathrm{Diff}(M)\,.$$

Conoscere $\mathscr{H}$ significa conoscere quante sono le metriche su M che hanno la stessa curvatura di $(\bar{M},\ \bar{g})$ e che non sono isometriche. A questo proposito è stata formulata la seguente:

Congettura (M. Gromov, cfr. [2]). *Se M è compatta $\mathscr{H}$ ha dimensione finita.*

Ciò significa che le classi di isometria delle metriche su M che hanno la stessa curvatura di $(\bar{M},\ \bar{g})$ dipendono solo da un numero finito di parametri se la varietà M è compatta.

Questa congettura potrebbe essere studiata da un punto di vista infinitesimale, studiando le deformazioni delle metriche di $\mathscr{M}_0(M)$ come in [4] o [1]. In generale tale approccio si presenta difficile, ma si semplifica notevolmente se le strutture in questione ammettono tutte uno stesso *modello locale*, ad esempio se fossero tutte localmente isometriche a $(\bar{M},\ \bar{g})$ (si veda in proposito la discussione del problema analogo nel caso delle strutture di Einstein nel capitolo 12 di [3].

Motivati da queste considerazioni ci proponiamo di studiare innanzitutto il seguente problema locale

Problema. *Classificare, a meno di isometrie locali, le varietà riemanniane (M, g) che hanno la stessa curvatura di uno spazio omogeneo riemanniano $(\bar{M}, \bar{g})$.*

È chiaro che la risposta a questo problema dipende dalla natura dello spazio modello $(\bar{M}, \bar{g})$. Ad esempio, se $(\bar{M}, \bar{g})$ fosse una *forma spaziale*, cioè una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante, allora anche (M, g) sarebbe a curvatura sezionale costante e perciò localmente isometrica allo spazio modello. Questo fatto è, in realtà, un caso particolare di un risultato più generale che dimostreremo nel prossimo paragrafo (Teorema 2.1). In 3 esamineremo invece alcuni esempi che saranno particolarmente utili nel riaffrontare la discussione della congettura di Gromov e concludere.

I risultati esposti nel presente articolo sono stati ottenuti in gran parte in collaborazione con O. Kowalski e L. Vanhecke e sono contenuti in lavori in corso di stampa o di redazione (cfr. bibliografia). Nuovo è l'approccio allo studio degli esempi di 3 tramite le deformazioni di metriche invarianti.

2 - Il problema di classificazione

Come anticipato nell'introduzione cominciamo col provare il

Teorema 2.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana che ha la stessa curvatura di uno spazio simmetrico irriducibile, allora (M, g) è localmente simmetrica quindi localmente isometrica allo spazio modello.*

La dimostrazione di questo Teorema è semplice, ma istruttiva. Si basa sulla *formula di Lichnerowicz* [12] (cfr. anche [15]).

Osserviamo innanzitutto che, nelle ipotesi del teorema, il *tensore di Ricci* r calcolato in p di (M, g) è il pull-back del tensore di Ricci $\bar{r}$ di $(\bar{M}, \bar{g})$, calcolato in O, nell'isometria F di T_pM in T_OM, cioè

$$F^*(\bar{r}_O) = r_p .$$

Dunque (M, g) è di Einstein perché $(\bar{M}, \bar{g})$ è uno spazio simmetrico irriducibile e quindi di Einstein. Possiamo allora utilizzare la formula di Lichnerowicz, che nel caso einsteiniano si semplifica e si scrive come segue

$$(2.1) \qquad -\Delta\|R\|^2 = 2\|\mathrm{D}R\|^2 + \frac{2}{n}s\|R\|^2 - 4\hat{R} - \tilde{R} .$$

Qui DR è il differenziale covariante del tensore di Riemann R rispetto alla connessione di Levi Civita D, $s =$ traccia (r) è la curvatura scalare e $\hat{R}$, $\tilde{R}$ sono due invarianti cubici dati rispettivamente da:

$$\hat{R} = \sum R_{iljm} R_{lpmq} R_{piqj} \tag{2.2}$$

$$\tilde{R} = \sum R_{ijlm} R_{lmpq} R_{pqij} . \tag{2.3}$$

In queste formule si è posto $R_{ijlm} = g(R_{l_i l_j} e_l,\ e_m)$, dove $(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ è un riferimento ortonormale arbitrario.

