Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 119-131

T. CARDINALI e F. PAPALINI (*)

Una estensione del concetto di midpoint convessità per multifunzioni (**)

1 - Introduzione

Molti Autori (cfr. [2], [4], [5], [8], [9]) si sono occupati del problema di stabilire per funzioni $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, *additive* o *midpoint convesse* (¹), quali condizioni fossero sufficienti ad assicurarne la continuità. I risultati ottenuti, successivamente, sono stati generalizzati a spazi lineari topologici da P. Fischer-Z. Slodowski [3], L. Thibault [11] e da altri.

Recentemente, K. Nikodem in [7] ha ripreso in esame il problema non limitandosi però a studiarlo per funzioni ad un sol valore ma nel contesto più generale di multifunzioni. In particolare, detti X e Y spazi lineari topologici T_0, D un insieme aperto e convesso di X, e indicata con $\mathscr{B}(Y)$ la famiglia dei sottoinsiemi limitati di Y, l'Autore prova che ogni multifunzione $F: D \to \mathscr{B}(Y)$ *midpoint convessa* su D (²) è continua su D se esiste un aperto $A \subset D$ ove F sia limitata.

Noi qui abbiamo fornito per una multifunzione F una definizione puntuale di midpoint convessità (midpoint concavità), che abbiamo chiamato *midpoint*convessità* (*midpoint*concavità*), la quale, se è verificata in ogni punto di D,

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, Via Vanvitelli 1, I-06100, Perugia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 30-III-1989.

(¹) Ricordiamo che una funzione f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ si dice *midpoint convessa* se risulta

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x)+f(y)] \qquad \forall x,\ y \in \mathrm{R}.$$

(²) Cfr. qui la definizione data più avanti in 2.

rappresenta una condizione più debole di quella utilizzata da K. Nikodem (cfr. qui Osservazione I). Abbiamo provato che, nella classe delle multifunzioni limitate addirittura su tutto D, la midpoint*convessità su D *non* basta però ad assicurare la continuità su D della F (cfr. qui Osservazione II); tuttavia, nella classe delle multifunzioni limitate in un intorno di un punto $x_0 \in D$, sussistono le seguenti proposizioni (cfr. qui Teorema 3.2 e Teorema 4.3):

$$(1.1) \qquad F \textit{ midpoint*convessa in } x_0 \Rightarrow F \textit{ semicontinua inferiormente in } x_0 .$$

$$(1.2) \qquad \begin{array}{l} \text{(j) } F \textit{ midpoint*concava in } x_0 \\ \text{(jj) } F(x_0) \textit{ midpoint convesso} \end{array} \Rightarrow F \textit{ semicontinua superiormente in } x_0 .$$

Vogliamo osservare esplicitamente che, nella classe delle multifunzioni F limitate in un intorno di un punto $x_0 \in D$ (addirittura in tutto D), la sola ipotesi di midpoint*concavità in x_0 *non* basta ad assicurare che la F sia in questo punto semicontinua superiormente (cfr. qui Osservazione IV). Del resto, la richiesta che l'insieme $F(x_0)$ sia midpoint convesso è fatta implicitamente anche in (1.1), poiché di tale proprietà gode ogni multifunzione F midpoint*convessa in x_0.

Nel nostro ordine di idee la continuità della multifunzione F viene assicurata se F è *midpoint*additiva*, cioè se è midpoint*convessa e midpoint*concava (cfr. qui il Corollario di 5).

Vogliamo intanto precisare che le proposizioni da noi conseguite hanno natura locale e pertanto possono essere utilizzate anche a multifunzioni F che verificano le proprietà richieste in un punto $x_0 \in D$ e *non* in tutto D.

Osserviamo, inoltre, che il nostro Corollario di 5, pur *non* contenendo il Teorema 1 di K. Nikodem, ne rappresenta, come abbiamo illustrato nell'Osservazione V, una estensione: esistono, infatti, multifunzioni che verificano le ipotesi del nostro Corollario in ogni punto di D ma *non* quelle del citato Teorema di K. Nikodem.

