Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 227-245

EMILIO MUSSO (*)

Twistori di contatto e geometria conforme (**)

1 - Introduzione

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione $2n+1$ $(n \geqslant 1)$. Una *f-struttura di rango massimo* (o *twistore di contatto*) in un punto $x \in M$ è un endomorfismo $J \in \mathrm{end}\ (T_x M)$ di rango massimo tale che $J^3 + J = 0$. Il fibrato $T: \mathscr{F}(m, g) \to M$ dei twistori di contatto su M è la *fibrazione twistoriale* di (M, g).

Uno dei motivi per cui si introduce la fibrazione twistoriale è l'esistenza di una struttura di Cauchy-Riemann su $\mathscr{F}(M, g)$. L'idea di associare ad una varietà Riemanniana tridimensionale una varietà CR è sostanzialmente dovuta a Penrose [8] ed è stata ripresa da C. LeBrun [6]. Lo studio dei twistori di contatto su varietà di dimensione > 3 è stato sviluppato da J. Rawnsley [9] in relazione con la teoria delle applicazioni armoniche.

Il nostro obiettivo è di studiare l'integrabilità della struttura CR della fibrazione twistoriale. Questo problema è stato considerato in [9], dove però la nozione d'integrabilità adottata è più restrittiva di quella a cui facciamo riferimento in questo lavoro.

Dimostreremo che *la struttura* CR *di* $\mathscr{F}(M, g)$ *è integrabile se e solo se la curvatura di Weyl di* (M, g) *è nulla.* Questa è una condizione non banale solo se $\dim(M) \geqslant 5$, nel qual caso la metrica g risulta essere localmente conformalmente piatta. Se invece M è una varietà tridimensionale allora il tensore di Weyl è automaticamente nullo e lo spazio twistoriale è integrabile, con forma di Levi di tipo Lorentziano.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica «U. Dini», Università di Firenze, Viale Morgagni 67/A, I-50134 Firenze.

(**) Ricevuto: 4-VIII-1989.

Ci siamo quindi posti il problema di determinare che tipo di condizione geometrica deve verificare la struttura CR dello spazio twistoriale di una varietà Riemanniana tridimensionale affinché la metrica sia localmente conformemente piatta.

Dimostreremo che (M^3, g) *è una varietà tridimensionale localmente conformemente piatta se e solo se la curvatura pseudoconforme di Chern e Moser* (cfr. [3]) *dello spazio twistoriale* $\mathscr{F}(M^3, g)$ *si annulla.*

Come strumento tecnico per calcolare la curvatura pseudoconforme di $\mathscr{F}(M^3, g)$ si utilizzano le strutture pseudohermitiane introdotte da S. Webster in [10].

Si dimostra che la curvatura pseudoconforme dello spazio twistoriale è data essenzialmente dal *tensore di Cotton* (cfr. [5]) e da questo calcolo si farà seguire la dimostrazione della proprietà enunciata.

Le varietà CR con forma di Levi di tipo Lorentziano sono un ambiente adatto per lo studio delle curve olomorfe, come è stato posto in evidenza da R. Bryant in [2]. In ultimo studieremo le curve olomorfe negli spazi twistoriali delle varietà Riemanniane tridimensionali. Dimostreremo che *ogni curva olomorfa non verticale di* $\mathscr{F}(M^3, g)$ *si proietta su* M^3 *come una superficie totalmente ombelicale. Viceversa: ogni superficie totalmente ombelicale* $f: X^2 \to M^3$ *è del tipo* $T \circ h$, *dove* $h: X^2 \to M^3$ *è una curva olomorfa non verticale di* $\mathscr{F}(M^3, g)$.

2 - Preliminari

Sia G il gruppo di Lie formato da tutte le matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} B & V \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

dove $B \in GL(n, C)$, $V \in C^n$ e $t > 0$. Il gruppo G viene rappresentato in $SL(2n+1, R)$ ponendo

$$\begin{bmatrix} B & V \\ 0 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(B) & -I(B) & R(V) \\ I(B) & R(B) & I(V) \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

dove $R(\ )$ ed $I(\ )$ denotano parte reale e parte immaginaria rispettivamente.

Una *struttura di Cauchy-Riemann* su una varietà M di dimensione $2n+1$ è una riduzione $p\colon P \to M$ del fibrato dei riferimenti di M con gruppo strutturale G.

Indichiamo con $\theta = {}^t(\theta^1, \ldots, \theta^{2n}, \theta^{2n+1})$ la forma tautologica del fibrato strutturale $P \to M$, e sia $\eta = {}^t(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ la 1-forma a valori in C^n definita ponendo $\eta^a = \theta^a + i\theta^{n+a}$, $a = 1, \ldots, n$.

Il fibrato P individua un sottofibrato $T'M \subset TM$ del fibrato tangente ed una struttura di fibrato vettoriale complesso di rango n su $T'M$ (*fibrato tangente complesso di M*).

Il quoziente $s(M) := T(M)/T'(M)$ è un fibrato vettoriale reale (orientato) di rango 1 ed è quindi triviale. La 1-forma θ^{2n+1} determina una 1-forma α su M a valori nel fibrato $s(M)$.

Def. 2.1. Una struttura CR si dice *integrabile* se $d\theta^{2n+1}$ e $d\eta^1, \ldots, d\eta^n$ appartengono all'ideale algebrico generato da $\theta^{2n+1}, \eta^1, \ldots, \eta^n$, cioè

$$d\theta^{2n+1} = \eta^a \wedge \phi_a + \theta^{2n+1} \wedge \phi \qquad d\eta^a = -\phi^a{}_b \wedge \phi^b + \theta^{2n+1} \wedge \phi^a$$

dove ϕ_a, ϕ^a, $\phi^a{}_b$ sono 1-forme complesse e ϕ è una 1-forma reale.

Poiché la forma θ^{2n+1} è reale si avrà

$$d\theta^{2n+1} = -i g_{ab}\, \eta^a \wedge \bar{\eta}^b \mod(\theta^{2n+1})$$

Le g_{ab} sono funzioni differenziabili definite su P tali che $g_{ab} = \bar{g}_{ba}$. Inoltre la forma hermitiana $g_{ab}\,\eta^a \otimes \bar{\eta}^b$ è semi-basica e, a meno di un fattore moltiplicativo positivo, risulta proiettabile su M. Più precisamente $g_{ab}\,\eta^a \otimes \bar{\eta}^b$ determina una forma hermitiana su $T'M$ a valori nel fibrato $s(M)^*$ (*la forma di Levi della struttura* CR).