Se $(M,\ g)$ ha la stessa curvatura di $(\bar{M},\ \bar{g})$, otteniamo immediatamente che

$$s = \bar{s} \qquad \|R\| = \|\bar{R}\| \qquad \hat{R} = \hat{\bar{R}} \qquad \tilde{R} = \tilde{\bar{R}} . \tag{2.4}$$

In particolare $\|R\|^2$ è costante, così

$$0 = 2\|\mathrm{D}R\|^2 + \frac{2}{n}\bar{s}\|\bar{R}\|^2 - 4\hat{\bar{R}} - \tilde{\bar{R}} . \tag{2.5}$$

D'altra parte la formula (2.1) implica che per ogni spazio simmetrico irriducibile $(\bar{M},\ \bar{g})$ si abbia

$$\frac{2}{n}\bar{s}\|\bar{R}\|^2 - 4\hat{\bar{R}} - \tilde{\bar{R}} = 0 . \tag{2.6}$$

Si deduce così dalla (2.5) e dalla (2.6) che $\|\mathrm{D}R\|^2 = 0$, quindi D$R = 0$ e la varietà è localmente simmetrica. L'esistenza di un'isometria locale con lo spazio modello $(\bar{M},\ \bar{g})$ segue da risultati standard (cfr. ad esempio [8]).

Nella precedente dimostrazione l'ipotesi di irriducibilità di $(\bar{M},\ \bar{g})$ serve solo per dire che $(\bar{M},\bar{g})$ e quindi $(M,\ g)$ sono di Einstein. Perciò il Teorema 2.1 è valido anche solo supponendo che lo spazio modello sia di Einstein, non necessariamente irriducibile. Se si tenta però di estendere il risultato al caso riducibile non einsteiniano occorre utilizzare un argomento più complesso come in **[16]** o la classificazione degli *spazi riemanniani semisimmetrici* ottenuta da Z. Szabò in [15].

Uno *spazio riemanniano semisimmetrico* è una varietà riemanniana $(M,\ g)$ la cui curvatura soddisfa la seguente condizione

$$R_{xy} \cdot R = 0 \tag{2.7}$$

per ogni campo vettoriale x, y di M.

Per un ben noto teorema di E. Cartan (cfr. ad esempio [7]), la condizione (2.7) equivale a dire che R_p è il tensore di curvatura di uno spazio simmetrico per ogni punto p di M. Naturalmente questo spazio può variare da punto a punto. Noi invece siamo interessati solo al caso in cui non dipende da p. Infatti, se (M, g) ha la stessa curvatura di uno spazio simmetrico $(\bar{M}, \bar{g})$, non solo la condizione (2.7) è verificata, trattandosi di una condizione puntuale, ma anche lo spazio simmetrico determinato da R_p coincide sostanzialmente con $(\bar{M}, \bar{g})$ per ogni punto p di M. Dunque (M, g) altro non è che uno *spazio riemanniano semisimmetrico a curvatura omogenea.*

Nello studio di questi spazi gioca un ruolo essenziale la *distribuzione di nullità* di (M, g) che associa ad ogni punto q di M lo *spazio vettoriale di nullità* in q definito da

$$E_0(q) = \{x \in T_qM/(R_q)_{xy} = 0 \text{ per ogni } y \in T_qM\}\,. \tag{2.8}$$

Siccome (M, g) è a curvatura omogenea, la dimensione di $E_0(q)$ è costante, quindi la distribuzione di nullità E_0 è *regolare.* In altre parole E_0 è un sottofibrato vettoriale di TM la cui fibra in q è il sottospazio vettoriale $E_0(q)$.

Si può dimostrare allora il

Teorema 2.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana che ha lo stesso tensore di curvatura di uno spazio simmetrico $(\bar{M}, \bar{g})$ (ovvero, uno spazio semisimmetrico a curvatura omogenea). Se la distribuzione di nullità E_0 è parallela, (M, g) è localmente isometrica allo spazio modello. Se invece E_0 non è parallela, (M, g) è localmente isometrica ad un prodotto riemanniano del seguente tipo*

$$(M_0, g_0) \times (M_1, g_1) \times \ldots \times (M_r, g_r)$$

dove (M_0, g_0) è uno spazio simmetrico mentre $(M_1, g_1), \ldots, (M_r, g_r)$ sono spazi fogliettati da spazi euclidei di codimensione 2 con curvatura scalare costante.

