Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 149-159

FRANCESCA PAPALINI (*)

La K-midpoint*convessità (concavità) e la K-semicontinuità inferiore (superiore) di una multifunzione (**)

1 - Introduzione

K. Nikodem in $[4]_1$, indicata con $CC(X)$ la totalità dei sottoinsiemi compatti e convessi di uno spazio normato X, ha provato che ogni multifunzione additiva $F:]0, +\infty[\to CC(X)$ è continua se esiste un intervallo aperto ove F è limitata.

Successivamente, lo stesso Autore in $[4]_3$, detti X e Y due spazi lineari topologici T_0, D un aperto e convesso di X e indicata con $\mathcal{B}(Y)$ la famiglia dei sottoinsiemi limitati di Y, ha provato che ogni multifunzione $F: D \to \mathcal{B}(Y)$ midpoint convessa su D è continua se esiste un aperto $A \subset D$ ove F è limitata.

Di problemi di questo tipo si erano occupati molti Autori nel contesto particolare di funzioni monodrome, stabilendo quali condizioni, oltre all'additività o alla midpoint convessità, fossero sufficienti ad assicurare la continuità della funzione. Di questi Autori alcuni (cfr. [5], [6]) avevano rivolto la loro attenzione a funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, altri (cfr. [2], [7]) avevano, più in generale, preso in esame funzioni $f: X \to Y$, con X, Y spazi lineari topologici.

Vogliamo osservare esplicitamente che il concetto di midpoint convessità per multifunzioni *non* rappresenta, come si potrebbe essere indotti a pensare,

---

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica Università, Via Vanvitelli 1, I-06100 Perugia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). – Ricevuto: 25-IX-1989.

una estensione del concetto di midpoint convessità per funzioni monodrome, ma soltanto una estensione del concetto di midpoint additività.

Se K è un cono di Y, è però possibile fornire un concetto di «midpoint K-convessità» che rappresenta allora una effettiva estensione del concetto di midpoint convessità per funzioni monodrome. Questo concetto viene utilizzato da vari Autori (cfr. ad esempio [7] e $[4]_2$). K. Nikodem in $[4]_2$ ha tra l'altro conseguito la «K-continuità» (1) di una multifunzione come conseguenza della midpoint K-convessità oltre che della K-limitatezza superiore in un aperto. Questa proposizione contiene ovviamente l'analoga proposizione provata dall'Autore in $[4]_3$ e si riduce al classico Teorema di Bernstein-Doetsch (cfr. [3], Teorema VI.4.2), assumendo, in particolare, $X = Y = \mathbb{R}$ e $K = [0, \ +\infty[$.

Noi qui, essendo X e Y due spazi lineari topologici T_0 e $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso, dopo aver introdotto per le multifunzioni $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ i concetti «locali» di «K-midpoint*convessità», di «K-midpoint*concavità» e di «K-midpoint*additività» (proprietà queste che, se verificate in ogni punto di D, rappresentano condizioni più deboli rispettivamente dei concetti di midpoint K-convessità (2), di midpoint K-concavità (3) e di midpoint K-additività (4) su D), abbiamo provato nel teorema 4.1 che:

(j) F K-midpoint*convessa in x_0
(jj) F K-limitata in un intorno di x_0
$\Rightarrow$ F K-semicontinua inferiormente in x_0

e nel Teorema 4.2 che:

(α) F K-midpoint*concava in x_0
($\alpha\alpha$) $F(x_0)$ midpoint K-convesso
($\alpha\alpha\alpha$) F K-limitata in un intorno di x_0
$\Rightarrow$ F K-semicontinua superiormente in x_0.

---

(1) Cfr. qui 2.

(2) Cfr. Def. (2.4) di 2.

(3) Una multifunzione $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ si dice *midpoint K-concava* su D se

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset \frac{1}{2}[F(x) + F(y)] + K \qquad \forall x, \ y \in D.$$

(4) Una multifunzione $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ si dice *midpoint K-additiva* su D se è midpoint K-convessa e midpoint K-concava su D.