Diremo che la struttura CR è *non degenere* (*con segnatura* $(p, n-p)$) se la forma di Levi ha segnatura $(p, n-p)$ su $T'_x(M)$, per ogni punto $x \in M$.

Se la forma di Levi ha $n-1$ autovalori dello stesso segno ed un autovalore di segno opposto allora si dirà che *la struttura* CR *è di tipo Lorentziano.*

Sia M una varietà CR, integrabile e non degenere. Se fissiamo una trivializzazione globale $\sigma\colon M \to s(M)$ allora si può definire una riduzione del fibrato strutturale P ponendo

$$P' = \{u \in Q / [u_{2n+1}] = \sigma_{p(u)}\} \tag{2.1}$$

dove $u=(u_1, \ldots, u_{2n}, u_{2n+1})$, ed $[u_{2n+1}]$ denota la proiezione del vettore tangente u_{2n+1} su $s(M)_{p(u)}$. Le restrizioni di θ^{2n+1} e di $g_{ab}\,\eta^a \otimes \bar{\eta}^b$ sul fibrato ridotto P' sono proiettabili. Si potrà quindi definire un'ulteriore riduzione di P ponendo [10]

$$P'' = \{u \in Q'/\mathrm{d}\theta^{2n+1}u = -\,\mathrm{i}g_{ab}(u)\,\eta^a \otimes \bar{\eta}^b{}_u,\ g_{ab}(u) = \mp\,\delta_{ab}\}\,. \tag{2.2}$$

Il gruppo strutturale di P'' è dato dal gruppo unitario $U(p,\ n-p)$, dove $(p,\ n-p)$ è la segnatura della forma di Levi e $U(p,\ n-p)$ è rappresentato in G nel modo seguente

$$B \in U(p,\ n-p) \to \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Secondo la nomenclatura introdotta da S. Webster [10], diremo che il fibrato $p'':P''\to M$ è *una struttura pseudohermitiana della varietà* CR.

È importante ricordare il seguente teorema di S. Webster [10].

Teorema 2.2. Sia $p'':P''\to M$ una struttura pseudohermitiana su una varietà CR nondegenere M. Allora P'' ammette un'unica connessione Φ al gruppo $U(p,\ n-p)$ tale che

$$\mathrm{d}\eta^a = -\,\Phi^a{}_b \wedge \eta^b - B^a{}_b\,\bar{\eta}^b \wedge \theta^{2n+1} \tag{2.3}$$

dove $B=(B^a{}_b)$ è un'applicazione $U(p,\ n-p)$-equivariante a valori in $gl(n,\ C)$ che soddisfa ${}^tB=B$.

La connessione Φ si dice *connessione di Webster* e l'applicazione B è la *torsione di Webster della struttura pseudohermitiana.*

L'importanza delle strutture pseudohermitiane è dovuta principalmente al fatto di poter utilizzare la connessione di Webster per ottenere la curvatura pseudoconforme di Chern e Moser (cfr. [3]) senza dover far ricorso alle strutture del second'ordine, e quindi con una notevole semplificazione dei calcoli (rimandiamo il lettore a [10], pagg. 34 e 35, per la definizione della curvatura di Webster e per la dimostrazione delle formule che esprimono la curvatura pseudoconforme in funzione della curvatura di Webster, delle sue contrazioni e della torsione di Webster. Tali formule verranno poi utilizzate in 4 di questo articolo).

3 - La fibrazione twistoriale

Posto di rappresentare il gruppo unitario $U(n)$ come sottogruppo del gruppo ortogonale speciale $\mathrm{SO}(2n+1)$, l'algebra di Lie $\mathrm{o}(2n+1)$ si decompone nella somma diretta ortogonale di tre $U(n)$-sottomoduli irriducibili

$$\mathrm{o}(2n+1) = u(n) \oplus \mathrm{o}(n, C) \oplus C^n \tag{3.1}$$

dove $u(n)$ denota l'algebra di Lie del gruppo unitario $U(n)$, mentre $\mathrm{o}(n, C)$ e C^n sono appresentati in $\mathrm{o}(2n+1)$ nel modo seguente

$$A + \mathrm{i}B \in U(n) \to \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X + \mathrm{i}Y \in C^n \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & Y \\ -{}^tX & -{}^tY & 0 \end{bmatrix}.$$

Se conveniamo di identificare $\mathrm{o}(n, C)$ con $\wedge^2 C^n$ (e quindi con $C^{\frac{1}{2}n(n-1)}$), allora su $\mathrm{o}(n, C)$ avremo una struttura Hermitiana $U(n)$-invariante ed una rappresentazione γ di $U(n)$ in $U(\frac{1}{2}(n(n-1)))$. Indicheremo con p_1, p_2 e p_3 le proiezioni di $\mathrm{o}(2n+1)$ sulle componenti della decomposizione (3.1).

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione $2n+1$ e sia

$$\pi : \mathrm{o}(M) \to M$$

il fibrato dei riferimenti ortonormali. Denotiamo con $\mathcal{F}(M, g)$ il quoziente $\mathrm{o}(M)/(U(n)$ e con T la proiezione di $\mathcal{F}(M, g)$ su M.

Def. 3.1. Chiameremo $\mathcal{F}(M, g)$ lo *spazio twistoriale di* (M, g) *e la fibrazione* $T: \mathcal{F}(M, g) \to M$ è detta *fibrazione twistoriale della varietà Riemanniana* (M, g).

La varietà $\mathrm{o}(M)$ dei riferimenti ortonormali di (M, g) si fibra su $\mathcal{F}(M, g)$ diventando un fibrato principale con gruppo strutturale $U(n)$. Indichiamo con $q: \mathrm{o}(M) \to \mathcal{F}(M, g)$ la proiezione.