Ricordiamo che E_0 è *parallela* se, per ogni campo vettoriale X di M e per ogni sezione σ di E_0, la derivata covariante $D_X\sigma$ è ancora una sezione di E_0.

Uno *spazio fogliettato da spazi euclidei di codimensione* 2 nel senso di Szabò [15] è una varietà riemanniana *irriducibile* (M_α, g_α) il cui *indice di nullità* (cioè la dimensione dello *spazio vettoriale di nullità*) è costante ed uguale a $\dim M_\alpha - 2$. Il tensore di curvatura di Riemann di un tale spazio nel punto q è dato da

$$(R_\alpha|_q)_{xyzw} = k_\alpha(q)\{g_\alpha(x', z')\, g_\alpha(y', w') - g_\alpha(x', w')\, g_\alpha(y', z')\} \tag{2.9}$$

dove x', y', z', w' sono le proiezioni sul piano ortogonale allo spazio vettoriale di nullità in q dei vettori x, y, z, w. Poiché (M_α, g_α) è irriducibile, esso non può essere localmente simmetrico. Inoltre ha curvatura scalare costante se e solo se la funzione $k_\alpha(q)$ è costante.

Da quanto precede si ottiene che, nel caso del Teorema 2.2, la varietà (M, g) ha lo stesso tensore di curvatura del seguente spazio simmetrico

$$(M_0, g) \times (\boldsymbol{R}^N, g_{\text{euc}}) \times M^2(k_1) \times \ldots \times M^2(k_r) \tag{2.10}$$

dove $M^2(k_\alpha)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, è una superficie di curvatura gaussiana costante k_α e $(\boldsymbol{R}^N, g_{\text{euc}})$ è lo spazio euclideo di dimensione

$$N = n_1 + \ldots + n_r - 2r$$

dove $n_\alpha = \dim M_\alpha$. In generale però (M, g) non è localmente isometrica allo spazio (2.10). Infatti possono esistere addirittura famiglie di metriche con la stessa curvatura di (2.10) non isometriche (cfr. 3).

Per la dimostrazione del Teorema 2.2 rinviamo a [**10**] (per la prima parte si veda anche [**16**]).

Il Teorema 2.2 risolve completamente il problema di classificazione nel caso in cui lo spazio modello è uno spazio riemanniano simmetrico. Nel caso omogeneo il problema è ancora aperto. Alcuni risultati in questa direzione sono stati ottenuti in [**16**] a cui si rinvia per una discussione dettagliata dell'argomento. In questo caso le difficoltà sorgono innanzitutto dal fatto che la curvatura di Riemann da sola non è più sufficiente per determinare lo spazio, ma occorre considerare anche le derivate covarianti successive fino ad un certo ordine. Ciò è sostanzialmente equivalente a lavorare con una connessione canonica invariante non simmetrica invece che con la connessione di Levi Civita. In proposito si veda [**14**]. Si veda anche [**11**] dove viene descritta una famiglia di spazi riemanniani omogenei che hanno la stessa curvatura, ma che non sono localmente isometrici.

3 - Esempi

Come anticipato, costruiremo in questo paragrafo alcuni esempi di varietà riemanniane che hanno la stessa curvatura di $\boldsymbol{H}^2(-\lambda^2) \times \boldsymbol{R}$, dove $\boldsymbol{H}^2(-\lambda^2)$ è il piano iperbolico a curvatura gaussiana costante $-\lambda^2$, ma che non sono localmente omogenee e quindi nemmeno localmente isometriche allo spazio modello. Tali esempi sono stati costruiti in [9], [10] e generalizzati ad ogni dimensione. Noi ci limiteremo al caso tridimensionale, ma il nostro approccio sarà nuovo.