Da questi teoremi (cfr. qui Corollario 4.3) segue che:

$$\left.\begin{array}{l}(\beta)\ F\ K\text{-midpoint*additiva in } x_0 \\ (\beta\beta)\ F\ K\text{-limitata in un intorno di } x_0\end{array}\right. \Rightarrow F\ K\text{-continua in } x_0 .$$

Questo risultato, oltre a contenere strettamente il Teorema 3 conseguito da K. Nikodem in $[4]_1$ (cfr. qui Osservazione I), estende la proposizione ottenuta dallo stesso Autore in $[4]_2$ (cfr. qui Osservazione II). Inoltre, per $K = \{0\}$, la nostra proposizione, che si riduce allora al nostro Corollario di [1], estende anche il Teorema 1 di K. Nikodem di cui in $[4]_3$.

2 – Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0.

Un insieme $K \subset Y$, $K \neq \emptyset$, è detto *cono convesso* se soddisfa le seguenti condizioni:

(2.1) $\quad K + K \subset K \qquad$ (2.2) $\quad \alpha K \subset K \qquad \forall \alpha \in [0, +\infty[$.

Diremo che un insieme $A \subset Y$ è *K-limitato inferiormente* se esiste un insieme limitato $B \subset Y$ tale che $A \subset B + K$; mentre diremo che A è *K-limitato superiormente* se esiste un insieme limitato $C \subset Y$ con la proprietà $A \subset C - K$.

Un insieme $A \subset Y$ si dirà *K-limitato* se è K-limitato inferiormente e K-limitato superiormente.

Fissata la famiglia di sottoinsiemi di Y

$$\mathscr{P}(Y) = \{S \subset Y : S \neq \emptyset\} \tag{2.3}$$

la multifunzione $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ si dice (cfr. $[4]_2$, pag. 394) *K-limitata inferiormente* (*K-limitata superiormente*) su un insieme $I \subset X$ se l'insieme $\bigcup_{x \in I} F(x)$ è K-limitato inferiormente (K-limitato superiormente). Si dice poi che F è *K-limitata* su I se è K-limitata inferiormente e K-limitata superiormente su I.

Indicata con $\mathscr{W}(0)$ una base di intorni dello zero in Y, si dice che la multifunzione F è (cfr. $[4]_2$, pag. 394) *K-semicontinua inferiormente* in un punto $x_0 \in X$ se

(K-s.c.i.) per ogni $W \in \mathscr{W}(0)$ esiste un intorno U dello zero, $U \subset X$, con la proprietà $F(x_0) \subset F(x) + W + K \ \forall x \in x_0 + U$.

Si dice invece che la multifunzione F è (cfr. [4]$_2$, pag. 394) *K-semicontinua superiormente* in $x_0 \in X$ se

(K-s.c.s.) per ogni $W \in \mathcal{W}(0)$ esiste un intorno V dello zero, $V \subset X$, in modo che risulti $F(x) \subset F(x_0) + W + K \;\; \forall x \in x_0 + V$.

La multifunzione F si dice *K-continua* nel punto $x_0 \in X$ se è K-semicontinua inferiormente e K-semicontinua superiormente in tale punto.

È appena il caso di osservare che la K-semicontinuità inferiore, la K-semicontinuità superiore e la K-continuità di una multifunzione F, nel caso particolare $K = \{0\}$, altro *non* sono rispettivamente che la semicontinuità inferiore, la semicontinuità superiore e la continuità di F (cfr. [4]$_3$).

Fissato un insieme $D \subset X$ midpoint convesso ([5]), una multifunzione $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ è detta (cfr. [4]$_2$, pag. 393) *midpoint K-convessa* su D se risulta

$$\frac{1}{2}[F(x) + F(y)] \subset F\left(\frac{x+y}{2}\right) + K \qquad \forall x,\; y \in D. \tag{2.4}$$

Andiamo ora a introdurre i concetti di K-midpoint*convessità, di K-midpoint*concavità che estendono rispettivamente i concetti di midpoint*convessità, di midpoint*concavità e di midpoint*additività (cfr. [1]) e che utilizzeremo nel Teorema 4.1, nel Teorema 4.2 e nel Corollario 4.3. Queste proposizioni contengono strettamente un risultato di K. Nikodem (cfr. [4]$_1$, Teorema 3) mentre ne estendono altri (cfr. [1], [4]$_{2,3}$).