Sia ora $\theta = {}^t(\theta^1, \dots, \theta^{2n+1})$ la forma tautologica di π: $O(M) \to M$ ed ω la connessione di Levi-Civita. Poniamo

$$(3.2) \qquad \mu_{\mathrm{I}} := p_2(\omega) \qquad \mu_{\mathrm{II}} := p_3(\omega) \qquad \mu_{\mathrm{III}} =: {}^t(\theta^1 + \mathrm{i}\theta^{n+1}, \dots, \theta^n + \mathrm{i}\theta^{2n}).$$

Si osserva che $\mu =: (\mu_{\mathrm{I}}, \mu_{\mathrm{II}}, \mu_{\mathrm{III}})$ è una 1-forma a valori in $C^{\frac{1}{2}[n(n+3)]}$, tensoriale per il fibrato q: $O(m) \to \mathscr{F}(M, g)$, relativamente alla rappresentazione del gruppo strutturale

$$B \in U(n) \to \begin{bmatrix} \gamma(B) & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \in U(\tfrac{1}{2}[n(n+3)]).$$

Dalla definizione seguono le formule

$$\mu_{\mathrm{I}} = (\mu^b{}_a)_{a<b=1,\dots,n} \qquad \mu^b{}_a = \tfrac{1}{2}[(\omega^b{}_a - \omega^{n+b}{}_{n+a}) + \mathrm{i}(\omega^b{}_{n+a} - \omega^a{}_{n+b})]$$

$$\mu_{\mathrm{II}} = {}^t(\mu_1, \dots, \mu_n) \qquad \mu_a = \omega^a{}_{2n+1} + \mathrm{i}\omega^{n+a}{}_{2n+1}.$$

In conclusione: *la fibrazione di* $O(M)$ *su* $\mathscr{F}(M, g)$ *può essere interpretata come una riduzione del fibrato dei riferimenti lineari di* $\mathscr{F}(M, g)$ *con gruppo strutturale* $U(n) \subset U(\frac{1}{2}[n(n+3)]) \subset SL(n(n+3), R)$. *Quindi, si individua una f-struttura, ed in particolare una struttura* CR *sullo spazio totale della fibrazione twistoriale di* (M, g).

Nel seguito ci riferiremo sempre alla struttura CR ora introdotta. Si noti che la f-struttura su $\mathscr{F}(M, g)$ dipende dalla metrica g mentre non è difficile dimostrare che la struttura CR dipende esclusivamente dalla classe conforme della metrica.

Nel corso di questo paragrafo studieremo le condizioni d'integrabilità della struttura CR quando la dimensione della varietà di base è ≥ 5, rimandando la discussione del caso tridimensionale al paragrafo successivo.

Prima di discutere l'integrabilità della struttura CR degli spazi twistoriali dobbiamo premettere alcune considerazioni di natura algebrica.

Sia V uno spazio vettoriale reale ($\dim V \geq 3$), e sia $\langle\, , \rangle$ una forma bilineare simmetrica definita positiva, indichiamo con $O(V)$ il corrispondente gruppo ortogonale.

Lo spazio $\mathscr{R}(V)$ dei *tensori di curvatura su* V (cfr. [1]) è formato dai tensori R di tipo (3, 1) tali che

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y, X)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle$$

$$\mathscr{S}_{X,Y,Z}R(X, Y)Z = 0$$

per ogni X, Y, YZ e $W \in V$.

Indichiamo con $\mathscr{T}(V)$ lo spazio dei tensori di tipo (3, 0) tali che

$$T(X, Y, Z) = -T(Y, X, Z) \qquad \forall X, Y, Z \in V.$$

Ricordiamo che un tensore di curvatura R ha *componente di Weyl nulla* (cfr. [1]) se esiste una forma bilineare simmetrica $t(\,,\,)$ tale che

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle$$

$$= t(X, Z)\langle Y, W\rangle - t(Y, Z)\langle X, W\rangle + t(Y, W)\langle X, Z\rangle - t(X, W)\langle Y, Z\rangle$$

per ogni X, Y, Z, $W \in V$.

Indicheremo con $\mathscr{J}(V)$ il sottospazio di $\mathscr{R}(V)$ formato dai tensori di curvatura con componente di Weyl nulla. Si osservi che $\mathscr{J}(V)$ è una componente invariante di $\mathscr{R}(V)$ (relativamente alla ovvia rappresentazione di $\mathrm{o}(V)$). Inoltre: nel caso in cui $\dim(V) = 3$ ogni tensore di curvatura ha componente di Weyl nulla.

Sia $\mathscr{T}_1(V)$ la $\mathrm{o}(V)$-componente irriducibile di $\mathscr{T}(V)$ così definita

$$\mathscr{T}_1(V)$$

$$= \{T \in \mathscr{T}(V) / T(X, Y, W) = \langle W, X\rangle \xi(Y) - \langle W, Y\rangle \xi(X),\ \xi \in V^*,\ \forall X, Y, W \in V\}.$$

Da ora in avanti supponiamo che $\dim(V) = 2n+1$, ed $n \geq 2$. Per ogni vettore non nullo $W \in V$ indichiamo con V^W il suo complemento ortogonale, e con $\mathscr{Z}^W$ l'insieme degli endomorfismi J di V_W tali che

$$J^2 = -\mathrm{id} \qquad \langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle \qquad \forall X, Y \in V_W.$$

Dato un tensore di curvatura $R \in \mathscr{R}(V)$ ed un vettore non nullo $W \in V$, si definiscono $R^{\wedge}_W \in \mathscr{R}(V_W)$ ed $R'_W \in \mathscr{T}(V_W)$ nel modo seguente

$$\langle R^{\wedge}_W(X,\ Y)Z,\ V\rangle := \langle R(X,\ Y)Z,\ V\rangle \tag{3.4}$$

$$R'_W(X,\ Y,\ Z) := \langle R(X,\ Y)W,\ Z\rangle \tag{3.5}$$

per ogni $X,\ Y,\ Z,\ V \in V_W$.

Dalla definizione segue che se R ha componente di Weyl nulla, allora anche la componente di Weyl del tensore $R^{\wedge}_W$ è nulla, per ogni vettore $W \in V,\ W \neq 0$.

Proposizione 3.2. *Un tensore di curvatura $R \in \mathscr{R}(V)$ ha componente di Weyl nulla se e solo se per ogni vettore non nullo $W \in V$ il tensore di curvatura $R^{\wedge}_W$ ha componente di Weyl nulla ed R'_W appartiene a $\mathscr{T}_1(V_W)$.*

Dim. Anzitutto bisogna ricordare che $\mathscr{R}(V)$ è somma diretta ed ortogonale del sottospazio $\mathscr{S}(V)$ con il sottospazio $\mathscr{S}'(V)$ formato dai tensori di curvatura che hanno contrazione di Ricci nulla. Inoltre: $\mathscr{S}'(V)$ è una componente irriducibile di $\mathscr{R}(V)$ (cfr. [1]).