Consideriamo il rivestimento universale $\tilde{E}(2)$ del gruppo di Lie $E(2)$ dei movimenti rigidi del piano euclideo. $\tilde{E}(2)$ può essere identificato con $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C} = \{(w, z) | w \in \boldsymbol{R}, z \in \boldsymbol{C}\}$, e quindi con $\boldsymbol{R}^3 = \{(w, x, y) | z = x + iy\}$, munito del prodotto

$$(3.1) \qquad (w_0, z_0)(w_1, z_1) = (w_0 + w_1, e^{-iw_0} z_1 + z_0).$$

Una semplice verifica prova che $\mathrm{d}w$ è biinvariante mentre $\mathrm{d}z + iz\,\mathrm{d}w$ è invariante a destra. Ne segue che $\mathrm{d}w$ e le parti reale ed immaginaria di $\mathrm{d}z + iz\,\mathrm{d}w$ formano una base dello spazio delle 1-forme invarianti a destra. Queste forme sono date da

$$(3.2) \qquad \vartheta = \mathrm{d}w \qquad \vartheta^1 = \mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}w \qquad \vartheta^2 = \mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}w .$$

Noi costruiremo gli esempi cercati deformando la metrica riemanniana invariante a destra *piatta* (vedi più avanti) che è data da

$$(3.3) \qquad g = \vartheta^0 \otimes \vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2$$

nella direzione di ϑ^0 (è la direzione ortogonale all'ideale abeliano bidimensionale di $\tilde{E}(2)$ delle traslazioni del piano).

Sia allora f una funzione differenziabile definita su $\tilde{E}(2)$ a valori reali, *positiva*. Poniamo

$$(3.4) \qquad g_f = f^2 \vartheta^0 \otimes \vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2$$

e calcoliamone la curvatura. Le 1-forme

$$(3.5) \qquad \omega^0 = f\vartheta^0 \qquad \omega^1 = \vartheta^1 \qquad \omega^2 = \vartheta^2$$

costituiscono un coriferimento ortonormale. Possiamo quindi utilizzare le equazioni di struttura di Cartan per calcolare le forme di connessione e di curvatura. Le forme di connessione ω^i_j sono le uniche soluzioni dell'equazione

$$(3.6) \qquad \mathrm{d}\omega^i + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k = 0 \qquad \omega^i_j + \omega^j_i = 0 ,$$

le forme di curvatura sono invece date da

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j . \tag{3.7}$$

Un semplice calcolo prova che

$$\omega^0_1 = f^{-1} f_x \omega^0 \qquad \omega^0_2 = f^{-1} f_y \omega^0 \qquad \omega^1_2 = -f^{-1} \omega^0 . \tag{3.8}$$

Quindi $$\Omega^1_2 = 0$$

$$\Omega^0_1 = -f^{-1} f_{xx} \omega^0 \wedge \omega^1 - f^{-1} f_{xy} \omega^0 \wedge \omega^2 \qquad \Omega^0_2 = -f^{-1} f_{xy} \omega^0 \wedge \omega^1 - f^{-1} f_{yy} \omega^0 \wedge \omega^2 .$$

Dunque le componenti non nulle del tensore di Riemann sono

$$R_{0101} = -f^{-1} f_{xx} \qquad R_{0102} = -f^{-1} f_{xy} \qquad R_{0202} = -f^{-1} f_{yy} .$$

Perciò R è dato da

$$\begin{aligned} R = &-4 f^{-1} f_{xx} \omega^0 \wedge \omega^1 \otimes \omega^0 \wedge \omega^1 - 4 f^{-1} f_{yy} \omega^0 \wedge \omega^2 \otimes \omega^0 \wedge \omega^2 \\ &- 4 f^{-1} f_{xy} (\omega^0 \wedge \omega^1 \otimes \omega^0 \wedge \omega^2 + \omega^0 \wedge \omega^2 \otimes \omega^0 \wedge \omega^1) . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dunque, affinché g_f abbia la stessa curvatura di $\boldsymbol{H}^2(-\lambda^2) \times \boldsymbol{R}$, basta che sia

$$f_{xy} = f_{yy} = 0 \qquad f_{xx} = \lambda^2 f . \tag{3.10}$$

Siccome λ è una costante diversa da zero, la soluzione generale del precedente sistema è

$$f = f(w, x) = a(w) e^{\lambda x} + b(w) e^{-\lambda x} \tag{3.11}$$

dove $a(w)$ e $b(w)$ sono funzioni differenziabili definite per ogni valore di w, *positive* affinché anche f lo sia.