Diremo che la multifunzione $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ è *K-midpoint*convessa* in un punto $x_0 \in D$ se

(2.5) esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, con la proprietà

$$\frac{1}{2}[F(x) + F(x_0)] \subset F\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + K \qquad \forall x \in x_0 + U;$$

mentre diremo che F è *K-midpoint*concava* in $x_0 \in D$ se

(2.6) esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, tale che

$$F\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \subset \frac{1}{2}[F(x) + F(x_0)] + K \qquad \forall x \in x_0 + U.$$

([5]) Un insieme D è detto *midpoint convesso* se $\frac{1}{2}(x+y) \in D \;\; \forall x,\; y \in D$.

Diremo poi che la multifunzione F è *K-midpoint*additiva* in $x_0 \in D$ se è K-midpoint*convessa e K-midpoint*concava in tale punto.

Diremo, infine, che F è *K-midpoint*convessa* (*K-midpoint*concava*, *K-midpoint*additiva*) su D se è K-midpoint*convessa (K-midpoint*concava, K-midpoint*additiva) in ogni punto di D.

3 – In quel che segue proveremo alcuni Lemmi che utilizzeremo per conseguire i risultati contenuti in 4.

Lemma 3.1. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $K \subset Y$ un cono convesso, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso e $F : D \to \mathscr{P}(Y)$* (cfr. qui (2.3)) *una multifunzione K-midpoint*convessa in $x_0 \in D$.*

In queste condizioni, esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$, con la proprietà

$$\frac{1}{2^p} F(x) + (1 - \frac{1}{2^p}) F(x_0) \subset F(\frac{1}{2^p} x + (1 - \frac{1}{2^p}) x_0) + K \tag{3.1}$$

$\forall x \in x_0 + U \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Iniziamo con l'osservare che, poiché F è K-midpoint*convessa in x_0, esiste un intorno bilanciato U, $x_0 + U \subset D$, tale che la (3.1) risulti verificata per $p = 1$. Fissati allora $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $x \in x_0 + U$ e posto $A_1 = \ldots = A_{2^p - 1} = F(x_0)$, risulta

$$\frac{1}{2^p} F(x) + (1 - \frac{1}{2^p}) F(x_0) \subset \frac{1}{2^p} [F(x) + A_1 + \ldots + A_{2^p - 1}]$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} \{ \frac{1}{2} [F(x) + F(x_0)] + \frac{1}{2} [A_2 + A_3] + \ldots + \frac{1}{2} [A_{2^p - 2} + A_{2^p - 1}] \}$$

$$\subset \frac{1}{2^{p-1}} [F(\frac{x + x_0}{2}) + A_1 + \ldots + A_{2^{p-1} - 1}] + K.$$

Ripetendo questo procedimento j volte, $j < p$, e tenendo presente che $(x + (2^{j-1} - 1) x_0)/2^{j-1} \in x_0 + U$, segue

$$\frac{1}{2^p} F(x) + (1 - \frac{1}{2^p}) F(x_0) \subset \frac{1}{2^{p-j}} [F(\frac{x + (2^j - 1) x_0}{2^j}) + A_1 + \ldots + A_{2^{p-j} - 1}] + K$$

da cui

$$\frac{1}{2^p}F(x)+(1-\frac{1}{2^p})F(x_0)\subset F(\frac{1}{2^p}x+(1-\frac{1}{2^p})x_0)+K.$$

Fissato ora un insieme $A \subset Y$ e indicata con $H_A : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(Y)$ la multifunzione definita ponendo $H_A(t) = tA \ \forall t \in \mathbb{R}$, sussiste il seguente

Lemma 3.2. *Per ogni insieme K-limitato $A \subset Y$, la multifunzione H_A risulta K-continua su* $\mathbb{R}$.

A tal fine, fissiamo un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ e un intorno $W \in \mathscr{W}(0)$ che *non* è restrittivo supporre bilanciato. Poiché A è un insieme K-limitato, è possibile determinare due sottoinsiemi B e C di Y limitati e una costante $\alpha > 0$ in modo che si abbia

$$(3.2)_1 \qquad A \subset B+K \qquad \alpha B \subset W \qquad\qquad (3.2)_2 \qquad A \subset C-K \qquad \alpha C \subset W.$$

Fissato arbitrariamente un punto $t \in \mathbb{R}$, $|t-t_0| < \alpha$, da $(3.2)_1$ e (2.2) segue

$$|t-t_0|A \subset W+K \tag{3.3}$$

mentre, tenendo presenti $(3.2)_2$ e (2.2), risulta

$$|t-t_0|A \subset W-K. \tag{3.4}$$

Poiché da (3.3) e (3.4) discendono facilmente le seguenti inclusioni

$$t_0A \subset tA+W+K \qquad\qquad tA \subset t_0A+W+K$$

la multifunzione H_A è continua nel punto t_0.