Sia ora $\mathscr{M}(V)$ il sottospazio $o(V)$-invariante di $\mathscr{R}(V)$ definito da

$$\mathscr{M}(V) := \{R \in \mathscr{R}(V) / R^{\wedge}_W \in \mathscr{S}(V_W),\ R'_W \in \mathscr{T}_1(V_W),\ \forall W \in V,\ W \neq 0\}.$$

Poiché $\mathscr{S}(V) \subset \mathscr{M}(V)$, sarà sufficiente dimostrare che $\mathscr{M}(V) \cap \mathscr{R}'(V) = (0)$.

Prendiamo un elemento R di $\mathscr{M}(V)$ con contrazione di Ricci nulla, e fissiamo una base ortonormale $e_1, \ldots, e_{2n+1}$ di V. Osserviamo che per ogni $i = 1, \ldots, 2n+1$ esiste un covettore ξ_i tale che

$$\langle R(X,\ Y)e_i,\ Z\rangle = \langle Z,\ X\rangle\,\xi_i(Y) - \langle Z,\ Y\rangle\,\xi_i(X) \qquad \forall X,\ Y,\ Z \in V_{e_i}.$$

Quindi si ottiene

$$0 = \mathrm{Ric}(R)(e_k,\ e_j) = 2\xi_k(e_j) \qquad \forall k,\ j = 1, \ldots, 2n+1,\ k \neq j.$$

Da ciò segue che $R(X,\ Y)Z = 0$ per ogni $Z \in V,\ Z \neq 0$, e per ogni $X,\ Y \in V_Z$. Un tensore di curvatura R che verifica a queste identità deve avere curvatura sezionale costante, se poi la contrazione di Ricci di R si annulla, allora $R = 0$.

A questo punto ricordiamo due risultati dovuti a O'Brian e Rawnsley [7]: sia W uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione pari, maggiore od uguale di quattro, e sia $\mathcal{Z}(W)$ l'insieme delle strutture complesse, ortogonali di W (cioè gli elementi J di $\mathcal{Z}(W)$ sono trasformazioni ortogonali di W tali che $J^2 = -\mathrm{id}$).

Per ogni $J \in \mathcal{Z}(W)$, siano $J^{\pm}$ le proiezioni di $W \otimes C$ sui due autospazi di J relativi ai due autovalori $\pm \mathrm{i}$. Allora un tensore di curvatura $R \in \mathcal{R}(W)$ ha componente di Weyl nulla se e solo se

$$J^+ R(J^-(X),\ J^-(Y))J^-(Z) = 0 \qquad \forall X,\ Y,\ Z \in W \qquad \forall J \in \mathcal{Z}(W).$$

Inoltre: un elemento $T \in \mathcal{T}(W)$ appartiene a $\mathcal{T}_1(W)$ se e solo se

$$T(J^-(X),\ J^-(Y),\ J^-(Z)) = 0 \qquad \forall X,\ Y,\ Z \in W \qquad \forall J \in \mathcal{Z}(W).$$

Utilizzando queste due caratterizzazioni e la Proposizione (3.2) si deduce immediatamente la seguente

Proposizione 3.3. *Sia V uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione $2n+1$, $n \geqslant 2$. Allora un tensore di curvatura $R \in \mathcal{R}(V)$ ha componente di Weyl nulla se e solo se*

$$J^+ R\hat{}_W(J^-(X),\ J^-(Y))J^-(Z) = 0 \tag{3.6}$$

$$R'_W(J^-(X),\ J^-(Y),\ J^-(Z)) = 0 \tag{3.7}$$

$$\forall W \in V,\ W \neq 0 \qquad \forall X,\ Y,\ Z \in V_W \quad \forall J \in \mathcal{Z}(V_W).$$

Teorema 3.4. *Sia $(M,\ g)$ una varietà Riemanniana,* $\dim M = 2n+1 \geqslant 5$. *La struttura* CR *dello spazio twistoriale $\mathcal{F}(M,\ g)$ è integrabile se e solo se il tensore di curvatura di Weyl della metrica g si annulla.*

Dim. Dalle equazioni di struttura del parallelismo di Levi-Civita si deduce:

$$\mathrm{d}\theta^{2n+1} = \tfrac{1}{2}[\mu_a \wedge \bar{\mu}^a + \bar{\mu}_a \wedge \mu^a]$$

$$\mathrm{d}\mu^a = -\tfrac{1}{2}[(\omega^a{}_b + \omega^{n+a}{}_{n+b}) + \mathrm{i}(\omega^a{}_{n+b} + \omega^{n+a}{}_b)] \wedge \mu^b - \mu^a{}_b \wedge \bar{\mu}^b - \mu_a \wedge \theta^{2n+1}$$

$$\mathrm{d}\mu_a = (\Omega^a{}_{2n+1} + \mathrm{i}\Omega^{n+a}{}_{2n+1}) - \tfrac{1}{2}[(\omega^a{}_b + \omega^{n+a}{}_{n+b}) + \mathrm{i}(\omega^a{}_{n+b} + \omega^{n+a}{}_b)] \wedge \mu_b - \mu^a{}_b \wedge \bar{\mu}_b$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mu^b{}_a &= \tfrac{1}{2}[(\Omega^b{}_a - \Omega^{n+b}{}_{n+a}) + \mathrm{i}(\Omega^b{}_{n+a} - \Omega^a{}_{n+b})] + \mu_b \wedge \mu_a - \tfrac{1}{2}[(\omega^b{}_c + \omega^{n+b}{}_{n+c}) \\ &+ \mathrm{i}(\omega^{n+c}{}_b - \omega^c{}_{n+b})] \wedge \mu^c{}_a + \tfrac{1}{2}[(\omega^c{}_a + \omega^{n+c}{}_{n+a}) - \mathrm{i}(\omega^{n+a}{}_c - \omega^a{}_{n+c})] \wedge \mu^b{}_c\,.\end{aligned}$$

Gli indici a, b, ... variano in $(1, \ldots, n)$ e le $\Omega^i{}_j$ $(i, j = 1, \ldots, 2n+1)$ denotano le forme di curvatura della connessione Riemanniana.