Le metriche g_f con f data dalla (3.11) hanno tutte la stessa curvatura di $\boldsymbol{H}^2(-\lambda^2) \times \boldsymbol{R}$, quindi del tipo

$$R = -4\lambda^2 \omega^0 \wedge \omega^1 \otimes \omega^0 \wedge \omega^1 . \tag{3.12}$$

Le loro caratteristiche cruciali sono riassunte dalla

Proposizione 3.1. *Sia g_f la metrica di $\boldsymbol{R}^3$ (identificato col gruppo $\tilde{E}(2)$) definita dalla* (3.4) *con f data dalla* (3.11), *allora*

(i) *g_f è irriducibile*

(ii) *g_f non è localmente omogenea*

(iii) *se $f(w, x) \geq c > 0$, g_f è completa.*

Dim (i). Se $(\boldsymbol{R}^3, g_f)$ fosse riducibile, esisterebbe una distribuzione integrabile di piani tangenti invariante rispetto all'azione del gruppo di olonomia. Tale distribuzione sarebbe in particolare invariante anche rispetto a tutti gli operatori del tipo R_{xy}, dove R è la curvatura di Riemann e x, y vettori tangenti. La (3.12) mostra che la sola distribuzione lasciata invariante da questi operatori è quella definita da $\omega^2 = 0$ che non è integrabile, dunque la varietà è irriducibile.

(ii) Per provare che $(\boldsymbol{R}^3, g_f)$ non è localmente omogenea basta esibire un invariante riemanniano *scalare* che non sia costante. Per fare ciò calcoleremo la norma del differenziale covariante del tensore di Ricci r. Dalla (3.11) si ha che r è dato da

$$r = -\lambda^2(\omega^0 \otimes \omega^0 + \omega^1 \otimes \omega^1)\,. \tag{3.13}$$

Siccome $\mathrm{D}_X \omega^i = -\sum_k \omega^i_k(X)\, \omega^k$, dalla (3.8), tenuto conto della (3.10), si ottiene subito che

$$\mathrm{D}r = -\lambda^2 f^{-1} \omega^0 \otimes (\omega^1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^1)\,. \tag{3.14}$$

Quindi

$$\|\mathrm{D}r\|^2 = 2\lambda^4 f^{-2}\,. \tag{3.15}$$

Poiché $\|\mathrm{D}r\|$ non è costante, la varietà non può essere localmente omogenea.

(iii) Sia d_f la metrica indotta su $\boldsymbol{R}^3$ da g_f e d_c quella indotta dalla metrica invariante a destra definita da

$$g_c = c^2 \vartheta^0 \otimes \vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2\,.$$

Siccome $f \geq c$, per ogni coppia di punti p, q di $\boldsymbol{R}^3$ abbiamo

$$d_c(p, q) \leq d_f(p, q)\,.$$

Quindi, se S è un sottoinsieme *limitato* di $\boldsymbol{R}^3$ rispetto alla metrica d_f, esso sarà pure limitato rispetto a d_c. La metrica g_c però è *invariante a destra*, quindi omogenea e completa. Dunque S è relativamente compatto ed anche g_f è una metrica completa.

Per i nostri scopi è ora importante determinare le condizioni sotto cui due metriche g_{f_1} e g_{f_2}, con

$$f_\alpha(w,\ x) = a_\alpha(w)\, e^{\lambda x} + b_\alpha(w)\, e^{-\lambda x} \tag{3.16}$$

$\alpha = 1, 2,\ a_\alpha(w) > 0,\ b_\alpha(w) > 0$, sono isometriche. Occorre perciò sapere quando esiste un diffeomorfismo φ di $\boldsymbol{R}^3$ in sè tale che

$$\varphi^* g_{f_2} = g_{f_1}\,. \tag{3.17}$$

È chiaro che φ soddisfa la (3.17) se e solo se

$$\varphi^* \bar{\omega}^i = \sum_j a^i_j\, \omega^j \tag{3.18}$$

dove $\bar{\omega}^0 = f_2\, \vartheta^0$, $\bar{\omega}^1 = \vartheta^1$, $\bar{\omega}^2 = \vartheta^2$ e $a = (a^i_j)$ è una funzione a valori nel gruppo ortogonale $O(3)$ definita su tutto $\boldsymbol{R}^3$. Poiché la curvatura di Ricci è invariante per isometrie, dovrà essere

$${}^t a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi a è del tipo

$$a = \begin{bmatrix} a^0_0 & a^0_1 & 0 \\ a^1_0 & a^1_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

dove $\varepsilon_2 = \pm 1$. Però anche $\mathrm{D}r$ e $\|\mathrm{D}r\|$ sono invarianti, quindi si deve avere innanzitutto che

$$f_2 \circ \varphi = f_1$$

perché f_1 e f_2 sono positive, poi

$$\varepsilon_2\{(a_0^0\,\omega^0 + a_1^0\,\omega^1) \otimes (a_0^1\,\omega^0 + a_1^1\,\omega^1) \otimes \omega^2 + (a_0^0\,\omega^0 + a_1^0\,\omega^1) \otimes (\omega^2 \otimes (a_0^1\,\omega^0 + a_1^1\,\omega^1))\}$$

$$= \omega^0 \otimes (\omega^1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^1)\,.$$