Vogliamo osservare, infine, che la proposizione (1.2) *non* è conseguenza della (1.1), come si potrebbe essere indotti a ritenere pensando alle funzioni monodrome: per queste invero da una proprietà valida per funzioni midpoint convesse se ne deduce banalmente un'altra per funzioni midpoint concave, poiché dall'essere f midpoint convessa segue che $-f$ è midpoint concava. Poiché però esistono multifunzioni F midpoint convesse tali che $-F$ *non* è midpoint concava, la situazione descritta per funzioni monodrome *non* si ripresenta nel caso di multifunzioni. La cosa *non* deve sorprendere se si tiene presente che i concetti di multifunzione midpoint convessa e di multifunzione midpoint concava, sono concetti ben distinti da quelli di midpoint convessità e di midpoint concavità per funzioni monodrome.

2 – Siano X e Y due spazi lineari topologici T_0 (cfr. [12], Definizione 13.1). Un insieme $A \subset Y$ si dice (cfr. [10], pag. 127) *limitato* se

(2.1) per ogni $W \in \mathscr{W}(0)$ esiste un numero $\gamma > 0$ tale che $\gamma A \subset \mathscr{W}$

ove $\mathscr{W}(0)$ è una base di intorni dello zero in Y. Posto

$$\mathscr{P}(Y) = \{S \subset Y\colon\ S \neq \emptyset\} \tag{2.2}$$

una multifunzione $F\colon X \to \mathscr{P}\{Y\}$ si dice (cfr. [1], pag. 45) *semicontinua inferiormente* in un punto $x_0 \in X$ se

(s.c.i.) per ogni $W \in \mathscr{W}(0)$ esiste un intorno U dello zero, $U \subset X$, tale che

$$F(x_0) \subset F(x) + W \qquad \forall x \in x_0 + U\,;$$

mentre F si dice (cfr. [1], pag. 45) *semicontinua superiormente* in $x_0 \in X$ se

(s.c.s.) per ogni $W \in \mathscr{W}(0)$ esiste un intorno U dello zero, $U \subset X$ tale che

$$F(x) \subset F(x_0) + W \qquad \forall x \in x_0 + U\,.$$

La multifunzione F si dice *continua* in un punto $x_0 \in X$ se è semicontinua inferiormente e semicontinua superiormente in tale punto (3).

Una multifunzione $F\colon X \to \mathscr{P}(Y)$ si dice (cfr. [7], pag. 46) *limitata* su un insieme $A \subset X$ se l'insieme $\lim\limits_{x \in A} F(x)$ è limitato in Y (cfr. (2.1)).

Un insieme $D \subset X$ si dice *midpoint convesso* (4) (cfr. [9]$_2$, pag. 252) se

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in D \qquad \forall x_1,\ x_2 \in D\,. \tag{2.3}$$

(3) La definizione di continuità qui introdotta è equivalente alla definizione di continuità rispetto alla topologia di Hausdorff in $\mathscr{P}(Y)$ (cfr. [7], pag. 46).

(4) Insiemi siffatti sono anche noti nella letteratura come insiemi J-convessi (cfr. [6], pag. 111).

Diremo con K. Nikodem (cfr. [7], pag. 47) che una multifunzione $F\colon D \to \mathscr{P}(Y)$ è *midpoint convessa* su D se risulta

$$\frac{1}{2}[F(x_1) + F(x_2)] \subset F(\frac{x_1 + x_2}{2}) \qquad \forall x_1,\ x_2 \in D. \tag{2.4}$$

Diremo, inoltre, che la multifunzione $F\colon D \to \mathscr{P}(Y)$ è *midpoint*convessa in un punto* $x_0 \in D$ se esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, tale che

$$\frac{1}{2}[F(x) + F(x_0)] \subset F(\frac{x + x_0}{2}) \qquad \forall x \in x_0 + U; \tag{2.5}$$

mentre diremo che F è *midpoint*concava in* x_0 se esiste un interno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, con la proprietà

$$F(\frac{x + x_0}{2}) \subset \frac{1}{2}[F(x) + F(x_0)] \qquad \forall x \in x_0 + U. \tag{2.6}$$

Diremo che la multifunzione F è *midpoint*convessa su D* (*midpoint*concava su D*) se è midpoint*convessa (midpoint*concava) in ogni punto $x_0 \in D$.