Da queste formule si può dedurre che la struttura CR di $\mathscr{F}(M, g)$ è integrabile se e solo se

$$\Omega^a{}_{2n+1} + \mathrm{i}\Omega^{n+a}{}_{2n+1} = 0 \qquad \mathrm{mod}(\theta^{2n+1},\ \bar\mu^b \wedge \bar\mu^c \qquad b,\ c = 1, \ldots, n)$$

$$(\Omega^b{}_a - \Omega^{n+b}{}_{n+a}) + \mathrm{i}(\Omega^b{}_{n+a} - \Omega^a{}_{n+b}) = 0 \qquad \mathrm{mod}(\theta^{2n+1},\ \bar\mu^b \wedge \bar\mu^c)\,.$$

Le forme di curvatura $\Omega^i{}_j$ si possono scrivere nel modo seguente

$$\Omega^i{}_j = \tfrac{1}{2}[R^i{}_{jhk}\,\theta^h \wedge \theta^k] \qquad i,\ j,\ h,\ k = 1, \ldots, 2n+1$$

dove le $R^i{}_{jhk}$ sono le componenti del tensore di curvatura di Riemann. In questo contesto il tensore di Riemann è interpretato come un'applicazione $\mathrm{O}(2n+1)$-equivariante definita sul fibrato $\mathrm{O}(M)$, a valori in $\mathscr{R}(R^{2n+1})$. Si osservi che le identità che devono essere verificate dalle forme di curvatura affinché la struttura CR di $\mathscr{F}(M, g)$ sia integrabile possono essere riscritte nel modo seguente

$$J^+ R(u)^\wedge \mathrm{e}_{2n+1}(J^-(X),\ J^-(Y))\,J^-(Z) = 0 \tag{3.8}$$

$$R(u)'\, \mathrm{e}_{2n+1}(J^-(X),\ J^-(Y),\ J^-(Z)) = 0 \tag{3.9}$$

per ogni $u \in \mathrm{O}(M)$, per ogni X, Y, $Z \in \mathrm{Span}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{2n})$, dove $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{2n+1})$ denota la base standard di R^{2n+1} e J denota la struttura complessa standard di $R^{2n} = \mathrm{Span}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{2n})$.

Usando l'equivarianza della applicazione $R : \mathrm{O}(M) \to \mathscr{R}(R^{2n+1})$ e la Proposizione (3.3) si deduce che le (3.8) e (3.9) sono verificate se e solo se $R(u) \in \mathscr{S}(R^{2n+1})$ per ogni $u \in \mathrm{O}(M)$.

In conclusione: la struttura CR di $\mathscr{F}(M, g)$ è integrabile se e solo se la curvatura di Riemann R applica $\mathrm{O}(M)$ in $\mathscr{S}(R^{2n+1})$, cioè se e solo se la curvatura di Weyl della metrica g si annulla.

4 - Fibrazioni twistoriali delle varietà Riemanniane tridimensionali

In questo paragrafo (M, g) denota una varietà Riemanniana tridimensionale. È conveniente cambiare notazioni ed introdurre le 1-forme

$$\omega^1 = \tfrac{1}{2}(\mu^1 - i\mu_1) \qquad \omega^2 = \tfrac{1}{2}(\mu^1 + i\mu_1) \tag{4.1}$$

dove μ^1 e μ_1 sono state introdotte in (3.2). La forma ${}^t(\omega^1, \omega^2)$ è tensoriale per il fibrato principale $q: \mathrm{O}(M) \to \mathscr{F}(M, g)$, ed inoltre

$$i(\omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 - \omega^2 \wedge \bar{\omega}^2) \qquad \omega^1 \bar{\omega}^1 - \omega^2 \bar{\omega}^2 \qquad (\theta^3)^2 + \omega^1 \bar{\omega}^1 - \omega^2 \bar{\omega}^2 \qquad \theta^3$$

sono proiettabili sullo spazio twistoriale $\mathscr{F}$.

Sia $\rho = (\rho_{ij})_{ij=1,2,3}$ la curvatura di Ricci della metrica g: $\rho_{ij} = \Sigma R^k{}_{ikj}$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Dalle equazioni strutturali del parallelismo di Levi-Civita si ottengono le identità:

$$d\theta^3 = i(\omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 - \omega^2 \wedge \bar{\omega}^2) \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} d\omega^1 = &- i[\omega^2{}_1 - \frac{i}{2}(1 + \frac{\rho_{33}}{2})\theta^3 - \frac{\rho_{32}}{2}\theta^2 - \frac{\rho_{31}}{2}\theta^1] \wedge \omega^1 \\ &+ \frac{i}{2}[(1 - \frac{\rho_{33}}{2})\theta^3 - \rho_{32}\theta^2 - \rho_{31}\theta^1] \wedge \omega^2 + \frac{1}{2}[-R^2{}_{331} + \frac{i}{2}(R^1{}_{331} - R^2{}_{332})]\bar{\mu}^1 \wedge \theta^3 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} d\omega^2 = &[\frac{i}{2}(1 - \frac{\rho_{33}}{2})\theta^3 - \frac{i\rho_{32}}{2}\theta^2 - \frac{i\rho_{31}}{2}\theta^1] \wedge \omega^1 - i[\omega^2{}_1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{\rho_{33}}{2})\theta^3 \\ &+ \frac{\rho_{32}}{2}\theta^2 + \frac{\rho_{31}}{2}\theta^1] \wedge \omega^2 - \frac{1}{2}[-R^2{}_{331} + \frac{i}{2}(R^1{}_{331} - R^2{}_{332})]\bar{\mu}^1 \wedge \theta^3 . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Da queste formule si vede che *la struttura* CR *dello spazio twistoriale $\mathscr{F}(M, g)$ è integrabile, non degenere, con forma di Levi di tipo Lorentziano. Inoltre: il fibrato principale $q: \mathrm{O}(M) \to \mathscr{F}(M, g)$ determina una struttura pseudoermitiana associata alla struttura* CR.