Dunque $a_1^0 = a_0^1 = 0$, $a_0^0 = \varepsilon_0 = \pm 1$, $a_1^1 = \varepsilon_1 = \pm 1$, $1 = \varepsilon_0\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$. Possiamo così concludere che φ è una isometria tra g_{f_1} e g_{f_2} se e solo se

$$\varphi^*\,\bar{\omega}^i = \varepsilon_i\,\omega^i \tag{3.19}$$

$$\varphi^* f_2 = f_2 \circ \varphi = f_1\,. \tag{3.20}$$

Ricordate le definizioni delle forme $\bar{\omega}^i$, segue che

$$\varphi^*\,\vartheta^0 = \varepsilon_0\,\vartheta^0 \qquad \varphi^*\,\vartheta^i = \varepsilon_i\,\vartheta^i \qquad\qquad \text{per } i = 1,\, 2\,.$$

Se poniamo allora

$$\psi(w,\ x,\ y) = (\varepsilon_0\,w,\ \varepsilon_1\,x,\ \varepsilon_2\,y) \tag{3.21}$$

otteniamo, per ogni i,

$$(\varphi \circ \psi)^*\,\vartheta^i = \vartheta^i\,. \tag{3.22}$$

Dunque $\varphi \circ \psi$ è un diffeomorfismo di $\tilde{E}(2)$ in sè che lascia invarianti le forme di Maurer-Cartan (a destra) del gruppo. Dal *teorema di Darboux* (cfr. ad esempio [5]) si ottiene che $\varphi \circ \psi$ deve coincidere con una traslazione destra di $\tilde{E}(2)$. Abbiamo così determinato i diffeomorfismi di $\boldsymbol{R}^3$ che sono isometrie tra g_{f_1} e g_{f_2} e quali sono le condizioni a cui devono sottostare f_1 e f_2. Tali condizioni si enunciano meglio definendo un'azione ρ del gruppo $G = \tilde{E}(2) \times \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ su $\boldsymbol{R}^3$ identificato con $\tilde{E}(2)$ mediante la formula

$$\rho(a,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2)(w,\ x,\ y) = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,w,\ \varepsilon_1\,x,\ \varepsilon_2\,y)\,a\,. \tag{3.23}$$

Allora potremo riassumere quanto abbiamo dimostrato nel seguente modo

Proposizione 3.2. *$(\boldsymbol{R}^3,\ g_{f_1})$ e $(\boldsymbol{R}^3,\ g_{f_2})$ sono isometriche se e solo se esiste* *un elemento* $(a,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ *di* G *tale che*

$$f_2 \circ \rho(a,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = f_1 .$$

In tal caso $\varphi = \rho(a,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ *è un'isometria tra le due metriche* g_{f_1} *e* g_{f_2}.

4 - La congettura di Gromov

Gli esempi che abbiamo costruito in 3 provano che la congettura di Gromov non è vera se si elimina l'ipotesi di compattezza e si richiede solo che $\mathscr{M}_0(M)$ sia costituita dalle metriche *complete* che hanno la stessa curvatura dello spazio modello $(\bar{M},\ \bar{g})$.

Consideriamo infatti lo spazio dei moduli

$$\mathscr{H} = \mathscr{M}_0(\boldsymbol{R}^3)/\mathrm{Diff}(\boldsymbol{R}^3)$$

dove $\mathscr{M}_0(\boldsymbol{R}^3)$ è costituito dalle metriche *complete* di $\boldsymbol{R}^3$ che hanno la stessa curvatura di $\boldsymbol{H}^2(-\lambda^2)\times\boldsymbol{R}$. $\mathscr{H}$ non può avere dimensione finita perché le classi di isometrie delle metriche g_f con f data dalla (3.11) dipendono da due funzioni arbitrarie positive, limitate inferiormente, modulo l'azione di un gruppo di Lie. Dunque $\mathscr{H}$ non può dipendere da un numero finito di parametri. Vale però il