Diremo, infine, che la multifunzione F è *midpoint*additiva in un punto* $x_0 \in D$ (*su D*) se è midpoint*convessa e midpoint*concava in x_0 (su D).

Osservazione I. È subito visto che ogni multifunzione $F\colon D \to \mathscr{P}(Y)$ midpoint convessa su D è midpoint*convessa su D. In generale, però, *non* sussiste l'implicazione inversa. Infatti, essendo $X = Y = \mathbb{R}$, è immediato riconoscere che la multifunzione $F\colon X \to \mathscr{P}(Y)$, ove

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & x = 0 \\ [-1,\ 1] & x \neq 0 \end{cases}$$

è midpoint*convessa su X, mentre *non* è midpoint convessa su X.

3 - Andiamo ora a provare il seguente Lemma che utilizzeremo per conseguire il Teorema 3.2.

Lemma 3.1. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso e $F: D \to \mathscr{P}(Y)$* (cfr. (2.2)) *una multifunzione midpoint*convessa in $x_0 \in D$.*

In queste condizioni esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, con la proprietà

$$(3.1) \qquad \frac{1}{2^p} F(x) + \Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big) F(x_0) \subset F\Big(\frac{1}{2^p} x + \Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big) x_0\Big) \qquad \forall x \in x_0 + U \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Iniziamo con l'osservare che, per ipotesi, è possibile determinare un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, che non è restrittivo supporre bilanciato (cfr. [**10**], pag. 123), con la proprietà

$$(3.2) \qquad \frac{1}{2}[F(x) + F(x_0)] \subset F\Big(\frac{x + x_0}{2}\Big) \qquad \forall x \in x_0 + U$$

che altro non è che la (3.1) per $p = 1$. Fissiamo ora un numero naturale $p > 1$ e sia $x \in x_0 + U$. Posto $A_1 = \ldots = A_{2^p - 1} = F(x_0)$, risulta

$$(3.3) \qquad \frac{1}{2^p} F(x) + \Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big) F(x_0) \subset \frac{1}{2^p}[F(x) + A_1 + \ldots + A_{2^p - 1}]$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}\Big\{\frac{1}{2}[F(x) + F(x_0)] + \frac{1}{2}[A_2 + A_3] + \ldots + \frac{1}{2}[A_{2^p - 2} + A_{2^p - 1}]\Big\}$$

$$\subset \frac{1}{2^{p-1}}\Big[F\Big(\frac{x + x_0}{2}\Big) + A_1 + \ldots + A_{2^{p-1} - 1}\Big].$$

Ripetendo poi questo procedimento j volte, $j < p$, e tenendo presente che il punto $\dfrac{x + (2^{j-1} - 1)\, x_0}{2^{j-1}} \in x_0 + U$, segue

$$(3.4) \qquad \frac{1}{2^p} F(x) + \Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big) F(x_0) \subset \frac{1}{2^{p-j}}\Big[F\Big(\frac{x + (2^j - 1)\, x_0}{2^j}\Big) + A_1 + \ldots + A_{2^{p-j} - 1}\Big]$$

e quindi

$$(3.5) \qquad \frac{1}{2^p} F(x) + \Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big) F(x_0) \subset F\Big(\frac{1}{2^p} x + \Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big) x_0\Big).$$

Siamo ora in grado di provare il

Teorema 3.2. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$, un insieme aperto e midpoint convesso e $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(i) *F sia midpoint*convessa in $x_0 \in D$;*

(ii) *esista un intorno I dello zero, $x_0 + I \subset D$, in modo che F sia limitata in $x_0 + I$.*

In queste condizioni, F risulta semicontinua inferiormente in x_0.