Lemma 3.3. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $K \subset Y$ un cono convesso, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso, $F: D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(i) *F sia K-midpoint*concava in $x_0 \in D$.*

(ii) *$F(x_0)$ sia midpoint K-convesso* (6).

(6) In analogia con la definizione di multifunzione midpoint K-convessa fornita da K. Nikodem in $[4]_2$ diremo che un insieme $A \subset Y$ è *midpoint K-convesso* se

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2) \in A+K \qquad\qquad \forall x_1,\ x_2 \in A.$$

In queste condizioni, esiste un intorno U dello zero, $x_0 + U \subset D$ tale che

$$(3.5)\qquad F\left(\frac{1}{2^p}x + \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)x_0\right) \subset \frac{1}{2^p}F(x) + \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\overline{F(x_0) + K} + K$$

$\forall x \in x_0 + U \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Procediamo per induzione. Iniziamo con l'osservare che nel caso in cui $p = 1$ la (3.5) è immediata conseguenza dell'ipotesi (i). Supponiamo ora che

$$(3.6)\qquad F\left(\frac{1}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)x_0\right) \subset \frac{1}{2^{n-1}}F(x) + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\overline{F(x_0) + K} + K$$

$\forall x \in x_0 + U$, ove U è l'intorno dello zero in X, determinato per $p = 1$, intorno che *non* è restritivo supporre bilanciato.

Fissato $x \in x_0 + U$, tenendo presente che il punto

$$\frac{1}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)x_0 \in x_0 + U$$

dall'ipotesi (i) facilmente si deduce

$$F\left(\frac{1}{2^n}x + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)x_0\right) \subset \frac{1}{2}F(x_0) + \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2^{n-1}}x + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)x_0\right) + K$$

e quindi dalla (3.6) segue

$$(3.7)\qquad F\left(\frac{1}{2^n}x + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)x_0\right)$$

$$\subset \frac{1}{2}\overline{F(x_0) + K} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}}F(x) + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\overline{F(x_0) + K} + K\right] + K$$

$$\subset \frac{1}{2^n}F(x) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left[\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\overline{F(x_0) + K} + \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}\overline{F(x_0) + K}\right] + K.$$

Dall'ipotesi (ii) segue che l'insieme $F(x_0) + K$ è midpoint convesso e pertanto, tenendo presente il Lemma 4.1 di [**1**], l'insieme $\overline{F(x_0) + K}$ risulta convesso; dalla (3.7) discende allora

$$F\left(\frac{1}{2^n}x + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)x_0\right) \subset \frac{1}{2^n}F(x) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\overline{F(x_0) + K} + K.$$

4 – Siamo ora in grado di dimostrare le seguenti due proposizioni che forniscono criteri sufficienti per la K-semicontinuità inferiore e per la K-semicontinuità superiore di una multifunzione.

Teorema 4.1. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $K \subset Y$ un cono convesso, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso e $F : D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(j) *F sia K-midpoint*convessa in $x_0 \in D$;*

(jj) *esista un intorno I dello zero, $x_0 + I \subset D$, in modo che F sia K-limitata in $x_0 + I$.*

In queste condizioni, F risulta K-semicontinua inferiormente in x_0.

Iniziamo con l'osservare che *non* è restrittivo supporre che l'insieme D contenga lo zero e che x_0 coincida con tale punto.

Per provare che F è K-semicontinua inferiormente in 0, fissiamo un intorno $W \in \mathscr{W}(0)$ e sia $V \in \mathscr{W}(0)$ un intorno con la proprietà

$$V + V \subset W. \tag{4.1}$$

Poiché (cfr. ipotesi (jj)) gli insiemi $F(0)$ e $\bigcup_{x \in I} F(x)$ sono K-limitati, risultano (cfr. qui Lemma 3.2) K-continue nel punto $t = 0$ le multifunzioni

$$t \mapsto (1-t)F(0) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

$$t \mapsto t \bigcup_{x \in I} F(x) \qquad \forall t \in \mathbb{R}; \tag{4.3}$$