Da ora in avanti ci riferiremo sempre alla struttura pseudohermitiana di tipo Lorentziano che abbiamo appena introdotto. Si osservi che il gruppo strutturale

$U(1)$ del fibrato $q: \mathrm{O}(M) \to \mathcal{F}(M, g)$ si rappresenta nel gruppo strutturale $U(1, 1)$ della struttura pseudohermitiana ponendo

$$e^{i\theta} \to \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}.$$

Usando il Teorema (2.2) e le formule (4.3), (4.4) si calcolano facilmente le restrizioni su $\mathrm{O}(M)$ della connessione di Webster ϕ associata alla struttura pseudohermitiana e si ottengono le espressioni:

$$\phi^1{}_1 = i[\omega^2{}_1 - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\rho_{33})\,\theta^3 - \frac{1}{2}\rho_{32}\,\theta^2 - \frac{1}{2}\rho_{31}\,\theta^1] \tag{4.5}$$

$$\phi^2{}_2 = i[\omega^2{}_1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\rho_{33})\,\theta^3 + \frac{1}{2}\rho_{32}\,\theta^2 + \frac{1}{2}\rho_{31}\,\theta^1] \tag{4.6}$$

$$\phi^2{}_1 = -\frac{1}{2}[(1 - \frac{1}{2}\rho_{33})\,\theta^3 - \rho_{32}\,\theta^2 - \rho_{31}\,\theta^1] = -\phi^1{}_2. \tag{4.7}$$

La torsione di Webster è data da

$$B^1{}_1(u) = \frac{1}{2}[R^2{}_{331}(u) + \frac{i}{2}(R^1{}_{331}(u) - R^2{}_{332}(u))] \tag{4.8}$$

$$B^1{}_2(u) = B^1{}_1(u) = -B^2{}_2(u) = -B^2{}_1(u) \tag{4.9}$$

per ogni $u \in \mathrm{O}(M)$. In particolare si ha la

Proprietà 4.1. *La torsione di Webster dello spazio twistoriale $\mathcal{F}(M, g)$ di una varietà Riemanniana tridimensionale si annulla se e solo se la curvatura sezionale della metrica g è costante.*

Dim. Infatti dalla (4.8) e dalla (4.9) si deduce che la torsione di Webster B è identicamente nulla se e solo se

$$R^2{}_{331}(u) = 0 \qquad R^1{}_{331}(u) = R^2{}_{332}(u)$$

per ogni riferimento ortonormale $u \in \mathrm{O}(M)$. D'altro canto queste ultime condizioni sono soddisfatte se e solo se la metrica g è di Eistein, e quindi se e solo se la curvatura sezionale di g è costante.

Il passo successivo consiste nel calcolare la curvatura di Webster di $\mathscr{F}(M, g)$. Per le definizioni rinviamo il lettore dell'articolo [10] (pag. 29-31). In questa sede ci limiteremo a riportare il risultato finale (che segue senza difficoltà dalle formule (4.5)-(4.9)).

Indichiamo con $\mathrm{D}_j \rho_{hk}$ le componenti della derivata covariante del tensore di Ricci, che si ricavano da

$$\mathrm{d}\rho_{hk} = \mathrm{D}\rho_{hk} + \omega^1{}_h \rho_{1k} + \omega^2{}_h \rho_{2k} + \omega^3{}_h \rho_{3k} + \omega^1{}_k \rho_{h1} + \omega^2{}_k \rho_{h2} + \omega^3{}_k \rho_{h3}.$$

La curvatura di Webster $\Phi = (\Phi^a{}_b)_{a,b=1,2}$ è data dalle formule:

$$\Phi^1{}_1 = -\frac{1}{2}[2R^2{}_{112} - 2 - \frac{1}{2}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})]\,\omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 + \frac{1}{4}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})\,\omega^2 \wedge \bar{\omega}^2$$
$$-\frac{1}{2}[R^2{}_{112} + 1 - \frac{1}{2}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})][\omega^1 \wedge \bar{\omega}^2 + \omega^2 \wedge \bar{\omega}^1)$$

$$\Phi^2{}_2 = -\frac{1}{4}\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})\,\omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 - \frac{1}{2}[2R^2{}_{112} - 2 + \frac{1}{2}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})]\,\omega^2 \wedge \bar{\omega}^2$$
$$-\frac{1}{2}[R^2{}_{112} + 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})](\omega^1 \wedge \bar{\omega}^2 + \omega^2 \wedge \bar{\omega}^1)$$

$$\Phi^2{}_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})\,\theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}(1 - R^2{}_{121})(\omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 - \omega^2 \wedge \bar{\omega}^2) = -\bar{\Phi}^1{}_2.$$

Usando le formule (3.5), (3.6) e (3.7) dell'articolo [10] si deduce facilmente che *la curvatura pseudoconforme* $\Psi = (\Psi^a{}_b)_{a,b=1,2}$ *della struttura* CR *dello spazio twistoriale è data da*

$$\Psi^1_1 = \frac{1}{4}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})(\omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 + \omega^2 \wedge \bar{\omega}^2 + \omega^1 \wedge \bar{\omega}^2 + \omega^2 \wedge \bar{\omega}^1) \tag{4.10}$$

$$\Psi^2{}_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31})\,\theta^1 \wedge \theta^2 \tag{4.11}$$

$$\Psi^1{}_2 = -\Psi^2{}_1 \qquad \Psi^2{}_2 = -\Psi^1{}_1. \tag{4.12}$$

Teorema 4.2. *La curvatura pseudoconforme della struttura* CR *dello spazio twistoriale* $\mathscr{F}(M, g)$ *di una varietà Riemanniana tridimensionale* (M, g) *si annulla se e solo se la metrica* g *è localmente conformemente piatta.*

Dim. Le formule (4.10)-(4.12) hanno come conseguenza che l'annullarsi della curvatura pseudoconforme di $\mathscr{F}(M, g)$ equivale a

$$\mathrm{D}_1\rho_{32} - \mathrm{D}_2\rho_{31} = 0. \tag{4.13}$$

D'altro canto la (4.13) significa che il *tensore di Cotton* (cfr. [5])

$$C(X, Y) := (\mathrm{D}_X\rho)Y - (\mathrm{D}_Y\rho)Y$$

della varietà (M, g) si annulla.

È un fatto ben noto che, nel caso di varietà tridimensionali, l'equazione $C = 0$ caratterizza le metriche localmente conformemente piatte. Quindi il teorema è dimostrato.

Osservazione. Facendo ricorso alla teoria di Chern e Moser (cfr. [3]) possiamo dire che la curvatura pseudoconforme di una varietà CR di dimensione 5 con forma di Levi di tipo Lorentziano si annulla se e solo se la varietà è equivalente (in senso pseudoconforme) all'iperquadrica Lorentziana

$$\mathscr{Q}_5 = ((Z_0, Z_1, Z_2) \in C^3/1 + |Z_0|^2 + |Z_1|^2 - |Z_2|^2 = 0).$$

Allora il Teorema 4.2 può essere riformulato affermando che *una varietà Riemanniana tridimensionale* (M, g) *è localmente conformemente equivalente ad* R^3 *se e solo se il suo fibrato twistoriale* $\mathscr{F}(M, g)$ *è localmente equivalente (in senso pseudoconforme) all'iperquadrica* $\mathscr{Q}_5$.