Per conseguire la tesi basta provare che la multifunzione $G: D - x_0 \to \mathscr{P}(Y)$ definita ponendo

$$G(x) = F(x + x_0) \qquad \forall x \in D - x_0 \tag{3.6}$$

è semicontinua inferiormente nel punto $0 \in D - x_0$.

A tale scopo, fissiamo un intorno $W \in \mathscr{W}(0)$ e sia $V \in \mathscr{W}(0)$ con la proprietà

$$V + V \subset W. \tag{3.7}$$

Da (ii) segue che la multifunzione G è limitata nell'intorno I e pertanto i due insiemi $G(0)$ e $\bigcup_{y \in I} G(y)$ sono limitati in Y. Risulta allora che le multifunzioni

$$t \mapsto (1-t)\,G(0) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

$$t \mapsto t \bigcup_{y \in I} G(y) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

sono continue in $t = 0$: in corrispondenza del fissato intorno V (cfr. (3.7)), è possibile determinare un numero $\delta > 0$ in modo che risulti

$$(3.8)_1 \quad (1-t)\,G(0) \subset G(0) + V \qquad (3.8)_2 \quad G(0) \subset (1-t)\,G(0) + V$$

$$(3.9)_1 \quad t \bigcup_{y \in I} G(y) \subset V \qquad (3.9)_2 \quad \{0\} \subset t \bigcup_{y \in I} G(y) + V$$

per ogni $t \in]-\delta, \delta[$.

Poiché peraltro da (i) segue che G è midpoint*convessa in $0 \in D - x_0$ [5],

---

[5] È immediato constatare che l'insieme $D - x_0$ è aperto e midpoint convesso.

tenendo presente il Lemma 3.1, fissato $\bar{n} \in \mathrm{N}$, $\frac{1}{2^{\bar{n}}} \in]-\delta, \delta[$, esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$ con la proprietà

$$\frac{1}{2^{\bar{n}}} G(y) + \left(1 - \frac{1}{2^{\bar{n}}}\right) G(0) \subset G\left(\frac{y}{2^{\bar{n}}}\right) \qquad \forall y \in U. \tag{3.10}$$

Considerato allora l'intorno dello zero $J = \frac{1}{2^{\bar{n}}}(I \cap U)$ e fissato $x \in J$, esiste $\bar{y} \in I \cap U$ tale che $x = \frac{1}{2^{\bar{n}}}\bar{y}$. Risulta pertanto

$$\left(1 - \frac{1}{2^{\bar{n}}}\right) G(0) \subset G(x) - \frac{1}{2^{\bar{n}}} G(\bar{y}) \subset G(x) - \frac{1}{2^{\bar{n}}} \bigcup_{y \in I} G(y). \tag{3.11}$$

Dalla $(3.8)_2$, tenendo presenti (3.11), $(3.9)_1$ e (3.7), si ha infine

$$G(0) \subset \left(1 - \frac{1}{2^{\bar{n}}}\right) G(0) + V \subset G(x) - \frac{1}{2^{\bar{n}}} \bigcup_{y \in I} G(y) + V \subset G(x) + W \tag{3.12}$$

cioè G è semicontinua inferiormente in 0.

Osservazione II. Vogliamo osservare che le ipotesi del Teorema 3.2 *non* sono sufficienti ad assicurare la continuità della multifunzione F nel punto x_0: ciò segue dall'esempio riportato nell'Osservazione I. Inoltre tale esempio ci permette anche di affermare che esistono multifunzioni $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ midpoint*convesse e limitate su D, ma *non* continue su D.

4 – Andiamo ora a conseguire una condizione sufficiente per la semicontinuità superiore di una multifunzione. A tale scopo premettiamo due Lemmi.

Lemma 4.1. *Per ogni sottoinsieme A di uno spazio lineare topologico T_0 sussiste la seguente implicazione*

$$A \textit{ midpoint convesso} \Rightarrow \bar{A} \textit{ convesso}\,(^6). \tag{4.1}$$

(6) $\bar{A}$ rappresenta la chiusura di A.