è allora possibile determinare un numero $\delta > 0$ in modo che

$$F(0) \subset (1-t)F(0) + V + K \qquad \forall t \in]-\delta, \delta[\tag*{(4.2)$_1$}$$

$$t \bigcup_{x \in I} F(x) \subset V + K \qquad \forall t \in]-\delta, \delta[. \tag*{(4.3)$_1$}$$

Fissato un numero $\bar{n} \in \mathbb{N}$, $1/2^{\bar{n}} < \delta$, per il Lemma 3.1 esiste un intorno U dello zero, $U \subset D$, con la proprietà

$$\frac{1}{2^{\bar{n}}} F(x) + \left(1 - \frac{1}{2^{\bar{n}}}\right) F(0) \subset F\left(\frac{x}{2^{\bar{n}}}\right) + K \qquad \forall x \in U. \tag{4.4}$$

Andiamo ora a considerare l'intorno dello zero $J = 1/2^{\bar{n}}(U \cap I)$ e, per ogni fissato $y \in J$, sia $\overline{x} \in U \cap I$ tale che $y = \overline{x}/2^{\overline{n}}$; da (4.4) segue

$$(1 - \frac{1}{2^{\overline{n}}})F(0) \subset F(y) - \frac{1}{2^{\overline{n}}}F(\overline{x}) + K \subset F(y) - \frac{1}{2^{\overline{n}}} \bigcup_{x \in I} F(x) + K$$

e pertanto, da $(4.2)_1$, si ha infine (cfr. qui $(4.3)_1$ e (4.1))

$$F(0) \subset F(y) - \frac{1}{2^{\overline{n}}} \bigcup_{x \in I} F(x) + V + K + K \subset F(y) + W + K.$$

Teorema 4.2. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $K \subset Y$ un cono convesso, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso e $F : D \longrightarrow \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà:*

(α) *F sia K-midpoint*concava in $x_0 \in D$;*

($\alpha\alpha$) *$F(x_0)$ sia midpoint K-convesso;*

($\alpha\alpha\alpha$) *esista un intorno I dello zero, $x_0 + I \subset D$, in modo che F sia K-limitata in $x_0 + I$.*

In queste condizioni, F risulta K-semicontinua superiormente in x_0.

Come nel Teorema 4.1, anche qui *non* è restrittivo supporre $0 \in D$ e $x_0 = 0$. Per provare che F è K-semicontinua superiormente in 0, iniziamo con il fissare un intorno $W \in \mathscr{W}(0)$ e sia $V \in \mathscr{W}(0)$ un intorno bilanciato tale che

$$V + V + V \subset W. \tag{4.5}$$

Tenendo presente l'ipotesi ($\alpha\alpha\alpha$), dal Lemma 3.2, segue che sono K-continue su $\mathbb{R}$ le multifunzioni

$$t \mapsto (1 - t)F(0) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

$$t \mapsto t \bigcup_{x \in I} F(x) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

e perciò, in particolare, è possibile determinare un $\eta > 0$ in modo che sussistano le seguenti relazioni

$$(1 - t)F(0) \subset F(0) + V + K \qquad \forall t \in]-\eta, \ \eta[\tag{4.6$_1$}$$

$$t \bigcup_{x \in I} F(x) \subset V + K \qquad \forall t \in]-\eta, \ \eta[\,. \tag{4.7$_1$}$$

Dal Lemma 3.3, fissato $\overline{n} \in \mathbb{N}$, $1/2^{\overline{n}} \in]-\eta, \ \eta[$, esiste un intorno U dello zero,

$U \subset D$, per cui risulta

$$F\left(\frac{x}{2^{\bar{n}}}\right) \subset \frac{1}{2^{\bar{n}}} F(x) + \left(1 - \frac{1}{2^{\bar{n}}}\right) \overline{F(0) + K} + K \qquad \forall x \in U. \tag{4.8}$$

Posto $J = 1/2^{\bar{n}}(U \cap I)$, per ogni $y \in J$, sia $\bar{x} \in U \cap I$ tale che $y = \bar{x}/2^{\bar{n}}$. Poiché $\overline{F(0) + K} \subset F(0) + K + V$, risulta infine (cfr. (4.8), $(4.6)_1$, $(4.7)_1$ e (4.5))

$$F(y) \subset \frac{1}{2^{\bar{n}}} F(\bar{x}) + \left(1 - \frac{1}{2^{\bar{n}}}\right)[F(0) + K + V] + K \subset \frac{1}{2^{\bar{n}}} \bigcup_{x \in I} F(x) + F(0) + V + V + K$$
$$\subset F(0) + W + K.$$