5 - Curve olomorfe in spazi twistoriali di varietà Riemanniane tridimensionali

Def. 5.1. Sia N una varietà CR, una *curva olomorfa in* N è data assegnando un superficie di Riemann connessa X^2 ed un'immersione differenziabile $f: X^2 \to N$ tale che

$$\mathrm{d}f_x(T^{(1,0)}X^2) \subset T'N_{f(x)} \quad \text{per ogni } x \in X^2.$$

Osservazione. Se N è integrabile, con forma di Levi definita allora N non ammette curve olomorfe. Nel caso in cui la forma di Levi è di tipo Lorentziano allora ogni curva olomorfa $f: X^2 \to N$ è necessariamente *isotropa* (cioè $\mathrm{d}f(Z)$ è un vettore di norma nulla, per ogni vettore Z in $T^{(1,0)}X^2$). In [2] R. Bryant ha dimostrato che le curve olomorfe di una varietà CR di tipo Lorentziano dipendono al più da n^2 parametri (dove $2n+1$ è la dimensione di N) e che nel caso generico N non ammette curve olomorfe.

In questo paragrafo studieremo le curve olomorfe negli spazi twistoriali $\mathscr{F}(M, g)$ associati a varietà Riemanniane tridimensionali (ovviamente la struttura CR e la struttura pseudohermitiana di $\mathscr{F}(M, g)$ sono quelle che abbiamo introdotto nel paragrafo precedente).

Def. 5.2. Sia X^2 una superficie di Riemann connessa ed U un dominio di X^2. Una funzione differenziabile $F: U \to C^m$, $m>0$, si dice di *tipo analitico* se per ogni punto $x \in U$ si ha

$$F = z^{k(x)} F^\wedge \tag{5.2}$$

dove z è una coordinata complessa centrata in x, $k(x)$ è un intero non negativo (*l'ordine di F in x*) ed $F^\wedge$ è una funzione differenziabile a valori in C^m, definita in un intorno di x tale che $F^\wedge(x) \neq 0$.

Si osservi che l'ordine di F nel punto x è ben definito, cioè dipende esclusivamente dalla funzione F e dal punto x.

Osservazione. È un fatto ben noto che le funzioni di tipo analitico sono precisamente le soluzioni del sistema differenziale

$$(\mathrm{d}F + \phi) \wedge \alpha = 0 \tag{5.2$'$}$$

dove ϕ è una 1-forma definita su U a valori in $C^{m\times m}$ ed α è una forma di tipo (1, 0), ovunque $\neq 0$.

Se F è una soluzione di (5.2)$'$ allora, nel caso in cui $F \neq 0$, dovrà essere una funzione di tipo analitico (rinviamo il lettore a [3] per confermare queste asserzioni).

Sia ora $f: X^2 \to \mathscr{F}(M, g)$ una curva olomorfa nello spazio twistoriale di una varietà Riemanniana tridimensionale (M, g). Fissiamo un sistema di coordinate complesse (U, z) definito su un intorno U del punto $x \in X^2$ e sia σ una sezione differenziabile di $f^*[\mathrm{O}(M)]$, definita sull'aperto U. Usando le formule (4.2)-(4.4) del paragrafo precedente si ottiene

$$\sigma^*(\theta^3)=0 \qquad \sigma^*(\omega^1+\omega^2)=\lambda dz \qquad \sigma^*(\omega^1-\omega^2)=\mu dz \tag{5.3}$$

dove λ e μ sono funzioni differenziabili a valori complessi definite sull'aperto U ed inoltre λ soddisfa

$$d\lambda\wedge dz=-\lambda\sigma^*(\omega^2{}_1)\wedge dz\,. \tag{5.4}$$

Quindi la funzione λ verifica il sistema differenziale (5.2)'. Poniamo $k(x)=\infty$ se λ si annulla identicamente in un intorno del punto x, in caso contrario $k(x)$ indicherà l'ordine di λ in x. È immediato verificare che $k(x)$ è una quantità ben definita, cioè dipende solo dalla f e dal punto x.

Def. 5.3. Un punto $x\in X^2$ si dirà di *tipo generico* se $k(x)<\infty$. Se invece $k(x)=\infty$ allora diremo che x è di *tipo verticale*.

Poniamo

$$U_0=\{x\in X^2/k(x)<\infty\} \qquad U_\infty=\{x\in X^2/k(x)=\infty\}\,.$$

Questi due sottoinsiemi sono aperti, disgiunti e ricoprono X^2, quindi uno dei due deve essere vuoto.

Proposizione 5.4. *Sia $f:X^2\to\mathscr{F}(M,\,g)$ una curva olomorfa tale che $U_\infty=X^2$, allora $f(X^2)$ è contenuta in una fibra della applicazione twistoriale $T:\mathscr{F}(M,\,g)\to M$.*

Dim. Le 1-forme $\omega^1+\omega^2$ e θ^3 determinano una distribuzione differenziabile su $\mathrm{O}(M)$ che verifica le condizioni d'integrabilità di Frobenius. Le sottovarietà integrali massimali (connesse) della distribuzione si proiettano su $\mathscr{F}(M,\,G)$ come fibre della applicazione twistoriale.

Se $X^2=U_\infty$, allora $f^*[\mathrm{O}(M)]$ è una sottovarietà integrale della distribuzione, quindi è contenuta in una sottovarietà integrale massimale connessa $\mathrm{O}\subset\mathrm{O}(M)$. Allora si ha $f(X^2)\subset p(\mathrm{O})=CP^1$.

Def. 5.5. Una curva olomorfa $f:X^2\to\mathscr{F}(M,\,g)$ si dice *generica* se $U_0=X^2$. In tal caso l'insieme

$$U_+:=\{x\in X^2/k(x)>0\}$$

è discreto. Possiamo quindi definire il *divisore di ramificazione* $\mathscr{D}$ ponendo $\mathscr{D} = \sum k(x) \cdot x$.

Proposizione 5.6. *Sia $f: X^2 \to \mathscr{F}(M, g)$ una curva olomorfa di tipo generico, allora l'applicazione $T \circ f: X^2 - U_+ \to M$ è un'immersione totalmente ombelicale.*

Dim. Indichiamo l'applicazione $T \circ f$ con il simbolo h, e sia σ una sezione locale del fibrato $f^*[\mathrm{O}(M)]$ definita su un aperto $U \subset X^2$ tale che $U \cap U_+ = \emptyset$. Si osservi che σ è un'applicazione del tipo (f, u), dove $u: U \to \mathrm{O}(M)$ verifica $q \circ u = f$.