Fissati x, $y \in \bar{A}$ e un numero $\alpha \in [0, 1]$, è possibile determinare una successione $\{\alpha_n\}_n \subset [0, 1]$, α_n numero diadico ([7]), che converge ad α. Poiché dall'ipotesi segue che l'insieme $\bar{A}$ è midpoint convesso, risulta (cfr. [6], Lemma 1, pag. 111)

$$\alpha_n x + (1 - \alpha_n) y \in \bar{A} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

da cui per l'appunto

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in \bar{A} . \tag{4.3}$$

Lemma 4.2. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso, $F : D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(i) *F sia midpoint*concava in $x_0 \in D$;*

(ii) *$F(x_0)$ sia midpoint convesso.*

In queste condizioni, esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, tale che

$$F(\frac{1}{2^p} x + (1 - \frac{1}{2^p}) x_0) \subset \frac{1}{2^p} F(x) + (1 - \frac{1}{2^p}) \overline{F(x_0)} \qquad \forall x \in x_0 + U \qquad \forall p \in \mathbb{N} . \tag{4.4}$$

Procediamo per induzione. Intanto la tesi è vera per $p = 1$, poiché in tal caso la (4.4) segue ovviamente da (i).

Resta da provare che se la (4.4) sussiste per $p = n - 1$, essa continua a sussistere per $p = n$. A tale scopo, essendo U l'intorno determinato in corrispondenza di $p = 1$, intorno che non è restrittivo supporre bilanciato, fissiamo $x \in x_0 + U$. Risulta

$$F(\frac{1}{2^n} x + (1 - \frac{1}{2^n}) x_0) = F(\frac{1}{2} (\frac{1}{2^{n-1}} x + (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) x_0 + x_0)) . \tag{4.5}$$

Dall'essere U bilanciato il punto $\frac{1}{2^{n-1}} x + (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) x_0 \in x_0 + U$, e quindi da (4.5) e dall'ipotesi (i) segue

$$F(\frac{1}{2^n} x + (1 - \frac{1}{2^n}) x_0) \subset \frac{1}{2} F(\frac{1}{2^{n-1}} x + (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) x_0) + \frac{1}{2} F(x_0) . \tag{4.6}$$

([7]) Ricordiamo (cfr. [6], pag. 111) che si dicono *numeri diadici* gli elementi dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}\colon x = \frac{k}{2^p},\ k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Tenendo poi presente l'ipotesi induttiva e il Lemma 4.1 possiamo scrivere infine

$$(4.7)\qquad F\Big(\frac{1}{2^n}x+\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)x_0\Big)\subset\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2^{n-1}}F(x)+\Big(1-\frac{1}{2^{n-1}}\Big)\overline{F(x_0)}\Big)+\frac{1}{2}\overline{F(x_0)}$$

$$=\frac{1}{2^n}F(x)+\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)\Big[\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\overline{F(x_0)}+\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\overline{F(x_0)}\Big]\subset\frac{1}{2^n}F(x)+\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)\overline{F(x_0)}\,.$$

Sussiste il

Teorema 4.3. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D\subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso, $F\colon D\to\mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(j) *F sia midpoint*concava in $x_0\in D$.*

(jj) *$F(x_0)$sia midpoint convesso.*

(jjj) *Esista un intorno I dello zero, $x_0+I\subset D$, in modo che F sia limitata in x_0+I.*

In queste condizioni, F risulta semicontinua superiormente in x_0.

Anche qui (cfr. Teorema 3.2) per conseguire la tesi è sufficiente provare che la multifunzione $G\colon D-x_0\to\mathscr{P}(Y)$, ove

$$(4.8)\qquad G(x)=F(x+x_0)\qquad \forall x\in D-x_0$$

è semicontinua superiormente in $0\in D-x_0$.