Teorema 4.1. *Sia* $(\bar{M},\ \bar{g})$ *uno spazio riemanniano simmetrico con curvatura sezionale non positiva. Se* $\dim\bar{M}\geqslant 3$ *supporremo anche che la decomposizione di de Rahm del suo rivestimento universale non contenga fattori isometrici allo spazio euclideo od al piano iperbolico. In queste ipotesi lo spazio dei moduli* $\mathscr{H} = \mathscr{M}_0(M)/\mathrm{Diff}(M)$ *delle metriche riemanniane di* M *che hanno la stessa curvatura di* $(\bar{M},\ \bar{g})$ *ha dimensione finita, se* M *è compatta.*

Dim. Se $\dim\bar{M}=2$, $\mathscr{M}_0(M)$ è costituita dalle metriche con curvatura gaussiana costante non positiva. Il risultato è allora il classico teorema di finitezza per lo spazio dei moduli di una superficie di Riemann. Se $\dim\bar{M}\geqslant 3$, dalla ipotesi del teorema segue che l'indice di nullità di $(\bar{M},\ \bar{g})$ e quindi quello di $(M,\ g)$, per ogni g di $\mathscr{M}_0(M)$, è zero. Perciò dal Teorema 2.2 abbiamo che $(M,\ g)$ è localmente isometrica allo spazio modello. Dunque tutte le metriche di $\mathscr{M}_0(M)$ sono localmente simmetriche con curvatura negativa. Segue dal celebre teorema di rigidità di Mostow [13] che sono tutte *globalmente isometriche* a patto di moltiplicarle per un fattore costante opportuno su ogni componente irriducibile della loro decomposizione di de Rahm. Ciò significa appunto che $\mathscr{H}$ dipende solo da un numero finito di parametri ed il teorema è provato.

La congettura è ovviamente vera anche nel caso in cui lo spazio modello abbia curvatura sezionale strettamente positiva. Infatti in questo caso il gruppo fondamentale di M è finito e non possono esistere nè «moduli» nè «deformazioni»: $\mathscr{H}$ è zero-dimensionale (cfr. ad es. [6]).

Bibliografia

[1] L. Bérard-Bergery, J. P. Bouirguignon et J. Lafontaine, *Déformations localement triviales des métriques riemanniennes*, Proc. Symp. Amer. Math. Soc. 27 (1973).

[2] M. Berger, *L'oeuvre d'André Lichnérowicz en géométrie riemannienne*, en «Physique quantique et géometrie» (eds. D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat), Colloque Géométrie et Physique 1986 en l'honneur de André Lichnérowicz, Hermann, Paris, 1988.

[3] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **10**, Springer Verlag, Berlin, 1987.

[4] E. Calabi, *On compact Riemannian manifolds with constant curvature*, I, Proc. Symp. Pure Math. 3, Amer. Math. Soc., 1961.

[5] P. A. Griffiths, *On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in Differential Geometry*, Duke Math. J. 41 (1974).

[6] P. A. Griffiths, *Deformations of G-structures*, Math. Ann. **155** (1964).

[7] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publ., New York **1** (1963), **2** (1969).

[9] O. Kowalski, F. Tricerri et L. Vanhecke, *Exemples nouveaux de variétés riemanniennes non-homogènes dont le tenseur de courbure est celui d'un espace symétrique riemannien*, preprint (1989).

[10] O. Kowalski, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Curvature homogeneous Riemannian manifolds*, preprint (1989).

[11] F. Lastaria, *Tesi di dottorato* (in preparazione).

[12] A. Lichnérowicz, *Géométrie des groupes des transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[13] G. D. Mostow, *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Ann. Math. Studies 78, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.

[14] L. NICOLODI and F. TRICERRI, *On two theorems of I. M. Singer about homogeneous spaces*, Ann. Global Geom. (to appear).

[15] Z. SZABÓ, *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(x, y) \cdot R = 0$; I, *The local version*, J. Differential Geom. 17 (1982).

[16] F. TRICERRI and L. VANHECKE, *Curvature homogeneous Riemannian manifolds*, Ann. École Norm. Sup. (to appear).

Finito di stampare il 19 dicembre 1989 Tipografia Compositori Bologna