Si definisca $\sigma^\wedge$ ponendo $\sigma^\wedge = (h, u)$. Quindi $\sigma^\wedge$ è una sezione differenziale di $h^*[\mathrm{O}(M)]$ tale che:

$$\text{(a)} \qquad \sigma^{\wedge *}(\omega^1 + \omega^2) = \sigma^{\wedge *}(\theta^1 + \mathrm{i}\theta^2) = \sigma^*(\omega^1 + \omega^2)$$

$$\text{(b)} \qquad \sigma^{\wedge *}(\theta^3) = \sigma^*(\theta^3) = 0$$

$$\text{(c)} \qquad \sigma^{\wedge *}(\omega^1 - \omega^2) = \sigma^{\wedge *}(\omega^2{}_3 - \mathrm{i}\omega^1{}_3) = \sigma^*(\omega^1 - \omega^2)\,.$$

Poiché sull'aperto U si ha $\sigma^*(\omega^1 + \omega^2) \neq 0$, allora l'applicazione h è un'immersione ed inoltre (b) implica che $\sigma^\wedge$ è un riferimento di Darboux dell'immersione h.

Possiamo quindi porre $\sigma^{\wedge *}(\omega^1 - \omega^2) = s\sigma^{\wedge *}(\omega^1 + \omega^2)$, dove s è una funzione differenziabile a valori complessi.

D'altro canto avremo $d\sigma^{\wedge *}(\theta^3) = 0$, quindi $\sigma^{\wedge *}(\omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 - \omega^2 \wedge \bar{\omega}^2) = 0$. Allora la parte reale di s deve annullarsi ed in particolare

$$\sigma^{\wedge *}(\omega^1{}_3) = \mathrm{Im}(s)\, \sigma^{\wedge *}(\theta^1) \qquad \sigma^{\wedge *}(\omega^2{}_3) = \mathrm{Im}(s)\, \sigma^{\wedge *}(\theta^2)\,.$$

Dunque la restrizione di h sull'aperto U è totalmente ombelicale, e la proposizione è dimostrata.

Sia ora $h: X^2 \to (M, g)$ un'immersione conforme, conveniamo di denotare con $\mathscr{G}(h) \to X^2$ il fibrato dei riferimenti di Darboux di h. Osserviamo che

$$q(u) = q(u') \qquad \forall y \in X^2 \quad \forall (y, u),\ (y, u') \in \mathscr{G}(h)\,.$$

Si può definire un'applicazione differenziabile $h^\wedge: X^2 \to \mathscr{F}(M, g)$ ponendo

$$h^\wedge(y) = p(u) \qquad \forall y \in X^2 \quad \forall u \in \mathrm{O}(M) \text{ tale che } (y, u) \in \mathscr{G}(h)\,.$$

L'applicazione $h^\wedge$ è detta il *sollevamento twistoriale* di h.

Osservazione. Se la varietà M è orientabile allora lo spazio totale della fibrazione twistoriale è formato da due componenti connesse che possono essere identificate con il fibrato sferico tangente ad M. Il sollevamento twistoriale che abbiamo definito poco sopra coincide con *l'applicazione di Gauss associata all'immersione h.*

Se proiettiamo il sollevamento twistoriale $h^\wedge$ su M riotteniamo l'applicazione h di partenza.

Inoltre, partendo da una curva olomorfa $f: X^2 \to \mathscr{F}(M, g)$ di tipo generico, si può riottenere la f sull'aperto $X^2 - U_+$ come il sollevamento twistoriale della immersione $T \circ f$.

Usando gli stessi argomenti che hanno consentito di dimostrare la Proposizione 5.6 si prova la seguente

Proposizione 5.7. *Un'immersione conforme $h: X^2 \to (M, g)$ è totalmente ombelicale se e solo se il suo sollevamento twistoriale $h^\wedge$ è una curva olomorfa in $\mathscr{F}(M, g)$.*

Bibliografia

[1] A. BESSE, *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Genzgebiete, 3 Folge. Band 10, Springer-Verlag, 1987.

[2] R. BRYANT, *Holomorphic curves in Lorentzian* CR*-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 203-221.

[3] S. S. CHERN, *On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature*, Problems in Analysis, A Symp. in honor of S. Bochner, Princeton University Press, 1970.

[4] S. S. CHERN and J. MOSER, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. 133 (1974), 219-271.

[5] C. FEFFERMAN and C. R. GRAHAM, *Conformal invariants*, Soc. Mathematique de France, Asterisque, hors series (1985), 95-116.

[6] C. LEBRUN: $[\bullet]_1$ *Twistor* CR *manifolds and three-dimensional conformal geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), 601-616; $[\bullet]_2$ *Foliated* CR *manifolds*, J. of Diff. Geom. 22 (1985), 81-96.

[7] N. O' BRIAN and J. RAWNSLEY, *Twistor spaces*, Ann. Glob. Anal. Geom. 3 (1985), 29-58.

[8] R. PENROSE: $[\bullet]_1$ *Twistor Algebra*, J. of Math. Physics 8 (1967); $[\bullet]_2$ *Some remarks on twistors and curved-space quantization*, Quantum gravity, Clarendon Press, Oxford, 1981.

[9] J. RAWNSLEY, *f-structures, f-twistor spaces and harmonic maps*, Geom. Sem. L. Bianchi II (1984), Springer Lecture Notes **1164** (1985), 86-159.

[10] S. M. WEBSTER, *Pseudohermitian structures on a real hypersurface*, J. of Diff. Geom. **13** (1978), 25-41.

Abstract

The paper describes the geometry of the fibre-bundle $\mathscr{F}(M, g)$ of the f-structures of rank $2n$ on the tangent spaces of a $2n+1$ dimensional Riemannian manifold (M, g). We are interested in the integrability of the natural CR *structure of $\mathscr{F}(M, g)$ introduced by LeBrun* [6] *and Rawnsley* [9]. *We show that $\mathscr{F}(M, g)$ is integrable if and only if the Weyl curvature tensor of (M, g) vanishes. If (M, g) is 3-dimensional then its twistor space is always integrable with Levi form of Lorentzian type. We then show that the twistor space of a 3-dimensional Riemannian manifold is pseudo-conformally flat if and only if the Cotton tensor vanishes, that is if and only if (M, g) is locally conformally flat.*

* * *