Sia $W\in\mathscr{W}(0)$ e $V\in\mathscr{W}(0)$ un intorno bilanciato scelto in modo che risulti

$$(4.9)\qquad V+V+V\subset W\,.$$

In virtù dell'ipotesi (jjj) le multifunzioni

$$(4.10)\quad t\mapsto(1-t)\,\overline{G(0)}\quad \forall t\in\mathrm{R}\qquad\qquad (4.11)\quad t\mapsto t\bigcup_{y\in I}G(y)\quad\forall t\in\mathrm{R}$$

sono continue nel punto $t=0$, ed esiste pertanto un numero $\delta>0$ tale che

$$(4.10)_1\quad (1-t)\,\overline{G(0)}\subset\overline{G(0)}+V\qquad\qquad (4.11)_1\quad t\bigcup_{y\in I}G(y)\subset V$$

per ogni $t\in\,]-\delta,\ \delta[$.

Essendo la multifunzione G midpoint*concava in $0 \in D - x_0$ (cfr. qui ipotesi (j)) per il Lemma 4.2 è possibile determinare un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, con la proprietà

$$G\left(\frac{y}{2^n}\right) \subset \frac{1}{2^n} G(y) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \overline{G(0)} \qquad \forall y \in U \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Fissato un numero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ in modo che $\frac{1}{2^{\bar{n}}} < \delta$, andiamo a considerare in X l'intorno dello zero $J = \frac{1}{2^{\bar{n}}}(I \cap U)$. Per ogni $x \in J$ esiste un punto $\bar{y} \in I \cap U$ in modo che $x = \frac{1}{2^{\bar{n}}}\bar{y}$ e pertanto, tenendo presente che $\overline{G(0)} \subset G(0) + V$ e (4.12), $(4.10)_1$, $(4.11)_1$, (4.9), si ha infine

$$G(x) \subset \frac{1}{2^{\bar{n}}} G(\bar{y}) + \left(1 - \frac{1}{2^{\bar{n}}}\right) \overline{G(0)} \subset \frac{1}{2^{\bar{n}}} \bigcup_{y \in I} G(y) + \overline{G(0)} + V \subset G(0) + W. \tag{4.13}$$

Osservazione III. Facciamo osservare che le ipotesi del Teorema 4.3 *non* sono però sufficienti ad assicurare la continuità di F nel punto x_0. Infatti, essendo $X = Y = \mathbb{R}$, è subito visto che la multifunzione $F: X \to \mathscr{P}(Y)$, ove

$$F(x) = \begin{matrix} [-1,\ 1] & x = 0 \\ \{0\} & x \neq 0 \end{matrix} \tag{4.14}$$

soddisfa alle ipotesi (j), (jj), (jjj) nel punto $x_0 = 0$, ma *non* è continua in tale punto.

Osservazione IV. Osserviamo, infine, che l'ipotesi di midpoint convessità richiesta, nel Teorema 4.3, per l'insieme $F(x_0)$ *non* può essere rimossa, poiché esistono multifunzioni $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ che sono midpoint*concave in x_0 e limitate in un intorno di tale punto, ma *non* semicontinue superiormente in x_0. Infatti, essendo $X = Y = \mathbb{R}$, è immediato riconoscere che la multifunzione $F: X \to \mathscr{P}(Y)$, ove

$$F(x) = \begin{matrix} \{0,\ 2\} & x = 0 \\ \{0,\ 1,\ 2\} & x \neq 0 \end{matrix} \tag{4.15}$$

è midpoint*concava in $x_0 = 0$ e limitata in un intorno di tale punto (addirittura in tutto X), ma *non* semicontinua superiormente in $x_0 = 6$.

5 – Dai Teoremi 3.2 e 4.3, tenendo presente che se la multifunzione F è midpoint*convessa in un punto x_0, l'insieme $F(x_0)$ è midpoint convesso, segue il

Corollario. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso, F: $D \to \mathscr{B}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(α) *F sia midpoint*additiva in $x_0 \in D$;*

($\alpha\alpha$) *esista un intorno I dello zero, $x_0 + I \subset D$, tale che F sia limitata in $x_0 + I$.*

In queste condizioni, F risulta continua in x_0.