Dai Teoremi 4.1 e 4.2 segue il

Corollario 4.3. *Siano X, Y due spazi lineari topologici T_0, $K \subset Y$ un cono convesso, $D \subset X$ un insieme aperto e midpoint convesso e $F : D \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunzione con le proprietà*

(β) *F sia K-midpoint*additiva in $x_0 \in D$;*

(ββ) *esista un intorno I dello zero, $x_0 + I \subset D$, in modo che F sia K-limitata in $x_0 + I$.*

In queste condizioni, F risulta K-continua in x_0.

Il risultato è ovvio ove si tenga presente che dall'ipotesi (β) segue che l'insieme $F(x_0)$ è midpoint K-convesso.

Osservazione I. Il Corollario 4.3 contiene strettamente il Teorema 3 ottenuto da K. Nikodem in $[4]_1$. Infatti, ogni multifunzione U definita nell'intervallo $]0, +\infty[$ e a valori nella famiglia dei sottoinsiemi compatti e convessi di uno spazio normato X, *additiva* (cioè tale che $U(x+y) = U(x) + U(y)$, $\forall x, y \in]0, +\infty[$) e *limitata in un intervallo* $]a, b[\subset]0, +\infty[$, così come richiesto nel citato Teorema 3 di $[4]_1$, verifica le ipotesi del nostro Corollario. Infatti è subito visto che, nel caso $K = \{0\}$, ogni multifunzione additiva su $]0, +\infty[$ è anche K-midpoint*additiva su $]0, +\infty[$; d'altra parte U si può scrivere nella forma (cfr. $[4]_1$, Teorema 6) $U(t) = tU(1)$ $\forall t \in]0, +\infty[$ e quindi soddisfa anche l'ipotesi (ββ) del nostro Corollario.

Osservazione II. Il Corollario 4.3 di qui, che si riduce per $K = \{0\}$ al nostro Corollario di [1], rappresenta inoltre una estensione del recente Teorema 1 conseguito da K. Nikodem in $[4]_2$. Ciò segue subito dall'esame della multifunzione $F: X \to \mathscr{P}(Y)$, $X = Y = \mathbb{R}$, definita ponendo: $F(x) = [x,\ 0]$ per $x < 0$, $F(x) = \{0\}$ per $x = 0$, $F(x) = [0,\ x]$ per $x > 0$.

Bibliografia

[1] T. Cardinali e F. Papalini, *Una estensione del concetto di midpoint convessità per multifunzioni*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **15** (1989), 119-131.

[2] P. Fischer and Z. Slodowski, *Christensen zero sets and measurable convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 449-453.

[3] M. Kuzma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities, Cauchy's equation and Jensen's inequality*, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakòw-Katowice, (1985).

[4] K. Nikodem: $[\bullet]_1$ *On additive set valued functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **26** (1981), 1005-1013; $[\bullet]_2$ *Continuity of K-convex set-valued functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **34** (1986), 393-399; $[\bullet]_3$ *On midpoint convex set-valued functions*, Aequationes Math. **33** (1987), 46-56.

[5] W. Sierpinski: $[\bullet]_1$ *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$*, Fund. Math. **1** (1920), 116-122; $[\bullet]_2$ *Sur les fonctions convexes mesurables*, Fund. Math. **1** (1920), 125-128; $[\bullet]_3$ *Sur une propriété des fonctions de M. Hamel*, Fund. Math. 5(1924), 334-336.

[6] J. Smìtal: $[\bullet]_1$ *On boundedness and discontinuity of additive functions*, Fund. Math. **76** (1972), 245-253; $[\bullet]_2$ *On convex functions bounded below*, Aequationes Math. **14** (1976), 345-350; $[\bullet]_3$ *A necessary and sufficient condition for continuity of additive functions*, Czechoslovak Math. **101** (1976), 171-173.

[7] L. Thibault, *Continuity of measurable convex multifunctions*, Lectures Notes in Math. **1091**, Springer-Verlag (1984), 216-224.

Abstract

*In this paper we obtain a sufficient condition for a K-midpoint*convex (K-midpoint*concave) multifunction on a point to be K-lower semicontinuous (K-upper semicontniuous) on the same point.*

These results contain or extended various results stated by K. Nikodem.

***