Osservazione V. Vogliamo osservare esplicitamente che il nostro Corollario estende il Teorema 1 conseguito da K. Nikodem in [7]: esistono infatti multifunzioni F, definite in un insieme D aperto e convesso e a valori nella famiglia dei sottoinsiemi (*non* vuoti) limitati di Y, che sono midpoint*additive su D e che soddisfano l'ipotesi ($\alpha\alpha$) in ogni punto $x_0 \in D$, ma che *non* sono midpoint convesse su D come risulta dal seguente

Esempio 5.1. Siano $X = Y = \mathbb{R}$ e F: $X \to \mathscr{B}(Y)$ la multifunzione definita ponendo

$$F(x) = \begin{array}{ll} [x,\ 0] & x < 0 \\ \{0\} & x = 0 \\ [0,\ x] & x > 0 . \end{array} \tag{5.1}$$

Se $x_0 = 0$, è subito visto che

$$\frac{1}{2}[F(x) + F(0)] = F\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \forall x \in X; \tag{5.2}$$

se $x_0 \neq 0$, scelto $U =]-\eta,\ \eta[$, ove $\eta = \dfrac{|x_0|}{2}$, risulta

$$\frac{1}{2}[F(x) + F(x_0)] = F\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \qquad \forall x \in x_0 + U \tag{5.3}$$

e pertanto la nostra F è midpoint*additiva su X.

Inoltre è immediato verificare che

$$F \text{ è limitata in } x_0 =]-1,\ 1[\qquad \forall x_0 \in X \tag{5.4}$$

e quindi sussiste anche l'ipotesi ($\alpha\alpha$) in ogni punto di X.

Tuttavia, la nostra F *non* è midpoint convessa su X (cfr. qui (2.4)). Scelti, ad esempio, $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, risulta

$$\frac{1}{2}[F(-2) + F(2)] = [-1,\ ] \not\subset F(0) = \{0\}. \tag{5.5}$$

Bibliografia

[1] J. P. AUBIN and A. CELLINA, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1984.

[2] S. BANACH, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Fund. Mat. **1** (1920), 123-124.

[3] P. FISCHER and Z. SLODKOWSKI, *Christensen zero sets and measurable convex functions*. Proc. Amer. Mat. Soc. **79** (1980), 449-453.

[4] M. FRÉCHET: $[\bullet]_1$ *Pri la funkcia equacio* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Enseignement Math. **15** (1913), 390-393; $[\bullet]_2$ *A propos d'un article sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Enseignement Math. **16** (1914), 136.

[5] J. L. W. V. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 179-193.

[6] M. KUCZMA, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities, Cauchy's equation and Jensen's inequality*, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszava-Krakòw-Katowice (1985).

[7] K. NIKODEM, *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), 46-56.

[8] W. SIERPIŃSKI: $[\bullet]_1$ *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Fund. Math. **1** (1920), 116-122; $[\bullet]_2$ *Sur les fonctions convexes measurables*, Fund. Math. **1** (1920), 125-128; $[\bullet]_3$ *Sur une propriété des fonctions de M. Hamel*, Fund. Math. **5** (1924), 334-336.

[9] J. SMÌTAL: $[\bullet]_1$ *On the functional equation* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **13** (1968); $[\bullet]_2$ *On boundedness and discontinuity of additive functions*, Fund. Math. **76** (1972), 245-253.

[10] A. E. TAYLOR, *Introduction to functional analysis*, Wiley and Sons, 1967.

[11] L. THIBAULT, *Continuity of measurables convex multifunctions*, Lecture Notes in Math. **1091**, Springer-Verlag (1984), 216-224.

[12] S. WILLARD, *General Topology*, Addison-Wesley Pubbl. Co. 1970.

Abstract

*In this note we introduce the definition of midpoint*convex (midpoint*concave) multifunction on a point. We present a sufficient condition for a midpoint*convex (midpoint*concave) multifunction on a point to be lower-semicontinuous (upper-semicontinuous) on the same point.*

The results here obtained extend a theorem due to K. Nikodem.

***